serie di elettronica

giuseppe conciauro

introduzione alle onde elettromagnetiche

McGraw-Hill

Indice

Capitolo 6 Cavità risonanti 217

Capitolo 7 Radiazione 243

Capitolo 8 Antenne 289

1

Leggi e concetti fondamentali

La previsione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche costituisce il risultato più importante della Teoria Elettromagnetica ideata da J.C. Maxwell alla fine del secolo scorso. Adottando il punto di vista originariamente introdotto da Faraday, Maxwell attribuì l'interazione a distanza fra corpi carichi, polarizzati o percorsi da corrente ad un particolare stato di sollecitazione prodotto nell'ambiente dagli stessi corpi interagenti. Per descrivere la sollecitazione egli introdusse il "campo elettromagnetico", un'entità teorica di cui definì le leggi su basi puramente fenomenologiche. Da tali leggi dedusse che in condizioni dinamiche le variazioni del campo si propagano nel vuoto con velocità pari a quella della luce, giungendo così a riconoscere la natura elettromagnetica della radiazione luminosa.

Sebbene in questo secolo gli sviluppi della Fisica abbiano portato a rivedere il concetto di campo e ad arricchirne il significato attraverso la scoperta dei fenomeni fondamentali di interazione a livello microscopico, la teoria di Maxwell rimane tutt'oggi perfettamente valida come *teoria dell'elettromagnetismo macroscopico*. In particolare essa costituisce lo strumento essenziale per la modellizzazione matematica dei fenomeni connessi alla propagazione delle onde elettromagnetiche, dalle frequenze più basse fino a quelle ottiche.

Questo capitolo è dedicato a introdurre le equazioni e i concetti basilari dell'elettromagnetismo macroscopico. Confidando sulle conoscenze che il lettore ha già acquisito nel corso di Fisica, il capitolo inizia con la formulazione delle equazioni di Maxwell, che vengono postulate, senza fare alcun riferimento ai loro presupposti fenomenologici. Il capitolo prosegue con la discussione tipologica delle equazioni che descrivono le proprietà elettromagnetiche del mezzo (relazioni costitutive), con particolare riferimento a quelle di tipo lineare. Tali equazioni vengono introdotte in una forma adatta a trattare situazioni dinamiche di rapida variabilità, come quelle che si incontrano in molte importanti applicazioni (microonde, ottica). Viene considerata con particolare attenzione la forma delle equazioni di Maxwell e delle relazioni costitutive nel caso dei campi che variano nel tempo con legge sinusoidale, caso a cui si farà quasi sempre riferimento nei capitoli successivi. Una parte del capitolo è dedicata a introdurre le leggi che servono a studiare la trasmissione dell'energia elettromagnetica, fenomeno particolarmente importante in tutte le applicazioni delle onde.

Viene usata correntemente l'analisi vettoriale, per la quale ci si limita a fornire un formulario (vedi Appendice A), supponendo che il lettore abbia già una sufficiente familiarità con essa. Viene adottato il sistema di unità di misura MKSA.

1.1 Equazioni di Maxwell, equazione di continuità

I fenomeni elettromagnetici macroscopici dipendono dal campo elettromagnetico macroscopico, che viene descritto mediante i seguenti vettori, dipendenti dalla posizione (**r**) e dal tempo (t):

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$	*campo elettrico*	[V/m]
$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$	*campo magnetico*	[A/m]
$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$	*spostamento elettrico*	[C/m^2]
$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	*induzione magnetica*	[Wb/m^2]

I vettori del campo sono continui nelle regioni in cui il mezzo è continuo. In queste regioni essi soddisfano le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{1.1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{1.1c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.1d}$$

dove $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ rappresentano la *densità di corrente* [A/m^2] e la *densità di carica* [C/m^3] rispettivamente.

Integrando le equazioni di Maxwell in un volume V (Figura 1.1*a*), e applicando la formula del rotore (A.100) o il teorema della divergenza (A.99), si ottengono le seguenti relazioni, dette "*equazioni di Maxwell in forma integrale*":

$$\int_{S_v} \mathbf{n} \times \mathbf{H} \, dS_v = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{D} \, dV + \int_V \mathbf{J} \, dV \tag{1.2a}$$

$$\int_{S_v} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \, dS_v = -\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{B} \, dV \tag{1.2b}$$

$$\int_{S_v} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \, dS_v = q \tag{1.2c}$$

$$\int_{S_v} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, dS_v = 0 \tag{1.2d}$$

In queste equazioni S_V rappresenta il contorno di V, **n** la normale al contorno orientata nel verso uscente, q la carica contenuta nel volume V. È facile verificare che, grazie alla genericità di V, le equazioni in forma integrale implicano le equazioni differenziali da cui sono state ricavate. Pertanto esse sono concettualmente equivalenti alle equazioni differenziali. È interessante osservare che *le equazioni di Maxwell in forma integrale hanno senso anche quando i campi sono discontinui nella regione in cui è collocato V.* Pertanto esse hanno maggiore generalità delle corrispondenti equazioni differenziali, essendo applicabili anche in regioni in cui il mezzo è discontinuo.

Altre relazioni integrali vengono ottenute considerando il flusso di entrambi i membri delle (1.1*a*, *b*) attraverso una superficie orientata S (Figura 1.1*b*). Applicando il teorema di Stokes (A.108) si ottiene:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathrm{C} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, dS + i \qquad \textit{(legge di Ampère-Maxwell)} \qquad (1.3a)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathrm{C} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad \textit{(legge di Faraday-Neumann)} \qquad (1.3b)$$

dove **n** è il versore normale che fissa l'orientamento di S, C è il contorno di S orientato nel verso positivo, d**C** è uno spostamento infinitesimo lungo C, i è l'intensità della corrente che attraversa S nel verso di positivo.

Le equazioni di Maxwell sono insufficienti per studiare il campo elettromagnetico, anche nei problemi in cui le densità di carica e di corrente sono grandezze "impresse".[1] In effetti, come si vedrà nel paragrafo successivo, per determinare il campo è necessario associare alle equazioni di Maxwell ulteriori equazioni dipendenti dalla natura del mezzo. Tuttavia, le sole equazioni di Maxwell, grazie alla loro assoluta generalità, permettono di dedurre ulteriori relazioni che - opportunamente interpretate - rappresentano leggi altrettanto generali; ad esempio quelle di conservazione della carica, dell'energia, ecc. La legge di conservazione della carica viene dedotta come segue: considerando la divergenza della (1.1*a*), usando l'identità (A.32) ed eliminando **D** mediante la (1.1*c*), si ottiene in primo luogo l'*equazione di continuità*:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (1.4)$$

Integrando nel solito volume V e applicando il teorema della divergenza si ottiene infine

$$\int_{S_V} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS_V = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

1 Si dice "impressa" una grandezza nota a priori. Sebbene le cariche e le correnti dipendano dal campo, in certi casi è possibile conoscerne le densità prima di conoscere il campo stesso. Ad esempio, le densità possono essere desunte da opportuni rilievi sperimentali.

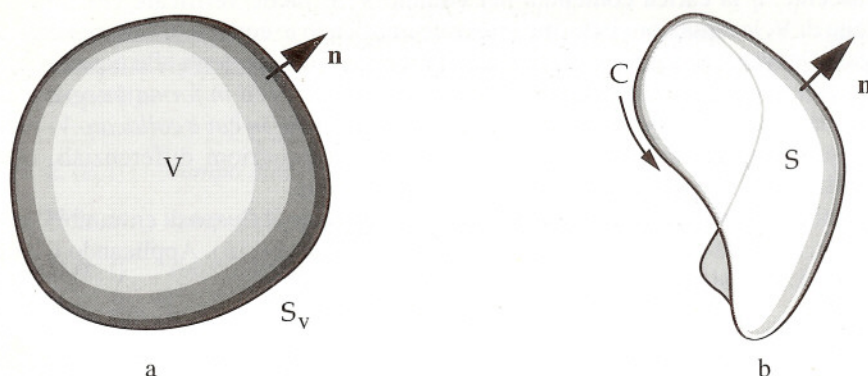



Figura 1.1

ovvero:

$$i_V = -\frac{dq}{dt} \tag{1.5}$$

dove i_V rappresenta l'intensità della corrente che attraversa S_V nel verso uscente. Poiché i_V rappresenta la carica netta che nell'unità di tempo esce dal volume V, la precedente relazione indica che tale carica è esattamente bilanciata dal decremento subìto nello stesso tempo dalla carica contenuta nel volume considerato. Dunque la (1.5) ha la seguente interpretazione:

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA: *le variazioni della carica elettrica contenuta in una regione dello spazio dipendono solo da migrazione della carica da (o verso) la regione esterna, non da processi di generazione o di annichilimento.*

L'equazione di continuità esprime in forma differenziale la legge di conservazione della carica. Poiché essa è conseguenza delle equazioni di Maxwell, tali equazioni non ammetterebbero soluzione se si cercasse di determinare il campo prodotto da densità di carica e di corrente assegnate arbitrariamente, in contrasto con l'equazione di continuità. Ad esempio sarebbe mal posto il problema della determinazione del campo creato da una distribuzione di carica variabile nel tempo, in assenza di corrente.

1.2 Relazioni costitutive

Le equazioni di Maxwell non contengono alcuna informazione riguardo alle proprietà del mezzo. D'altro canto sotto l'azione del campo il mezzo si polarizza e - se è conduttore - viene attraversato da correnti di conduzione. Questi effetti influenzano il campo e devono essere tenuti in conto attraverso ulteriori equazioni, dette *relazioni costitutive*.

Poiché i meccanismi microscopici che determinano la polarizzazione e la conduzione

dei materiali sono molteplici, la forma delle relazioni costitutive non è unica. Essa deve essere dedotta caso per caso mediante opportune esperienze.[1]

Nel caso particolare del vuoto, che non si polarizza né conduce, le equazioni costitutive non riflettono alcun fenomeno fisico e dipendono solo dalla scelta del sistema di unità di misura. Nel sistema MKSA si ha:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{2.1}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, $\varepsilon_0 \approx 1/(36\pi) \cdot 10^{-9}$ F/m. Si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \, \text{m/s} \qquad \textit{(velocità della luce)} \tag{2.2}$$

Lo stato di polarizzazione elettrica e magnetica del mezzo è rappresentato dai seguenti vettori, che possono differire da zero solo nella materia:

$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$ *(intensità di polarizzazione elettrica)* [C/m^2]

$\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$ *(intensità di polarizzazione magnetica)* [A/m]

Se il mezzo è immobile la polarizzazione elettrica dipende normalmente solo da **E**, mentre la polarizzazione magnetica dipende solo da **B**. Ne consegue che, se il mezzo è immobile, le equazioni costitutive collegano **D** a **E**, e **B** ad **H**. Inoltre, sempre nell'ipotesi di mezzo immobile, la densità della corrente di conduzione è collegata al solo campo elettrico.[2]

Le proprietà elettromagnetiche dei materiali sono influenzate da fattori di natura meccanica e termica. Pertanto le relazioni costitutive coinvolgono, oltre alle grandezze elettromagnetiche, anche grandezze diverse, quali ad esempio la pressione, la temperatura, ecc. Quando le condizioni termiche e meccaniche del mezzo dipendono sensibilmente dal campo, le grandezze non elettromagnetiche sono incognite da determinare assieme ai vettori del campo; in questo caso lo studio delle onde elettromagnetiche si complica, perché non può essere scisso da quello di onde di altra natura.[3]
Fortunatamente, nella maggior parte dei casi, le condizioni meccaniche e termiche del

---

1 In linea di principio le relazioni costitutive possono anche essere dedotte per via teorica, se si è in grado di studiare la risposta della materia alle sollecitazioni elettromagnetiche. Però solo raramente tale studio può essere condotto in termini macroscopici, come nel caso della conduzione nei gas ionizzati, il cui comportamento viene descritto con sufficiente accuratezza mediante un modello fluidodinamico (vedi Appendice B). Nella maggior parte dei casi è necessario studiare gli effetti dell'interazione elettromagnetica a livello atomico, cosa che richiede l'uso della teoria quantistica.

2 Non mancano eccezioni. Ad esempio, nei gas ionizzati e nei semiconduttori, l'influenza di **B** sulle correnti di conduzione (effetto Hall) è talvolta rilevante.

3 Ad esempio, quando gli sforzi di origine elettromagnetica danno luogo a deformazioni non trascurabili del mezzo, le onde elettromagnetiche producono onde acustiche. D'altro canto le deformazioni acustiche influiscono sulla polarizzazione e quindi sulla propagazione delle onde elettromagnetiche. Ne consegue che lo studio delle onde elettromagnetiche non può essere scisso da quello delle onde acustiche.

mezzo sono sostanzialmente indipendenti dal campo e sono note a priori. Inoltre - molto spesso - esse sono stazionarie, e il loro influsso sulle equazioni costitutive si riflette solo sul valore di certe costanti. In questi ultimi casi - che sono i più semplici da trattare - il comportamento elettromagnetico del mezzo è invariante nel tempo (*mezzo stazionario*). L'ipotesi di immobilità e di stazionarietà del mezzo verrà tacitamente assunta d'ora in poi.

Talvolta è possibile descrivere le proprietà del mezzo mediante semplici relazioni costitutive del tipo

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0\, \mu_r\, \mathbf{H}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E} \tag{2.3}$$

dove ε_r e μ_r sono la *permeabilità elettrica* e la *permeabilità magnetica* relative e σ è la *conducibilità* [S/m]. L'ultima di queste relazioni è la ben nota *legge di Ohm*. Le permeabilità e la conducibilità sono indipendenti sia dall'intensità che dalla direzione dei vettori del campo. Evidentemente le (2.3) possono valere solo se il mezzo è *isotropo*, cioè se le sue caratteristiche fisiche sono uguali in tutte le direzioni; infatti i vettori che figurano in ciascuna di queste relazioni sono allineati e in rapporto costante, qualunque sia la loro direzione.

Relazioni analoghe alle (2.3), ma adatte a rappresentare il comportamento di un mezzo *anisotropo*, sono

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\, \underline{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0\, \underline{\mu}_r \cdot \mathbf{H}, \qquad \mathbf{J} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{E} \tag{2.4}$$

dove le permeabilità e la conducibilità sono di tipo tensoriale (vedi Appendice A). Ad esempio, introducendo le componenti cartesiane di **D**, di **E** e del tensore $\underline{\varepsilon}_r$, la prima delle (2.4) si traduce nel sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} (\varepsilon_r)_{xx} & (\varepsilon_r)_{xy} & (\varepsilon_r)_{xz} \\ (\varepsilon_r)_{yx} & (\varepsilon_r)_{yy} & (\varepsilon_r)_{yz} \\ (\varepsilon_r)_{zx} & (\varepsilon_r)_{zy} & (\varepsilon_r)_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

È evidente che con una relazione di questo tipo **D** ed **E** non sono generalmente allineati; inoltre il disallineamento e il rapporto delle intensità dipende dalla direzione.

Per la loro semplicità le relazioni costitutive del tipo (2.3) o (2.4) sono spesso le uniche considerate nei corsi introduttivi di Fisica. Bisogna però osservare che esse non sono valide in generale, essendo inadatte a rappresentare il comportamento dei materiali in presenza di campi intensi e/o rapidamente variabili nello spazio o nel tempo.

Le equazioni in questione implicano che le intensità di polarizzazione e la densità di corrente siano legate ai vettori del campo da relazioni lineari; quindi, in un mezzo descritto dalle (2.3) o dalle (2.4), le intensità di polarizzazione e la densità di corrente dovrebbero crescere linearmente con il campo, indipendentemente dall'intensità da esso raggiunta. Un simile comportamento è però irrealistico perché, al crescere dell'intensità, si manifestano fenomeni che modificano la polarizzabilità e le proprietà di conduzione dei materiali (per esempio scariche, saturazione, surriscaldamento, ecc.). Solo approssimativamente, quando il campo è "sufficientemente debole", i materiali si comportano in modo lineare.

Inoltre si osserva che le (2.3) e le (2.4) mettono in relazione vettori presi nello stesso istante e che, quindi, esse sottintendono l'ipotesi che le intensità di polarizzazione e la densità di corrente dipendano in ogni istante dai valori dei vettori del campo considerati nello stesso istante. In realtà l'inerzia delle strutture atomiche e/o dei portatori di carica fa sì che le variazioni temporali delle intensità di polarizzazione e/o della densità di corrente seguano con un certo ritardo le variazioni temporali del campo, con ritardi che divengono apprezzabili quando le variazioni sono tanto rapide da essere sensibili in tempi paragonabili a quelli che caratterizzano la dinamica delle strutture atomiche (periodi delle oscillazioni proprie degli elettroni, tempi di rilassamento delle molecole polari, ecc.). Per tener conto di questi effetti dinamici le equazioni costitutive devono coinvolgere non solo i vettori del campo - come avviene nelle (2.3) e (2.4) - ma anche le loro derivate temporali. I mezzi che richiedono di essere rappresentati da equazioni costitutive di questo genere vengono detti "con memoria", perché in essi le intensità di polarizzazione e/o la densità di corrente in un certo istante dipendono dall'evoluzione del campo negli istanti precedenti. Solo quando le variazioni del campo sono "sufficientemente lente" la memoria del mezzo può essere trascurata.

Si osserva infine che le (2.3) e (2.4) collegano i vettori del campo presi nello stesso punto, e che quindi esse implicano l'ipotesi che le intensità di polarizzazione e la densità di corrente siano indipendenti dalla rapidità delle variazioni del campo nell'intorno del punto considerato. Sebbene questa ipotesi sia spesso ben verificata, esistono esempi di mezzi per i quali è importante tenere in conto la rapidità delle variazioni spaziali del campo (*mezzi dispersivi nello spazio*). Le equazioni costitutive di questi mezzi devono coinvolgere, oltre ai vettori del campo, anche le loro derivate spaziali.[1]

Le precedenti considerazioni indicano che, in linea di principio, le relazioni costitutive del tipo (2.3) e (2.4) possono essere accettabili solo quando i campi sono "sufficientemente deboli" e quando le loro variazioni spaziali e temporali sono "sufficientemente lente". Le stesse considerazioni mostrano inoltre che, per rimuovere queste limitazioni, bisognerebbe considerare relazioni costitutive molto più complicate, rappresentate da equazioni non lineari, che coinvolgono derivate spaziali e temporali dei vettori del campo.

Fortunatamente, nella maggior parte delle applicazioni delle onde, le intensità dei campi sono sufficientemente deboli per poter trascurare la non-linearità del mezzo;[2] inoltre la dispersività spaziale è un effetto che raramente ha importanza. Invece, tener conto della memoria è necessario perché, non di rado, i tempi che caratterizzano le variazioni dei campi divengono paragonabili ai tempi che caratterizzano la risposta del mezzo, già nella gamma di frequenze delle microonde. Per questa ragione, nello studio che ci si accinge ad intraprendere, è sufficiente considerare la sola classe dei *mezzi lineari, stazionari, non-dispersivi nello spazio, con memoria,* per i quali le relazioni

1 Ad esempio sono spazialmente dispersivi i mezzi che danno luogo alla cosiddetta "attività ottica naturale", come certe soluzioni che determinano la rotazione della polarizzazione di fasci luminosi polarizzati (L. Landau, E. Lifchitz, *Physique theorique, Tome VIII, Electrodinamique des milieux continus*, Ed. MIR, Moscou 1969, § 83).

2 Nelle onde elettromagnetiche generate dai laser possono aversi campi di elevatissima intensità. Lo studio di queste onde non può prescindere dalla non-linearità del mezzo ed è oggetto della cosiddetta "Ottica non-lineare".

costitutive sono espresse da equazioni differenziali lineari, contenenti solo derivate temporali e coefficienti indipendenti dal tempo. Nel caso dei mezzi isotropi verranno considerate relazioni costitutive del tipo:

$$d_m \frac{\partial^m \mathbf{D}}{\partial t^m} + d_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \mathbf{D}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + d_1 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + d_0 \mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(e_n \frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n} + e_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \mathbf{E}}{\partial t^{n-1}} + \ldots + e_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + e_0 \mathbf{E} \right) \tag{2.5a}$$

$$b_m \frac{\partial^m \mathbf{B}}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \mathbf{B}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + b_0 \mathbf{B} = \mu_0 \left(m_n \frac{\partial^n \mathbf{H}}{\partial t^n} + m_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \mathbf{H}}{\partial t^{n-1}} + \ldots + m_1 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + m_0 \mathbf{H} \right) \tag{2.5b}$$

$$g_m \frac{\partial^m \mathbf{J}}{\partial t^m} + g_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \mathbf{J}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + g_1 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + g_0 \mathbf{J} = s_n \frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n} + s_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \mathbf{E}}{\partial t^{n-1}} + \ldots + s_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + s_0 \mathbf{E} \tag{2.5c}$$

dove i coefficienti d_i, e_i, b_i, m_i, g_i, s_i sono indipendenti dal tempo e dal campo. È evidente che le precedenti relazioni si riducono alle (2.3) quando le variazioni del campo divengono tanto lente da poter trascurare tutte le derivate (risulta $\varepsilon_r = e_0/d_0$, $\mu_r = m_0/b_0$, $\sigma = s_0/g_0$).

Nel caso dei mezzi anisotropi verranno considerate relazioni analoghe alle precedenti, con l'unica differenza che i coefficienti saranno generalmente tensoriali. Ad esempio, fra **E** e **J** verrà considerata una relazione del tipo:

$$\underline{\mathbf{g}}_m \cdot \frac{\partial^m \mathbf{J}}{\partial t^m} + \underline{\mathbf{g}}_{m-1} \cdot \frac{\partial^{m-1} \mathbf{J}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + \underline{\mathbf{g}}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \underline{\mathbf{g}}_0 \cdot \mathbf{J} = \underline{\mathbf{s}}_n \cdot \frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n} + \underline{\mathbf{s}}_{n-1} \cdot \frac{\partial^{n-1} \mathbf{E}}{\partial t^{n-1}} + \ldots + \underline{\mathbf{s}}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \underline{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{E} \tag{2.6}$$

dove i "coefficienti" $\underline{\mathbf{g}}_i$ e $\underline{\mathbf{s}}_i$ sono tensori. Un interessante esempio di equazioni costitutive del tipo (2.5*c*) e (2.6) è discusso in Appendice B, dove viene studiata la conduzione in un gas ionizzato.

Le equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive sono sufficienti per affrontare lo studio del campo in una regione in cui il mezzo è continuo. Si noti che l'equazione costitutiva che collega la corrente di conduzione al campo è richiesta solo quando **J** è una densità di corrente di conduzione incognita.

Essa invece non deve essere considerata se **J** è una corrente impressa, dato che in questo caso **J** interviene nelle equazioni di Maxwell come una funzione nota, che ricopre il ruolo di "sorgente" del campo.[1]

1.3 Cariche e correnti superficiali, superfici di discontinuità dei vettori del campo

Si consideri una distribuzione di carica e di corrente confinata entro un sottile strato di spessore h intorno ad una certa superficie Σ (Figura 3.1). La carica q contenuta dentro la porzione di strato che corrisponde alla superficie S presa su Σ è data da

$$q = \int_S \int_h \rho \, dS \, dh = \int_S \left(\int_h \rho \, dh \right) dS = \int_S \rho_s \, dS \tag{3.1}$$

dove

$$\rho_s = \int_h \rho \, dh \tag{3.2}$$

Sia ABCD una sezione trasversale dello strato, corrispondente a una generica linea Λ presa su Σ (Figura 3.1). L'intensità della corrente fluente attraverso ABCD è data da:

$$i = \int_\Lambda \int_h \mathbf{J} \cdot \mathbf{m} \, d\Lambda \, dh = \int_\Lambda \left(\int_h \mathbf{J} \, dh \right) \cdot \mathbf{m} \, d\Lambda = \int_\Lambda \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{m} \, d\Lambda \tag{3.3}$$

dove **m** (versore tangente a Σ e perpendicolare a Λ) definisce il verso positivo della corrente e inoltre

$$\mathbf{J}_s = \int_h \mathbf{J} \, dh \tag{3.4}$$

---

1 Si ricorda che, oltre alle correnti di conduzione, esistono anche le cosiddette correnti di convezione, che sono dovute al moto di cariche macroscopiche. Come è noto dalla Fisica, la densità di queste correnti è data da $\mathbf{J} = \rho\mathbf{U}$, dove **U** rappresenta la velocità delle cariche. Un esempio di corrente di convezione è costituito da un fascio di elettroni che si muove nel vuoto. In questo corso si suppone che le correnti di convezione siano impresse. Bisogna però osservare che in alcuni problemi anche le correnti di convezione possono essere ignote. In questo caso è necessario studiare assieme al campo anche il moto delle cariche che, a sua volta, è influenzato dalle forze elettromagnetiche. Un simile problema richiede di introdurre l'espressione della forza elettromagnetica che il campo esercita sulle cariche (forza di Lorentz) e associare alle equazioni del campo anche le equazioni della meccanica. La soluzione di problemi così complicati esula dai limiti imposti a questa trattazione.

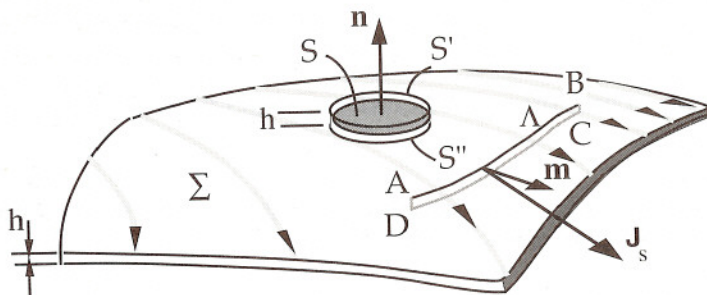



Figura 3.1

Se h è tanto piccolo da essere irrilevante dal punto di vista macroscopico, è matematicamente conveniente assimilare lo strato a una *"lamina"* di spessore infinitesimo, assumendo quindi che la carica q sia concentrata sulla superficie S e che la corrente i fluisca attraverso la linea Λ. Si osservi che, nel passaggio al limite implicito nella definizione della lamina, devono essere preservati i corretti valori di q e di i. Questo richiede che le quantità ρ_s e $\mathbf{J}_s$ - e quindi gli integrali (3.2) e (3.4) - siano indipendenti da h, cosa che è possibile se si assume che, al tendere di h a zero, le densità ρ e **J** divergano come 1/h. Al limite, dunque, ρ e **J** dovrebbero essere nulle fuori dalla lamina e infinitamente intense sulla lamina. Un simile andamento non è descrivibile mediante una normale funzione, e richiederebbe di rappresentare ρ e **J** mediante una "distribuzione" del tipo della delta di Dirac. Ciò è possibile ma comporta di svolgere la teoria dell'elettromagnetismo nello spazio delle distribuzioni invece che in quello delle comuni funzioni. Volendo evitare l'uso di concetti matematici più avanzati di quelli dell'analisi classica, bisogna rinunziare a definire le cariche e le correnti superficiali mediante ρ e **J**, utilizzando una descrizione "ad hoc" basata sulle le densità ρ_s *(densità della carica superficiale* [C/m²]) e $\mathbf{J}_s$ *(densità della corrente superficiale* [A/m]).

Come si vedrà immediatamente, l'analogo dell'equazione di continuità nel caso di una lamina è rappresentato dalla seguente espressione:

$$\left(\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-\right)\cdot\mathbf{n} + \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \qquad (3.5)$$

dove (vedi Figura 3.2) **n** è il versore normale alla lamina (orientato arbitrariamente), $\mathbf{J}_+$ e $\mathbf{J}_-$ sono le densità di corrente eventualmente esistenti nel mezzo intorno alla lamina, prese a ridosso di essa dalla parte di **n** e dalla parte opposta rispettivamente e, infine, $\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s$ indica la "divergenza superficiale" di $\mathbf{J}_s$, definita da:

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \int_{\mathbf{C}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{m}\, dC$$

(S è una porzione di Σ contenente il punto in cui si calcola la divergenza, C è il contorno di S, **m** è il versore normale a C, tangente a Σ e orientato nel verso uscente da S).[1] Nella (3.5) il termine $(\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) \cdot \mathbf{n}$ rappresenta la possibile discontinuità della componente normale di **J** attraverso la lamina. Si osserva che a tale discontinuità si associa una carica superficiale, anche nel caso in cui $\mathbf{J}_s = 0$. Quando le correnti nel mezzo intorno alla lamina sono nulle la (3.5) si riduce all'analogo bidimensionale dell'equazione di continuità.

■ DIMOSTRAZIONE DELLA (3.5) Applicando la legge di conservazione della carica (1.5) al cilindretto di altezza infinitesima indicato in Figura 3.2 e osservando che l'unico contributo finito alla carica è quello che deriva dalla lamina si ha:

$$\int_{S_+} \mathbf{J}_+ \cdot \mathbf{n}\, dS_+ + \int_{S_-} \mathbf{J}_- \cdot (-\mathbf{n})\, dS_- + \int_C \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{m}\, dC = -\int_S \frac{\partial \rho_s}{\partial t} ds$$

Le superfici S_+ e S_- sono infinitamente vicine a S, così che gli integrali su tali superfici equivalgono ad integrali su S. La (3.5) viene ottenuta dividendo per S, passando al limite per $S \to 0$ e osservando che

$$\lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \int_{S_\pm} \mathbf{J}_\pm \cdot (\pm \mathbf{n})\, dS_\pm = \mathbf{J}_\pm \cdot (\pm \mathbf{n}) \qquad \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \int_S \frac{\partial \rho_s}{\partial t} dS = \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

■

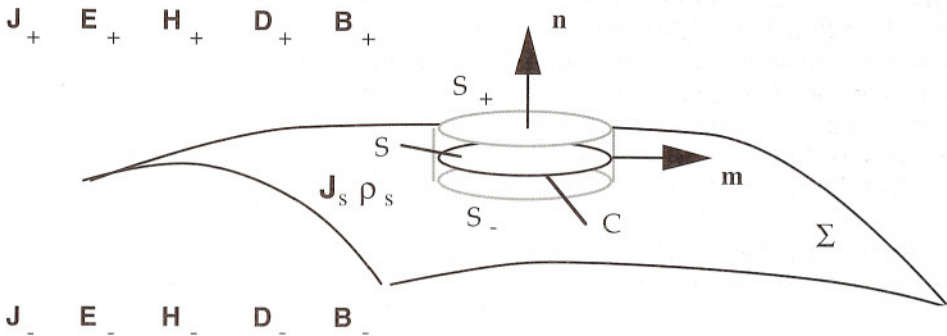



Figura 3.2

1 Considerando un sistema di coordinate ortogonali ξ, η sulla superficie Σ, si mostra facilmente che

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = \frac{\partial J_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta}$$

dove J_ξ e J_η sono le componenti di $\mathbf{J}_s$. La precedente relazione è analoga a quella che serve a calcolare la divergenza in tre dimensioni.

Come si vedrà fra poco i vettori del campo sono discontinui attraverso le lamine. Però le lamine non costituiscono le uniche superfici di discontinuità: infatti, come si è già ricordato, i vettori del campo sono generalmente discontinui anche attraverso le superfici di discontinuità del mezzo.

La successiva dimostrazione permette di concludere che, per essere congruenti con le equazioni di Maxwell, le discontinuità sono soggette ad alcuni vincoli. Considerata una superficie di discontinuità Σ (Figura 3.2), coincidente con una lamina e/o con l'interfaccia fra mezzi diversi, si trova:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{J}_s \tag{3.6a}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0 \tag{3.6b}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \rho_s \tag{3.6c}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0 \tag{3.6d}$$

dove i pedici + e - hanno il solito significato. Si noti che i vettori $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-)$ e $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-)$ rappresentano la discontinuità del campo elettrico e del campo magnetico tangenziali a Σ (a parte una rotazione di 90° sul piano tangente), mentre $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-)$ e $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-)$ rappresentano le discontinuità delle componenti normali dello spostamento elettrico e dell'induzione magnetica. Le (3.6*b*, *d*) indicano che la componente tangenziale di $\mathbf{E}$ e la componente normale di $\mathbf{B}$ sono in ogni caso continue, cosicché le discontinuità del campo elettrico può riguardare solo la componente normale mentre quella dell'induzione può riguardare solo la componente tangenziale. Le (3.6*a*, *c*) indicano invece che le discontinuità della componente tangenziale di $\mathbf{H}$ e della componente normale di $\mathbf{D}$ esistono solo in presenza di lamine di corrente e di carica rispettivamente.

Le (3.6) presuppongono che la superficie Σ sia stazionaria. È opportuno notare che, in caso contrario, esse devono esser modificate con l'aggiunta di termini che dipendono dalla velocità della superficie. Si omette ogni ulteriore discussione su questo punto, poiché ci si limita a considerare mezzi e lamine immobili.

Le (3.6) sostituiscono le equazioni di Maxwell in corrispondenza delle superfici di discontinuità del campo. Esse devono essere considerate assieme alle equazioni di Maxwell e alle relazioni costitutive, nei problemi in cui il mezzo è discontinuo, ovvero nei problemi in cui intervengono lamine di carica e di corrente.

■ DIMOSTRAZIONE DELLE (3.6) Applicando la (1.2*a*) al cilindretto di Figura 3.2 si ottiene:

$$\int_{S_+} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_+ \, dS_+ + \int_{S_-} (-\mathbf{n}) \times \mathbf{H}_- \, dS_- + \int_C \int_h \mathbf{m} \times \mathbf{H} \, dC \, dh =$$

$$\frac{d}{dt} \int_S \int_h \mathbf{D} \, dS \, dh + \int_S \int_h \mathbf{J} \, dS \, dh + \int_S \mathbf{J}_s \, dS = \int_S \int_h \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dS \, dh + \int_S \int_h \mathbf{J} \, dS \, dh + \int_S \mathbf{J}_s \, dS$$

Quando h tende a zero, trascurando tutti i termini che tendono a zero con h, si ha:

$$\int_{S_+} \mathbf{n}\times\mathbf{H}_+ \, dS_+ + \int_{S_-} (-\mathbf{n})\times\mathbf{H}_- \, dS_- = \int_S \mathbf{J}_s \, dS$$

Infine, dividendo per S e passando al limite per $S \to 0$ si ottiene la (3.6*a*). In maniera analoga, partendo dalla (1.2*b*) si ottiene la (3.6*b*).

Partendo dalla (1.2*c*) si ha invece:

$$\int_{S_+} \mathbf{D}_+ \cdot \mathbf{n} \, dS_+ + \int_{S_-} \mathbf{D}_- \cdot (-\mathbf{n}) \, dS_- = \int_S \rho_s \, dS$$

da cui si ottiene la (3.6*c*). Analogamente, partendo dalla (1.2*d*) si ricava la (3.6*d*). ■

1.4 Conservazione dell'energia

A causa del lavoro compiuto dalle forze elettromagnetiche le cariche in moto possono acquistare o perdere energia. È conveniente assumere che l'energia acquistata o ceduta dalle cariche sia scambiata con il campo elettromagnetico, attribuendo al campo la proprietà di immagazzinare energia (*energia elettromagnetica*). Questo concetto è fondato su una relazione che discende dalle equazioni di Maxwell, nota come "teorema di Poynting".

Moltiplicando scalarmente le (1.1*a, b*) per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ rispettivamente e sottraendo le relazioni così ottenute si ha:

$$\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Considerando l'identità (A.27) si ottiene:

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.1}$$

dove $\mathbf{S}$ è il cosiddetto "vettore di Poynting":

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad [\mathrm{W/m^2}]$$

Essendo stata dedotta dalle equazioni di Maxwell in forma differenziale, la (4.1) vale in tutti i punti di qualsiasi regione V in cui il mezzo è continuo, e in cui non esistono lamine di carica e di corrente (Figura. 4.1*a*). Integrando entrambi i membri in V e applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_{S_V} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n} \, dS_V = -\int_V \left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV \tag{4.2}$$

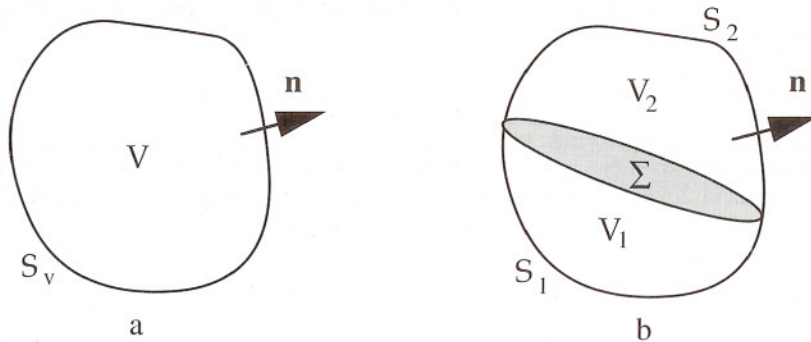



Figura 4.1

È facile verificare che sulle superfici di discontinuità del campo il vettore di Poynting soddisfa la relazione

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{S}_{+} - \mathbf{S}_{-}) = -\mathbf{E}_{T} \cdot \mathbf{J}_{s} \tag{4.3}$$

dove $\mathbf{E}_T$ rappresenta il campo elettrico tangenziale (che è continuo). La precedente relazione, valida nel caso di superfici stazionarie, viene ottenuta immediatamente moltiplicando scalarmente per $\mathbf{E}_T$ i due membri della (3.6*a*) e sfruttando le proprietà del prodotto misto. Grazie ad essa è possibile generalizzare la (4.2), in modo da includere il caso in cui il volume V intercetta una superficie di discontinuità Σ (Figura 4.1*b*). Infatti, scrivendo la (4.2) nei volumi V_1 e V_2, sommando membro a membro e usando la (4.3) si ottiene immediatamente:

$$\int_{S_V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\, dS_V = -\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV - \int_{\Sigma} \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{J}_s \, d\Sigma \tag{4.4}$$

In assenza di lamine di corrente la (4.4) si riduce alla (4.2), che quindi è valida anche in un mezzo discontinuo, purché immobile. La (4.4) costituisce un'ovvia generalizzazione della (4.2), poiché essa tiene conto dell'eventuale presenza di una corrente concentrata mediante l'integrale su Σ, che è chiaramente analogo all'integrale di volume di $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$. Naturalmente la (4.4) vale anche in presenza di più lamine, pur di considerare Σ come l'unione di tutte le porzioni di lamina intercettate da V.

La (4.2) (e la sua generalizzazione (4.4)) esprime il teorema di Poynting. Essa rappresenta un bilancio energetico, come risulta dai seguenti esempi.

ESEMPIO 1: BILANCIO ENERGETICO NEL VUOTO Si consideri il caso in cui la regione V è presa nel vuoto, e si supponga che essa sia attraversata da un fascio di cariche di densità ρ e di velocità $\mathbf{U}$. Come è noto le cariche in moto determinano una densità di corrente di convezione:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{U}$$

L'esperienza insegna che le cariche in moto sono soggette alla forza di Lorentz; precisamente, la forza agente sulle cariche che attraversano un generico elemento di volume dV è data da:

$$\mathrm{dF} = \rho\,(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})\,\mathrm{dV} \qquad \textit{(legge della forza di Lorentz)}$$

Tale forza compie un lavoro che si traduce in una variazione dell'energia cinetica delle particelle. Poiché $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$ è perpendicolare alla velocità, l'energia acquistata nell'unità di tempo dalle particelle contenute nell'elemento dV è data da

$$\mathrm{dF} \cdot \mathbf{U} = \rho\,\mathbf{E}\,\mathrm{dV} \cdot \mathbf{U} = \rho\,\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}\,\mathrm{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\,\mathrm{dV}$$

(se $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} < 0$ l'energia viene perduta dalle particelle). Dunque, nella (4.2) la quantità

$$w_0 = -\int_{\mathrm{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\,\mathrm{dV} \qquad [\mathrm{W}]$$

rappresenta l'energia che tutte le particelle presenti nella regione V cedono ($w_0 > 0$) o assorbono ($w_0 < 0$) nell'unità di tempo. L'altro termine al secondo membro della (4.2) può essere trasformato osservando che

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathrm{t}} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathrm{t}} =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2}\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right)$$

Si può quindi porre:

$$\int_{\mathrm{V}} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}\right) \mathrm{dV} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}}$$

dove:

$$u = \int_{\mathbf{V}} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) \mathrm{dV} \qquad [\mathrm{J}] \tag{4.5}$$

Pertanto la (4.2) assume la forma:

$$w_0 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}} + \int_{\mathrm{S_v}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{dS_v} \tag{4.6}$$

Questa relazione può essere interpretata come un bilancio energetico, se si assume che u rappresenti l'energia elettromagnetica contenuta nella regione V e se si suppone che il flusso del vettore di Poynting rappresenti la potenza elettromagnetica trasferita

all'esterno. Così, infatti, la precedente relazione indica che una parte dell'energia ceduta dalle particelle si ritrova sotto forma di incremento di energia elettromagnetica nella regione considerata e che la rimanente parte compensa l'energia elettromagnetica che abbandona la regione stessa. Naturalmente, se il flusso di **S** è negativo, l'energia viene trasferita dall'esterno all'interno della regione e contribuisce all'incremento di u, assieme alla potenza ceduta dalle particelle. Questa interpretazione permette di estendere ai fenomeni elettromagnetici il principio di conservazione dell'energia.

Secondo la (4.5) l'energia elettromagnetica è distribuita nel vuoto con la densità:

$$U = \frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \qquad [\mathrm{J/m^3}] \tag{4.7}$$

ESEMPIO 2: BILANCIO ENERGETICO IN UN CONDUTTORE ATTRAVERSATO DA CORRENTE CONTINUA Si supponga che la regione V contenga un materiale conduttore lineare isotropo, e che il campo sia stazionario. Essendo valida la legge di Ohm ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) si ha:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}{\sigma} = \frac{J^2}{\sigma} \qquad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Pertanto la (4.2) assume la forma:

$$-\int_{S_v} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dS_v = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV \tag{4.8}$$

L'esperienza mostra che l'integrale di volume rappresenta la potenza termica sviluppata per effetto Joule. Poiché si considera un situazione stazionaria, la temperatura è costante e quindi il calore generato viene integralmente trasmesso all'esterno di V. Esso deve essere bilanciato da un equivalente apporto energetico proveniente dall'esterno. Tale apporto può essere solo di tipo elettromagnetico, dato che l'ipotesi di immobilità e stazionarietà del mezzo esclude ogni altro contributo (meccanico, chimico, ecc.). Per questa ragione l'integrale al primo membro della precedente relazione deve rappresentare la potenza elettromagnetica trasferita attraverso il campo al materiale conduttore incluso nella regione V. Dunque, anche in questo esempio, il flusso del vettore di Poynting rappresenta la potenza elettromagnetica scambiata fra l'interno e l'esterno della regione considerata.

ESEMPIO 3: BILANCIO ENERGETICO IN UN DIELETTRICO ISOTROPO SENZA MEMORIA Se la regione V contiene un dielettrico lineare, stazionario, isotropo e se il campo varia con lentezza tale da permettere di trascurare la memoria, si ha

$$\mathbf{J} = 0 \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

Quindi:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}{2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \qquad \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 \mu_r H^2}{2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}$$

Pertanto la (4.2) diviene:

$$\int_{S_v} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,dS_v = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}dV$$

La stazionarietà del mezzo presuppone che lo stato di deformazione e la temperatura del materiale siano costanti nel tempo, cosicché la variazione dell'energia immagazzinata nella regione è dovuta esclusivamente allo scambio di energia elettromagnetica con l'esterno. Dunque, assumendo che il flusso del vettore di Poynting rappresenti sempre la potenza elettromagnetica uscente dalla regione considerata, si deduce che l'integrale di volume rappresenta l'energia elettromagnetica immagazzinata nella regione V. In questo caso la densità dell'energia elettromagnetica è:

$$U = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu_r H^2}{2} \tag{4.9}$$

I contributi

$$U_e = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2} \qquad U_m = \frac{\mu_0\mu_r H^2}{2}$$

vengono detti densità di *energia elettrica* e di *energia magnetica* rispettivamente.

I precedenti esempi hanno mostrato che la (4.2) rappresenta un bilancio energetico che va chiarito caso per caso, dopo aver introdotto le relazioni costitutive del mezzo. Si è visto però che, in ogni caso, il flusso del vettore di Poynting uscente da una superficie chiusa è da interpretare come la potenza elettromagnetica che esce dalla zona racchiusa dalla superficie stessa. Poiché la potenza ha la forma di un flusso, appare spontaneo ipotizzare che nello spazio abbia luogo un trasporto di energia elettromagnetica e che la densità della potenza trasportata sia proprio rappresentata dal vettore di Poynting. Attribuendo questo significato a $\mathbf{S}$, la potenza w transitante nel verso positivo attraverso *qualsiasi* superficie orientata S, non necessariamente chiusa, è data da:[1]

$$w = \int_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{4.10}$$

1 In realtà, estrapolare la (4.10) dall'analoga relazione valida per una superficie chiusa è arbitrario. In effetti il fatto che la potenza uscente attraverso una superficie chiusa sia data dal flusso del vettore di Poynting autorizza solo a dire che la potenza fluente attraverso una superficie generica deve essere del tipo

$\int_S \mathbf{S}'\cdot\mathbf{n}\,dS$ dove $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$ + *vettore solenoidale indeterminato.*

Infatti anche quest'espressione fornisce il corretto valore della potenza quando la superficie S è chiusa, dato che il flusso di un vettore solenoidale attraverso una superficie chiusa è identicamente nullo. Ciò nonostante l'ipotesi che la densità di potenza sia proprio rappresentata dal vettore di Poynting è accettata, non essendo in contrasto con alcun fatto sperimentale.

1.5 Regime sinusoidale

Le equazioni di Maxwell e le (3.6) sono lineari e invarianti nel tempo, così come le relazioni costitutive dei mezzi lineari e stazionari. Relazioni di questo genere possono essere soddisfatte da campi che oscillano con legge sinusoidale (campi "monocromatici"). La frequenza delle oscillazioni è dettata dalle correnti impresse, che si suppone siano pure sinusoidali, con pulsazione ω indipendente dalla posizione.[1]

L'interesse per i campi monocromatici deriva in primo luogo dal fatto che nella maggior parte delle applicazioni delle onde (radiocomunicazioni, radar, apparati ottici che utilizzano luce generata da laser) i campi sono monocromatici, almeno approssimativamente; in secondo luogo dal fatto che, attraverso l'uso della serie o dell'integrale di Fourier (vedi Appendice F), lo studio dei campi non monocromatici - periodici o aperiodici - può essere tradotto in quello delle componenti spettrali, ciascuna delle quali oscilla con legge sinusoidale.

Come nella teoria dei circuiti, anche nella teoria delle onde è conveniente rappresentare le grandezze sinusoidali mediante quantità complesse. Un generico campo vettoriale monocromatico V, espresso attraverso le sue componenti cartesiane, ha la seguente forma:

$$\mathsf{V} = \mathbf{u}_x V_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x) + \mathbf{u}_y V_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y) + \mathbf{u}_z V_{0z} \cos(\omega t + \varphi_z)$$

La pulsazione ω è identica in ogni punto, mentre le ampiezze e le fasi delle componenti sono generalmente funzioni della posizione. La precedente espressione può anche essere scritta come segue:

$$\mathsf{V} = \mathrm{Re}\left[(\mathbf{u}_x V_{0x} e^{j\varphi_x} + \mathbf{u}_y V_{0y} e^{j\varphi_y} + \mathbf{u}_z V_{0z} e^{j\varphi_z}) e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\mathbf{V} e^{j\omega t}\right]$$

dove $\mathbf{V}$ è un vettore a componenti complesse, date da:

$$V_x = V_{0x} e^{j\varphi_x}, \quad V_y = V_{0y} e^{j\varphi_y}, \quad V_z = V_{0z} e^{j\varphi_z}$$

Quantità complesse di questo tipo vengono dette *fasori*. I vettori a componenti complesse (come $\mathbf{V}$) prendono il nome di *fasori vettoriali*. Fissata la frequenza, esiste una corrispondenza biunivoca fra campi monocromatici e fasori, poiché i moduli e gli argomenti delle componenti dei fasori coincidono con le ampiezze e le fasi delle componenti dei vettori reali. Naturalmente la rappresentazione mediante fasori è anche possibile per i campi monocromatici di tipo scalare, come ad esempio la densità di carica (*fasori scalari*).

Introdotti i fasori $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{J}_s, \tilde{\rho}, \tilde{\rho}_s$ corrispondenti a $\mathsf{E}, \mathsf{H}, \mathsf{D}, \mathsf{B}, \mathsf{J}, \mathsf{J}_s, \rho, \rho_s$ è facile dedurre dalle equazioni che collegano le grandezze elettromagnetiche reali le corrispon-

1 I campi generati da sorgenti sinusoidali agenti in un mezzo non-lineare e/o non-stazionario non sono monocromatici. Se il mezzo è stazionario ma non-lineare il campo oscilla con lo stesso periodo delle sorgenti, ma il suo andamento non è sinusoidale (generazione di armoniche); se il mezzo non è stazionario le variazioni del campo sono generalmente aperiodiche.

denti equazioni che collegano i fasori. Ad esempio, in regime sinusoidale, l'equazione di Maxwell (1.1*b*) può essere scritta come segue:

$$\nabla \times \mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\, e^{j\omega t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left(\mathbf{B}\, e^{j\omega t}\right)$$

ovvero

$$\mathrm{Re}\left[(\nabla \times \mathbf{E}) e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(-j\omega\, \mathbf{B})\, e^{j\omega t}\right]$$

Questa relazione fornisce l'equazione cercata, dato che essa implica:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\, \mathbf{B}$$

Seguendo questo stesso procedimento si vede che le equazioni di Maxwell, le condizioni sulle superfici di discontinuità, le relazioni costitutive e l'equazione di continuità possono immediatamente essere tradotte in termini complessi, sostituendo i simboli dei fasori a quelli delle grandezze sinusoidali e sostituendo l'operatore di derivata temporale con la moltiplicazione per $j\omega$. Così si ottengono le seguenti equazioni, in cui non appare più la variabile temporale:

EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\, \mathbf{D} + \mathbf{J} \qquad (5.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\, \mathbf{B} \qquad (5.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \tilde{\rho} \qquad (5.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (5.1d)$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\tilde{\rho} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{j\omega} \qquad (5.2)$$

CONDIZIONI SULLE SUPERFICI DI DISCONTINUITÀ

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-\right) = \mathbf{J}_s \qquad (5.3a)$$

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-\right) = 0 \qquad (5.3b)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-\right) = \tilde{\rho}_s \qquad (5.3c)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-\right) = 0 \qquad (5.3d)$$

$$\tilde{\rho}_s = -\frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) + \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s}{j\omega} \tag{5.3e}$$

RELAZIONI COSTITUTIVE

Nel caso dei mezzi isotropi (vedi Equazione 2.5) si ha:

$$[d_m\,(j\omega)^m + (j\omega)^{m-1}d_{m-1} + \ldots + j\omega\, d_1 + d_0]\,\mathbf{D}$$
$$= \varepsilon_o\,[(j\omega)^n\, e_n + (j\omega)^{n-1}e_{n-1} + \ldots + j\omega\, e_1 + e_0]\,\mathbf{E} \tag{5.4a}$$

$$[b_m(j\omega)^m + (j\omega)^{m-1}b_{m-1} + \ldots + j\omega\, b_1 + b_0]\,\mathbf{B}$$
$$= \mu_0\,[(j\omega)^n\, m_n + (j\omega)^{n-1}m_{n-1} + \ldots + j\omega\, m_1 + m_0]\,\mathbf{H} \tag{5.4b}$$

$$[g_m(j\omega)^m + (j\omega)^{m-1}g_{m-1} + \ldots + j\omega\, g_1 + g_0\,]\,\mathbf{J}_c$$
$$= [(j\omega)^n\, s_n + (j\omega)^{n-1}s_{n-1} + \ldots + j\omega\, s_1 + s_0]\,\mathbf{E} \tag{5.4c}$$

Nell'ultima relazione si è usato il simbolo $\mathbf{J}_c$ invece di $\mathbf{J}$, per evidenziare il fatto che la relazione costitutiva riguarda le sole correnti di conduzione (incognite).

Le relazioni costitutive dei mezzi anisotropi si trasformano in espressioni analoghe alle precedenti, in cui però i coefficienti sono generalmente tensoriali.

La (5.2) e la (5.3*e*) mostrano che nei campi monocromatici le densità di carica sono completamente determinate se sono note le densità di corrente. Per questa ragione, nello studio dei campi monocromatici, le densità di carica sono incognite di secondaria importanza e raramente vengono prese in considerazione esplicitamente.

L'introduzione dei fasori permette di semplificare notevolmente lo studio dei campi monocromatici, grazie al fatto che le relazioni costitutive dei mezzi con memoria si traducono in semplici relazioni algebriche.

Tali relazioni permettono di esprimere tre dei vettori **E**, **D**, **H**, **B**, $\mathbf{J}_c$ in funzione degli altri due, cosa che consente di ridurre il numero dei campi incogniti da cinque a due. È conveniente eliminare dalle equazioni i vettori **D**, **B**, $\mathbf{J}_c$, sia perché il vettore di Poynting dipende da **E** e **H**, sia perché le equazioni così ottenute presentano certe simmetrie, la cui utilità diverrà evidente nel Capitolo 7 (dualità).

CASO DEI MEZZI ISOTROPI Ricavando **D**, **B** e $\mathbf{J}_c$ dalle (5.4) si ottiene immediatamente:

$$\mathbf{D} + \mathbf{J}_c/j\omega = \varepsilon\mathbf{E} \tag{5.5a}$$

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} \tag{5.5b}$$

dove:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{(j\omega)^n e_n + (j\omega)^{n-1} e_{n-1} + \ldots + j\omega e_1 + e_0}{(j\omega)^m d_m + (j\omega)^{m-1} d_{m-1} + \ldots + j\omega d_1 + d_0} + \frac{1}{j\omega} \frac{(j\omega)^n s_n + (j\omega)^{n-1} s_{n-1} + \ldots + j\omega s_1 + s_0}{(j\omega)^m g_m + (j\omega)^{m-1} g_{m-1} + \ldots + j\omega g_1 + g_0} \tag{5.6a}$$

$$\mu = \mu_0 \frac{(j\omega)^n m_n + (j\omega)^{n-1} m_{n-1} + \ldots + j\omega m_1 + m_0}{(j\omega)^m b_m + (j\omega)^{m-1} b_{m-1} + \ldots + j\omega b_1 + b_0} \tag{5.6b}$$

Supponendo che, in generale, oltre alle correnti di conduzione incognite siano presenti anche correnti impresse (non importa di che natura) e che la densità di queste ultime correnti sia $\mathbf{J}_0$, si ha:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_0$$

$$j\omega\,\mathbf{D} + \mathbf{J} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_0 = j\omega\,(\mathbf{D} + \mathbf{J}_c/j\omega) + \mathbf{J}_0 = j\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E} + \mathbf{J}_0$$

Pertanto dalle (5.1*a, b*) si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \tag{5.7a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\,\mu\,\mathbf{H} \tag{5.7b}$$

Nella teoria dei campi monocromatici queste equazioni sono comunemente dette "equazioni di Maxwell", anche se, in realtà, esse derivano sia dalle equazioni di Maxwell che dalle relazioni costitutive. Unite alle condizioni (5.3*a*, *b*), esse sono sufficienti per determinare **E** e **H**.

Considerando la divergenza di entrambi i membri delle (5.7) si ottengono immediatamente le "equazioni alle divergenze":[1]

$$\nabla \cdot (\varepsilon\,\mathbf{E}) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_0}{j\omega} = \tilde{\rho}_0 \tag{5.8a}$$

$$\nabla \cdot (\mu\,\mathbf{H}) = 0 \tag{5.8b}$$

dove $\tilde{\rho}_o$ indica la densità di carica associata alla sola corrente impressa.

1 La (5.8*a*) può essere anche ricavata partendo dalla Equazione (5.1*c*) e dall'equazione di continuità, utilizzando la prima delle (5.5). È inoltre evidente che la (5.8*b*) può essere ottenuta direttamente dalla (5.1*d*) esprimendo **B** in funzione di **H**. Il fatto che le equazioni alle divergenze possano essere dedotte dalle (5.7) evidenzia che solo le equazioni ai rotori hanno un ruolo fondamentale nello studio dei campi monocromatici.

Infine è facile verificare che le condizioni (5.3*c*, *d*) si traducono nelle equazioni[1]

$$\mathbf{n}\cdot\left(\varepsilon_+\mathbf{E}_+ - \varepsilon_-\mathbf{E}_-\right) = -\frac{\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{J}_{0+} - \mathbf{J}_{0-}\right) + \nabla_s \cdot \mathbf{J}_{0s}}{j\omega} = \tilde{\rho}_{0s} \tag{5.9}$$

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mu_+\mathbf{H}_+ - \mu_-\mathbf{H}_-\right) = 0 \tag{5.10}$$

dove le permeabilità indicate con i pedici + e – sono quelle a ridosso della superficie di discontinuità, dal lato di **n** e dal lato opposto rispettivamente (Figura 5.1). Il simbolo $\tilde{\rho}_{0s}$ indica la densità di carica che appare sulla superficie, sia in conseguenza della discontinuità delle correnti impresse nelle zone adiacenti, sia a causa dell'esistenza di una corrente non solenoidale $\mathbf{J}_{0s}$, impressa sulla superficie stessa.

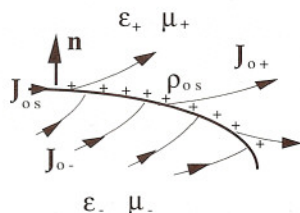



Figura 5.1

I coefficienti ε e μ caratterizzano completamente i mezzi isotropi in regime sinusoidale. Essi prendono il nome di *permeabilità (complesse)*, elettrica e magnetica rispettivamente. Attraverso ε si tiene conto non solo della polarizzabilità elettrica dei materiali ma anche della loro conducibilità.

Le permeabilità dipendono dalla frequenza (con l'ovvia eccezione del vuoto, in cui evidentemente si ha $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$). A bassa frequenza le permeabilità dei materiali isotropi assumono la forma (vedi Equazione 5.6)

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0\varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega} \qquad \mu \approx \mu_0\mu_r \tag{5.11}$$

poiché $e_0/d_0 = \varepsilon_r$, $s_0/g_0 = \sigma$, $m_0/b_0 = \mu_r$.

CASO DEI MEZZI ANISOTROPI Le relazioni costitutive si traducono in relazioni analoghe alle (5.5):

$$(\mathbf{D} + \mathbf{J}_c/j\omega) = \underline{\varepsilon}\cdot\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \underline{\mu}\cdot\mathbf{H} \tag{5.12}$$

dove $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\mu}$ sono tensori a elementi complessi. Eliminando **D** , **B** e $\mathbf{J}_c$ dalle equazioni di Maxwell, si ottengono le seguenti equazioni, analoghe alle (5.7):

$$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\,\underline{\varepsilon}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \tag{5.13a}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\,\underline{\mu}\cdot\mathbf{H} \tag{5.13b}$$

[1] La (5.10) è ottenuta semplicemente sostituendo la (5.5*b*) nella (5.3*d*); la (5.9) viene ricavata sostituendo la (5.3*e*) nella (5.3*c*), separando $\mathbf{J}_0$ da $\mathbf{J}_c$ e utilizzando la (5.5*a*).

Queste equazioni, assieme alle solite condizioni sulle componenti tangenziali di **E** e di **H**, sono sufficienti per determinare il campo nei mezzi anisotropi. Da esse possono essere direttamente dedotte le seguenti equazioni alle divergenze:

$$\nabla\cdot\left(\underline{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}\right)=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}_0}{j\omega}=\tilde{\rho}_0 \tag{5.14a}$$

$$\nabla\cdot\left(\underline{\mu}\cdot\mathbf{H}\right)=0 \tag{5.14b}$$

Inoltre, dalle (5.3*c*, *d*, *e*) si deducono le seguenti relazioni, analoghe alle (5.9) e (5.10):

$$\mathbf{n}\cdot\left(\underline{\varepsilon}_+\cdot\mathbf{E}_+-\underline{\varepsilon}_-\cdot\mathbf{E}_-\right)=-\frac{\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{J}_{0+}-\mathbf{J}_{0-}\right)+\nabla_s\cdot\mathbf{J}_{0s}}{j\omega}=\tilde{\rho}_{0s} \tag{5.15a}$$

$$\mathbf{n}\cdot\left(\underline{\mu}_+\cdot\mathbf{H}_+-\underline{\mu}_-\cdot\mathbf{H}_-\right)=0 \tag{5.15b}$$

I tensori $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\mu}$ prendono il nome di *tensori di permeabilità.*

1.6 Dispersività, spettri elettrici e magnetici dei materiali

I mezzi in cui una o entrambe le permeabilità dipendono dalla frequenza vengono detti "dispersivi", più precisamente "dispersivi nel tempo".[1] La dispersività temporale deriva dagli effetti di memoria e dalla conducibilità. Tutti i materiali sono dispersivi se considerati in bande di frequenza sufficientemente estese. In alcuni casi la dispersività può essere trascurata, se si è interessati allo studio delle onde in bande più o meno ristrette. In questi casi il mezzo viene detto "non dispersivo". L'unico mezzo rigorosamente non dispersivo è il vuoto.

La dispersività di una sostanza isotropa e il campo di frequenza in cui essa può essere ignorata sono evidenziati dall'esame delle funzioni $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$ e $\mu=\mu(\omega)$, dette "spettri", elettrico e magnetico rispettivamente. Si usa porre

$$\varepsilon=\varepsilon_0\,(\varepsilon'-j\varepsilon'')\qquad \mu=\mu_0\,(\mu'-j\mu'') \tag{6.1}$$

dove ε', ε'', μ', μ'' sono quantità reali adimensionali. Gli spettri sono normalmente rappresentati diagrammando tali quantità.

Nel caso delle sostanze anisotrope gli spettri sono costituiti dalle funzioni che rappresentano le componenti dei tensori $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\mu}$ al variare della frequenza. Anche in questo caso si usa porre

$$\underline{\varepsilon}=\varepsilon_0\,(\underline{\varepsilon}'-j\underline{\varepsilon}'')\qquad \underline{\mu}=\mu_0\,(\underline{\mu}'-j\underline{\mu}'') \tag{6.2}$$

1 La ragione di questa denominazione diventerà chiara quando verrà studiata la propagazione delle onde non monocromatiche.

dove $\underline{\varepsilon}'$, $\underline{\varepsilon}''$, $\underline{\mu}'$, $\underline{\mu}''$ sono tensori reali adimensionali. Gli spettri delle sostanze anisotrope rappresentano le componenti di questi tensori in funzione di ω.

Come si vedrà nel prossimo capitolo, i valori di $\underline{\varepsilon}'$, $\underline{\varepsilon}''$, $\underline{\mu}'$, $\underline{\mu}''$ influiscono sulla propagazione e sull'attenuazione delle onde monocromatiche. Per questa ragione gli spettri possono essere ottenuti sperimentalmente in maniera indiretta, effettuando opportune misure sulle onde a varie frequenze.

Un esempio caratteristico di spettro elettrico è quello dell'acqua, rappresentato nella Figura 6.1. Nel diagramma lo spettro è rappresentato in una banda di frequenze molto vasta, estendentesi da 100 MHz fino a frequenze prossime a quelle delle onde luminose.

Sotto 100 MHz ε' si mantiene praticamente costante ($\varepsilon' \approx \varepsilon_r \approx 80$) mentre ε'' scende a valori tanto più piccoli quanto minore è la frequenza. In questo campo di frequenze la dispersività può essere ignorata ponendo $\varepsilon \approx 80\varepsilon_0$. Essa comincia ad essere significativa al disopra di 100 MHz, dove ε'' non è più trascurabile rispetto a ε', e diviene notevole al disopra di qualche gigahertz, dove si hanno forti variazioni di ε' e di ε''. Si nota che intorno a 10 GHz ε' inizia a scendere rapidamente divenendo paragonabile a ε''. Un simile decremento è tipico dei dielettrici polari, di cui l'acqua è uno dei principali esempi. Come è noto, i dielettrici di questo tipo sono costituiti da molecole dipolari il cui orientamento, in condizioni stazionarie, dà luogo a un'intensa polarizzazione. In condizioni dinamiche la polarizzabilità di queste sostanze rimane elevata fin tanto che le variazioni del campo sono così lente da permettere ai dipoli di invertire periodicamente il loro orientamento. Al crescere della frequenza l'inerzia impedisce ai dipoli di ruotare con la necessaria rapidità, così che il meccanismo di polarizzazione per orientamento perde progressivamente importanza; nell'acqua esso cessa in pratica di agire a frequenze dell'ordine di 1000 GHz, quando ε' e ε'' scendono a valori dell'ordine delle unità. Al disopra di queste frequenze la polarizzazione è dovuta sostanzialmente alla sola deformazione indotta dal campo sulle strutture atomiche, effetto che è presente in tutte le sostanze, polari o non-polari.

Nei dielettrici non polari la dispersività diviene importante solo quando la frequenza del campo è dell'ordine delle frequenze di risonanza delle strutture atomiche.[1] Si tratta di frequenze molto alte - normalmente al disopra delle migliaia di gigahertz - nell'intorno delle quali si osservano fluttuazioni più o meno rapide dello spettro (picchi di risonanza). Naturalmente questi effetti esistono anche nei dielettrici polari. La Figura 6.1 evidenzia che nell'acqua essi sono presenti al disopra di qualche migliaio di gigahertz.

Si nota che nell'acqua ε'' tende a scendere fortemente quando ci si avvicina alla regione visibile. Se il diagramma si estendesse fino a tale regione si osserverebbero valori di ε'' molto minori di ε'. Le regioni dello spettro in cui ε'' è trascurabile rispetto a ε' vengono dette "finestre" perché, come si vedrà in seguito, in questo campo di frequenza le onde si propagano con piccola attenuazione. La trasparenza dell'acqua è dovuta all'esistenza di una finestra nella regione visibile.

In base alle loro proprietà magnetiche, i materiali sono suddivisi in diamagnetici, paramagnetici, ferromagnetici e ferrimagnetici. Nei materiali diamagnetici e paramagnetici l'intensità di magnetizzazione è generalmente tanto bassa da poter essere usualmente

1 Secondo la meccanica quantistica tali frequenze corrispondono ai salti quantici fra i livelli energetici degli elettroni atomici.

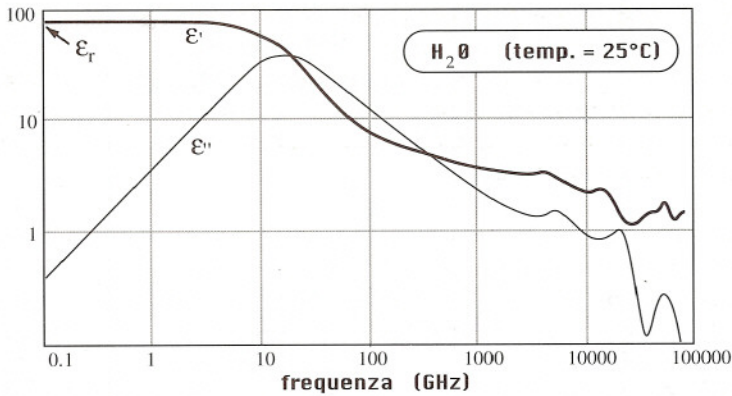



Figura 6.1

trascurata. Per questa ragione tali materiali vengono comunemente detti *non-magnetici* e si assume quasi sempre che per essi valga la relazione $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, come nel vuoto. Nei materiali ferromagnetici e ferrimagnetici, in condizioni stazionarie o di lenta variabilità del campo, l'intensità di magnetizzazione è ingente; per questo, tali materiali vengono detti "magnetici". Esempi ben noti di materiali ferromagnetici sono il ferro e il nichel, che però hanno scarso interesse nelle applicazioni delle onde, a causa dell'elevata conducibilità, che dà luogo a fortissime attenuazioni. Sono ferrimagnetiche le ferriti, materiali ceramici che combinano una bassissima conducibilità ad un'elevata polarizzabilità magnetica e che, per questo, vengono usate nella realizzazione di dispositivi operanti ad alta frequenza.

I materiali magnetici sono fortemente non lineari e la relazione fra $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{H}$ è caratterizzata dal fenomeno dell'isteresi. Essi possono essere considerati approssimativamente lineari solo se l'intensità del campo magnetico è abbastanza piccola. Solo a questa condizione tali materiali possono essere caratterizzati mediante la permeabilità magnetica μ. La Figura 6.2 rappresenta lo spettro magnetico di una ferrite al nichel (ossido di nichel-ferro). Si nota che a bassa frequenza la permeabilità è abbastanza elevata, e che essa decresce rapidamente al disopra di 100 MHz. Si ha quindi un comportamento in qualche modo analogo a quello dei dielettrici polari, con la differenza che la dispersività si manifesta a frequenze molto più basse. In realtà i meccanismi di magnetizzazione di un materiale magnetico e quelli di polarizzazione di un dielettrico polare sono totalmente diversi. Si ricorda che l'intensa magnetizzazione dei materiali ferromagnetici è dovuta alla formazione dei "domini" e che le variazioni della magnetizzazione richiedono cambiamenti dell'orientamento e delle dimensioni dei domini stessi. Il decremento della permeabilità a frequenze relativamente basse è dovuto all'inerzia dei domini, che è molto maggiore di quella delle molecole che costituiscono i dielettrici polari. A causa della loro inerzia i domini non sono in grado di mutare con la rapidità richiesta da sollecitazioni elettromagnetiche di frequenza superiore a qualche centinaio di megahertz.[1]

1 Ciò nonostante le ferriti sono di notevole importanza nella tecnica delle microonde. A differenza di quanto avviene a bassa frequenza - dove viene sfruttato l'elevato grado di magnetizzazione raggiungibile - nel campo delle microonde viene sfruttato l'effetto "giromagnetico", che rende anisotropo il comportamento dinamico del materiale quando esso è sottoposto ad un campo magnetostatico.

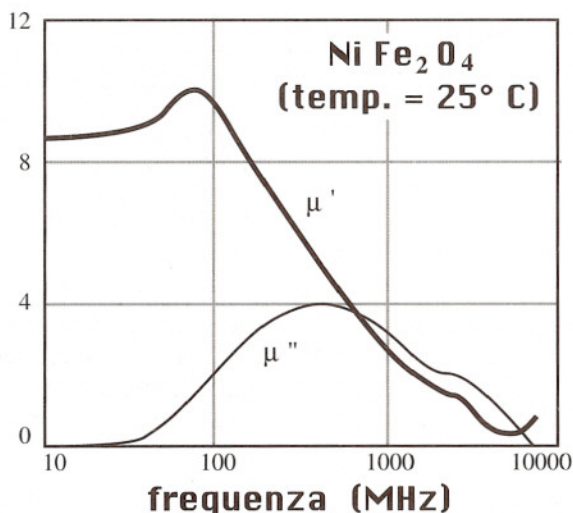



Figura 6.2

I conduttori sono sempre dispersivi. Nei metalli ad alta conducibilità la legge di Ohm ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) vale fino a frequenze molto alte, nella regione delle onde millimetriche e oltre. Si ha quindi:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{(j\omega)^n e_n + (j\omega)^{n-1} e_{n-1} + \ldots + j\omega e_1 + e_0}{(j\omega)^m d_m + (j\omega)^{m-1} d_{m-1} + \ldots + j\omega d_1 + d_0} + \frac{\sigma}{j\omega}$$

I valori della conducibilità di alcuni metalli di uso comune sono riportati nella Tabella 6.1. A causa dei valori elevatissimi della conducibilità, anche a frequenze dell'ordine delle migliaia di gigahertz, l'ultimo termine è molto più importante del precedente (che è dell'ordine di $\varepsilon_0 = 8.86\ 10^{-12}$ F/m). Pertanto, in un vastissimo campo di frequenze si può assumere che nei metalli ad alta conducibilità si abbia:

$$\varepsilon \approx \frac{\sigma}{j\omega} \qquad \varepsilon' \approx 0 \qquad \varepsilon'' \approx \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \tag{6.3}$$

Nei gas ionizzati, costituiti da ioni monovalenti e da elettroni liberi di densità $N_0\,[\mathrm{m}^{-3}]$, sotto opportune condizioni (vedi Appendice B) vale la relazione

$$\mathbf{J}_c = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{j\omega + \nu}\mathbf{E} \tag{6.4}$$

dove

$$\omega_p / 2\pi = 8.97\sqrt{N_0} \qquad [\mathrm{Hz}] \tag{6.5}$$

Tabella 6.1

Materiale	*Conducibilità in S/m (a 20°C)*
Argento	6.289×10^7
Rame	5.714×10^7
Alluminio	$3.3 \times 10^7 - 3.57 \times 10^7$
Bronzo	$4.0 \times 10^7 - 5.5 \times 10^7$

è la cosiddetta "frequenza di plasma" e ν è la "frequenza di collisione" degli elettroni.[1] A causa della bassa densità di molecole le intensità di polarizzazione nei gas (neutri o ionizzati) sono trascurabili e si può porre, almeno in prima approssimazione: $\mathbf{D} \approx \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{H}$. Pertanto dalla (5.5*a*) si ottiene immediatamente:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\nu} \right)$$

Se la frequenza di collisione è molto minore della frequenza di lavoro, il termine contenente ν può essere trascurato (approssimazione del "plasma senza collisioni"). Con questa approssimazione ε diviene reale e si ha:

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \varepsilon'' = 0 \qquad \textit{(plasma freddo senza collisioni)} \qquad (6.6)$$

Nel plasma senza collisioni la permeabilità elettrica è reale, come in un normale dielettrico a bassa frequenza; però essa risulta minore di 1 e - addirittura - diviene negativa al disotto della frequenza di plasma. Quando la frequenza di lavoro supera di molto la frequenza di plasma risulta $\varepsilon' \approx 1$ e quindi il gas ionizzato tende a comportarsi come il vuoto. Ciò è intuitivamente evidente, perché le oscillazioni degli elettroni tendono a divenire tanto meno ampie quanto maggiore è la frequenza del campo che li sollecita.

La presenza di un campo magnetostatico rende anisotropi i materiali, per quanto riguarda il loro comportamento rispetto ai campi monocromatici.[2] I materiali che presentano questo particolare tipo di anisotropia vengono detti "girotropici", ovvero - più precisamente - "giroelettrici" o "giromagnetici", secondo che l'effetto del campo magnetostatico consista nel rendere tensoriale la permeabilità elettrica o quella magnetica. L'origine dell'anisotropia indotta dal campo magnetostatico in un conduttore è intuitivamente evidente, se si pensa che la forza di Lorentz agente sui portatori è nulla quando la corrente è parallela al campo magnetostatico, mentre differisce da zero negli

1 La (6.4) deriva immediatamente dalla relazione che governa la conduzione nel "plasma freddo isotropo" (vedi Equazione B.10), quando si considera il caso monocromatico.

2 L. Landau, E. Lifchitz, *Physique Theorique*, vol. VIII (*Electrodinamique des Milieux continus*, § 76 e § 82) e Vol. V (*Physique statistique*, § 127), Ed. MIR, Moscou.

altri casi e che, quindi, la conduzione dipende dalla direzione. Un esempio di conduttore giroelettrico è costituito dal cosiddetto "magnetoplasma", termine che indica un gas ionizzato reso anisotropo dall'azione di un campo magnetostatico. La conduzione nel magnetoplasma viene studiata nell'Appendice B, ed è governata dall'equazione (B.12). Tale equazione, tradotta in termini complessi, ha la forma

$$(j\omega\,\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{t}}) \cdot \mathbf{J}_c = \varepsilon_0\,\omega_p^2 \mathbf{E} \tag{6.7}$$

dove $\underline{\mathbf{1}}$ indica il tensore unità e $\underline{\mathbf{t}}$ è un tensore dipendente dal campo magnetostatico e dalla frequenza di collisione (vedi Equazione B.11). Se si suppone che il campo magnetostatico abbia l'induzione $\mathbf{B}_0$ *nella direzione dell'asse z*, e se si trascurano le collisioni si ha:

$$j\omega\,\underline{1} + \underline{t} = \begin{bmatrix} j\omega & \omega_c & 0 \\ -\omega_c & j\omega & 0 \\ 0 & 0 & j\omega \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

dove gli elementi della matrice sono le componenti cartesiane del tensore. La pulsazione ω_c coincide con la velocità angolare di un elettrone che compie il moto ciclotronico intorno a $\mathbf{B}_0$. Essa corrisponde alla ben nota "frequenza ciclotronica" che, per gli elettroni, è data da:

$$\omega_c/2\pi \;=\; 2.80 \cdot 10^{10}\, B_0\, [\mathrm{Hz}] \qquad (B_0 \text{ in Wb/m}^2)$$

Dalla (6.7) si ottiene

$$\mathbf{J}_c = \varepsilon_0 \omega_p^2\, (j\omega\,\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{t}}\,)^{-1} \cdot \mathbf{E}$$

e quindi:

$$\mathbf{D} + \mathbf{J}_c/j\omega = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \omega_p^2\, (-\omega^2 \underline{\mathbf{1}} + j\omega \underline{\mathbf{t}}\,)^{-1} \cdot \mathbf{E} =$$

$$\varepsilon_0\, [\underline{\mathbf{1}} + \omega_p^2\, (-\omega^2 \underline{\mathbf{1}} + j\omega \underline{\mathbf{t}}\,)^{-1}] \cdot \mathbf{E}$$

Pertanto, per la prima delle (5.11) risulta

$$\underline{\varepsilon} \;=\; \varepsilon_0\, [\underline{\mathbf{1}} + \omega_p^2\, (-\,\omega^2 \underline{\mathbf{1}} + j\omega \underline{\mathbf{t}}\,)^{-1}]$$

Per trovare le componenti cartesiane di $\underline{\varepsilon}$ bisogna introdurre la (6.8) e svolgere alcuni calcoli sulle matrici. Si ottiene:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_\perp & -jg & 0 \\ jg & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{bmatrix} \qquad \textit{magnetoplasma senza collisioni}\ (\mathbf{B}_0 \textit{ nella direzione } z) \tag{6.9a}$$

dove:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \qquad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad g = \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega\left(\omega^2 - \omega_c^2\right)} \tag{6.9b}$$

Quando la frequenza di lavoro è molto maggiore della frequenza di plasma e della frequenza ciclotronica anche il magnetoplasma tende a comportarsi come il vuoto, ($\underline{\varepsilon} \to \varepsilon_0 \underline{\mathbf{1}}$). È interessante osservare che alcune componenti del tensore tendono all'infinito quando la frequenza di lavoro tende alla frequenza ciclotronica; questo comportamento risulta intuitivamente chiaro se si pensa che un campo che oscilla proprio alla frequenza ciclotronica esercita sugli elettroni una forza che ha lo stesso periodo del moto ciclotronico; per questa ragione si ha un effetto di risonanza che tende ad ampliare le orbite ciclotroniche, dando luogo a correnti sempre più intense. In realtà questo effetto è limitato dalle collisioni: se nella (6.8) si fosse tenuto conto della frequenza di collisione, il tensore di permeabilità elettrica si sarebbe mantenuto finito anche per $\omega = \omega_c$.

1.7 Medie temporali delle grandezze energetiche nei campi monocromatici

Nel caso dei campi monocromatici interessa principalmente conoscere le medie temporali delle grandezze energetiche in gioco. Infatti gli effetti osservabili degli scambi energetici sono spesso collegati ai valori medi piuttosto che ai valori istantanei. Ad esempio, la distribuzione di temperatura in un corpo dipende dalla densità media della potenza dissipata e non dalla densità istantanea, perché in genere il periodo delle oscillazioni elettromagnetiche è brevissimo rispetto alle costanti di tempo termiche.

Nel Paragrafo 4 si è visto che tutte le grandezze energetiche dipendono da prodotti (scalari o vettoriali) dei vettori del campo i quali, nei campi monocromatici, sono generalmente rappresentati dai corrispondenti fasori. A causa dell'interesse per i valori medi delle grandezze energetiche è quindi opportuno vedere, innanzi tutto, come i valori medi dei prodotti di vettori sinusoidali possano essere espressi direttamente attraverso i fasori.

Siano F e G due generici vettori sinusoidali di uguale frequenza, rappresentati dai fasori $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$. Siano $\mathbf{F}^*$ e $\mathbf{G}^*$ i fasori coniugati, cioè i fasori che hanno come componenti i coniugati delle componenti di $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$. Si ha:

$$\mathsf{F} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{F}\,e^{j\omega t}\right] = \frac{\mathbf{F}\,e^{j\omega t} + \mathbf{F}^*\,e^{-j\omega t}}{2} \qquad \mathsf{G} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{G}\,e^{j\omega t}\right] = \frac{\mathbf{G}\,e^{j\omega t} + \mathbf{G}^*\,e^{-j\omega t}}{2}$$

e quindi:

$$\mathsf{F}\cdot\mathsf{G} = \frac{\mathbf{F}\,e^{j\omega t} + \mathbf{F}^*\,e^{-j\omega t}}{2}\cdot\frac{\mathbf{G}\,e^{j\omega t} + \mathbf{G}^*\,e^{-j\omega t}}{2} = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^* + \mathbf{F}^*\cdot\mathbf{G}}{4} +$$

$$+\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\,e^{j2\omega t}+\mathbf{F}^{*}\cdot\mathbf{G}^{*}\,e^{-j2\omega t}}{4}=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^{*}}{2}\right]+\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}}{2}e^{j2\omega t}\right]$$

L'ultimo termine è una grandezza sinusoidale di pulsazione 2ω e ha valore medio nullo; pertanto il valore medio del prodotto scalare è:

$$<\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}>=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^{*}}{2}\right] \tag{7.1}$$

In particolare si ha

$$<F^{2}>=<\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}>=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{*}}{2}=\frac{|\mathbf{F}|^{2}}{2} \tag{7.2}$$

dove $|\mathbf{F}|$ rappresenta il "modulo" di $\mathbf{F}$, definito dalla quantità reale positiva:

$$|\mathbf{F}|=\sqrt{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{*}}=\sqrt{|F_x|^2+|F_y|^2+|F_z|^2}$$

(il significato del modulo dei fasori vettoriali sarà visto nel Paragrafo 10). Ad esempio la densità media dell'energia elettromagnetica nel vuoto è:

$$<\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}+\frac{\mu_0 H^2}{2}>=\frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{4}+\frac{\mu_0 |\mathbf{H}|^2}{4}$$

Analogamente, considerando il prodotto vettoriale $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ si trova:

$$<\mathbf{F}\times\mathbf{G}>=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{G}^{*}}{2}\right] \tag{7.3}$$

Quest'ultima formula permette di calcolare il valore medio del vettore di Poynting, mediante la formula

$$<\mathbf{S}>=<\mathbf{E}\times\mathbf{H}>=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}}{2}\right]$$

Introducendo il "*vettore di Poynting complesso*":

$$\mathbf{S}=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}}{2} \tag{7.4}$$

si ha

$$<\mathbf{S}>=\mathrm{Re}\,\mathbf{S} \tag{7.5}$$

Dunque, *la densità media della potenza elettromagnetica trasmessa in un campo monocromatico è data dalla parte reale del vettore di Poynting complesso.*

Evidentemente il valore medio della potenza elettromagnetica che attraversa una superficie S è dato da:

$$< w >= \int_S \mathrm{Re}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,dS = \mathrm{Re}\int_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{7.6}$$

1.8 Bilancio delle potenze medie nei campi monocromatici

Il bilancio energetico per le potenze medie in un campo monocromatico viene ottenuto mediante un procedimento analogo a quello seguito per giungere alla (4.2).
Se il mezzo contenuto nel volume V è isotropo, utilizzando le (5.7) si ottiene:

$$\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}^* = \mathbf{E}\cdot\left(-j\omega\varepsilon^*\mathbf{E}^* + \mathbf{J}_0^*\right) \qquad \mathbf{H}^*\cdot\nabla\times\mathbf{E} = \mathbf{H}^*\cdot(-j\omega\mu\mathbf{H})$$

dove, al solito, l'asterisco indica il coniugato. Sottraendo, utilizzando l'identità (A.27) e dividendo per 2 si trova:

$$-\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0^*}{2} = 2j\omega\left(\frac{\mu|\mathbf{H}|^2}{4} - \frac{\varepsilon^*|\mathbf{E}|^2}{4}\right) + \nabla\cdot\mathbf{S} \tag{8.1}$$

Integrando in V e applicando il teorema della divergenza si ottiene:[1]

$$-\int_V \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0^*}{2}dV = \int_V 2j\omega\left(\frac{\mu|\mathbf{H}|^2}{4} - \frac{\varepsilon^*|\mathbf{E}|^2}{4}\right)dV + \int_{S_v}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,dS_v$$

Ponendo $\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon' - j\varepsilon'')$, $\mu = \mu_0(\mu' - j\mu'')$ si ha:

$$-\int_V \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0^*}{2}dV = w_{diss} + 2j\omega\left(u_m - u_e\right) + \int_{S_v}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,dS_v \tag{8.2}$$

dove:

$$w_{diss} = \omega\int_V\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon''|\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{\mu_0\mu''|\mathbf{H}|^2}{2}\right)dV$$

1 Come nel caso del teorema di Poynting per i campi istantanei, la relazione ottenuta vale anche in un mezzo discontinuo. Inoltre se esistono lamine di corrente, all'integrale di volume al primo membro deve essere aggiunto un analogo integrale di superficie.

$$u_e = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon' |\mathbf{E}|^2}{4} dV \qquad u_m = \int_V \frac{\mu_0 \mu' |\mathbf{H}|^2}{4} dV$$

Le quantità w_{diss}, u_e, u_m sono reali. Quindi, uguagliando le parti reali e le parti immaginarie, si ha:

$$-\mathrm{Re}\int_V \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0^*}{2} dV = w_{diss} + \mathrm{Re}\int_{S_v} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\, dS_v \tag{8.3a}$$

$$-\mathrm{Im}\int_V \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0^*}{2} dV = 2\omega\left(u_m - u_e\right) + \mathrm{Im}\int_{S_v} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\, dS_v \tag{8.3b}$$

Le (8.3*a*) e (8.3*b*) esprimono il bilancio delle cosiddette "potenze attive" e delle "potenze reattive" rispettivamente. La (8.2) esprime il bilancio delle cosiddette "potenze apparenti".[1]

Il bilancio delle potenze attive si presta a un'immediata interpretazione, poiché esso esprime il bilancio fra i valori medi delle potenze istantanee. Il primo membro della (8.3*a*) rappresenta la potenza media ceduta al campo dalle correnti impresse esistenti all'interno di V; si ha infatti:

$$-\mathrm{Re}\int_V \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0^*}{2} dV = -\int_V \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0^*}{2}\right] dV = -\int_V <\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_0> dV$$

Il bilancio delle potenze attive afferma che la potenza media generata nella regione V uguaglia la somma della potenza media dissipata nella regione stessa (w_{diss}) *e della potenza media trasmessa all'esterno* (parte reale del flusso di **S**).

L'espressione di w_{diss} indica che la *densità media della potenza dissipata* in un mezzo isotropo è

$$W_{diss} = \omega\frac{\varepsilon_0 \varepsilon'' |\mathbf{E}|^2}{2} + \omega\frac{\mu_0 \mu'' |\mathbf{H}|^2}{2} \qquad [\mathrm{W/m^3}] \tag{8.4}$$

Essa consiste di due termini (densità della dissipazione elettrica e della dissipazione magnetica). Ad esempio, nel caso particolare dei metalli non magnetici, la densità di potenza dissipata è quella dovuta all'effetto Joule. Infatti, essendo $\mu'' = 0$, $\varepsilon_0\varepsilon'' = \sigma/\omega$, si ha:

---

1 Come in Elettrotecnica si chiama potenza apparente la quantità complessa che ha come parti reale e immaginaria la potenza attiva e la potenza reattiva.

$$W_{diss} = \frac{\sigma |\mathbf{E}|^2}{2} = \frac{|\mathbf{J}_c|^2}{2\sigma} = < \frac{J_c^2}{\sigma} > \qquad (8.5)$$

Le quantità u_e e u_m che figurano nel bilancio delle potenze reattive sono evidentemente i valori medi degli integrali

$$\int_V \varepsilon_0 \varepsilon' \frac{E^2}{2} dV \qquad \int_V \mu_0 \mu' \frac{H^2}{2} dV$$

Quindi nel vuoto o in un dielettrico non dispersivo (dove $\varepsilon' = \varepsilon_r$, $\mu' = \mu_r$) u_e e u_m rappresentano le energie medie elettriche e magnetiche immagazzinate nella regione V (vedi Equazione 4.9). Inoltre, sempre nel vuoto e nei dielettrici non dispersivi, le quantità

$$U_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon' |\mathbf{E}|^2}{4} \qquad U_m = \frac{\mu_0 \mu' |\mathbf{H}|^2}{4} \qquad [\mathrm{J/m^3}] \qquad (8.6)$$

rappresentano le densità medie di energia elettrica e magnetica rispettivamente. Questa interpretazione non vale se il mezzo è dispersivo. In questo caso le quantità suddette vengono più precisamente dette *pseudo-energie*.

■ Si può mostrare[1] che la densità media dell'energia immagazzinata in un mezzo dispersivo non è $U_e + U_m$ bensì:

$$U = \varepsilon_0 \frac{\partial(\omega\varepsilon')}{\partial\omega} \frac{|\mathbf{E}|^2}{4} + \mu_0 \frac{\partial(\omega\mu')}{\partial\omega} \frac{|\mathbf{H}|^2}{4} \qquad (8.7)$$

È evidente che questa espressione si riduce a $U_e + U_m$ nel caso dei dielettrici non dispersivi.■

I bilanci delle potenze attive e reattive valgono anche nel caso dei mezzi anisotropi e possono essere dimostrate in maniera del tutto analoga partendo dalle (5.13). Si hanno però differenti espressioni delle pseudo-energie e della potenza dissipata. Precisamente la *densità della potenza media dissipata in un mezzo anisotropo* è:

$$W_{diss} = \frac{\omega}{2} \mathrm{Im}\left(\mathbf{E} \cdot \underline{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{H} \cdot \underline{\mu}^* \cdot \mathbf{H}^* \right) \qquad (8.8)$$

e le *densità delle pseudo-energie* sono:

$$U_e = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left(\mathbf{E} \cdot \underline{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{E}^* \right) \qquad U_m = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\left(\mathbf{H} \cdot \underline{\mu}^* \cdot \mathbf{H}^* \right) \qquad (8.9)$$

1 L. Landau, E. Lifchitz, *Physique Theorique, Tome VIII, Electrodinamique des milieux continus*, Ed. MIR, Moscou 1969, § 61.

Si noti che

$$\mathrm{Im}\ \mathbf{E}\cdot\underline{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{E}\cdot\underline{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{E}^* - \mathbf{E}^*\cdot\underline{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}}{2\mathrm{j}} =$$

$$\frac{\mathbf{E}\cdot\underline{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{E}^* - \mathbf{E}\cdot\underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{E}^*}{2\mathrm{j}} = \mathbf{E}\cdot\frac{\underline{\varepsilon}^* - \underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}}{2\mathrm{j}}\cdot\mathbf{E}^*$$

dove $\underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$ indica il trasposto di $\underline{\varepsilon}$. Introducendo quasta espressione nella (8.8) e utilizzando una relazione analoga per il termine in **H**, la densità della potenza dissipata in un mezzo anisotropo può essere scritta come segue:

$$W_{\mathrm{diss}} = \frac{\omega}{4\mathrm{j}}\left[\mathbf{E}\cdot\left(\underline{\varepsilon}^* - \underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\mathbf{E}^* + \mathbf{H}\cdot\left(\underline{\mu}^* - \underline{\mu}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\mathbf{H}^*\right] \qquad [\mathrm{W/m^3}] \qquad (8.10)$$

1.9 Mezzi passivi, dissipativi, senza perdite

Si dicono "passivi" i mezzi in cui la potenza dissipata è positiva o nulla, qualunque sia il campo. Se la potenza dissipata è negativa il mezzo genera energia e, per questo, viene detto "attivo".[1] In questo corso si suppone sempre che il mezzo sia passivo.

La condizione di passività è:

$$W_{\mathrm{diss}} \geq 0 \qquad \forall\ \mathbf{E}, \mathbf{H}$$

Quando vale l'ineguaglianza il mezzo viene detto "dissipativo"; quando invece la potenza dissipata è nulla il mezzo viene detto "senza perdite". La condizione di passività o di assenza di perdite implica alcune interessanti proprietà delle permeabilità elettrica e magnetica.

Dalla (8.4) risulta che in un mezzo isotropo passivo deve aversi

$$\varepsilon'' \geq 0 \qquad \mu'' \geq 0$$

In un mezzo senza perdite, dove l'energia dissipata è nulla, ε'' e μ'' devono essere nulli; pertanto *le permeabilità dei mezzi isotropi senza perdite sono reali.*

Nella (8.10) appaiono due forme quadratiche collegate ai tensori $\underline{\varepsilon}^* - \underline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$ e $\underline{\mu}^* - \underline{\mu}^{\mathrm{T}}$. Nei mezzi dissipativi le suddette forme quadratiche sono sempre positive, tranne che nel caso in cui il campo è nullo; quindi le matrici delle componenti dei tensori suddetti devono essere definite positive.

---

1 Alcuni mezzi, come quelli contenuti nei laser, hanno un comportamento attivo. Essi vengono "caricati" di energia mediante un'opportuna sorgente "di pompa" e sono in grado di cedere energia ad un'onda elettromagnetica di frequenza opportuna che li attraversa.

Nei mezzi senza perdite la potenza dissipata è sempre nulla, cosa che può avvenire solo se i due tensori sono nulli; pertanto deve risultare:

$$\underline{\varepsilon}^* = \underline{\varepsilon}^T \quad \underline{\mu}^* = \underline{\mu}^T \tag{9.1}$$

Dunque *i tensori di permeabilità dei mezzi anisotropi senza perdite sono hermitiani (simmetrici, se la parte immaginaria è nulla).*

Considerazioni molto generali portano a concludere che, in un mezzo anisotropo senza perdite la parte immaginaria di $\underline{\varepsilon}$ ($\underline{\mu}$) differisce da zero solo se il mezzo è giroelettrico (giromagnetico).[1]

Pertanto se l'anisotropia non è dovuta all'effetto di un campo magnetostatico, ma deriva dalla struttura del mezzo (come nei monocristalli anisotropi), i tensori di permeabilità elettrica e magnetica sono simmetrici. Invece - ad esempio - in un mezzo giroelettrico senza perdite, come il magnetoplasma senza collisioni, il tensore di permeabilità elettrica è hermitiano (vedi Equazione 6.9*a*).

1.10 Polarizzazione dei campi monocromatici

Una caratteristica importante dei campi monocromatici è la loro "polarizzazione" (da non confondere con la polarizzazione dei materiali, che è tutt'altra cosa). Si consideri un vettore sinusoidale qualsiasi, ad esempio il campo elettrico

$$\mathsf{E} = \mathrm{Re}\,[\,\mathbf{E}\, e^{j\omega t}\,]$$

Si può sempre scrivere:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i$$

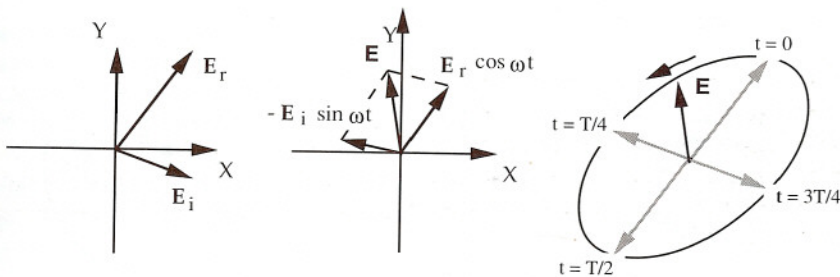



Figura 10.1

1 L. Landau, E. Lifchitz, *Physique Theorique*, vol. VIII (*Electrodinamique des milieux continus*, § 76 e § 82) e Vol. V (*Physique statistique*, § 127), Ed. MIR, Moscou.

dove $\mathbf{E}_r$ ed $\mathbf{E}_i$ sono i vettori (reali) che hanno come componenti le parti reali e immaginarie di $\mathbf{E}$ rispettivamente. Pertanto:

$$\mathbf{E} = \text{Re}\,[(\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i)\, e^{j\omega t}] = \mathbf{E}_r \cos\omega t - \mathbf{E}_i\, \text{sen}\omega t \tag{10.1}$$

Questa espressione mostra che, in generale, un vettore sinusoidale può essere rappresentato dalla somma di due vettori che oscillano in quadratura secondo direzioni fisse (quelle di $\mathbf{E}_r$ e di $\mathbf{E}_i$). Il vettore $\mathbf{E}$ giace sul piano che contiene $\mathbf{E}_r$ e $\mathbf{E}_i$ e il suo estremo descrive una traiettoria ellittica (Figura 10.1), nel verso che va da $\mathbf{E}_i$ ad $\mathbf{E}_r$.

■ Infatti indicando con E_{rx}, E_{ry}, E_{ix}, E_{iy} le componenti di $\mathbf{E}_r$ e $\mathbf{E}_i$ rispetto agli assi X,Y indicati in Figura 10.1, le coordinate dell'estremo di $\mathbf{E}$ sono date da:

$$X = E_{rx}\cos\omega t - E_{ix}\,\text{sen}\,\omega t \qquad Y = E_{ry}\cos\omega t - E_{iy}\,\text{sen}\,\omega t$$

da cui

$$XE_{ry} - YE_{rx} = (E_{iy}E_{rx} - E_{ix}E_{ry})\,\text{sen}\,\omega t \qquad XE_{iy} - YE_{ix} = (E_{iy}E_{rx} - E_{ix}E_{ry})\cos\omega t$$

$$(XE_{ry} - YE_{rx})^2 + (XE_{iy} - YE_{ix})^2 = (E_{iy}E_{rx} - E_{ix}E_{ry})^2$$

Come si verifica facilmente questa è l'equazione di un ellisse sul piano X,Y. ■

Un vettore sinusoidale il cui estremo descrive un'ellisse si dice *polarizzato ellitticamente*. In casi particolari l'ellisse si riduce ad un cerchio (*polarizzazione circolare*) o a un segmento (*polarizzazione lineare*). La polarizzazione circolare si ha quando i vettori $\mathbf{E}_r$ e $\mathbf{E}_i$ sono perpendicolari fra loro e hanno uguale modulo; la polarizzazione lineare quando $\mathbf{E}_r$ e $\mathbf{E}_i$ hanno la stessa direzione, ovvero quando uno di essi è nullo.

La (10.1) rappresenta un modo di scomporre un vettore sinusoidale in due vettori polarizzati linearmente, oscillanti in quadratura. Esistono però infinite altre possibilità per effettuare tale scomposizione. Infatti, introducendo un angolo δ qualsiasi, si ha:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}_r\, e^{-j\delta} + j\mathbf{E}_i\, e^{-j\delta})\, e^{j\delta} = (\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2)\, e^{j\delta} \tag{10.2}$$

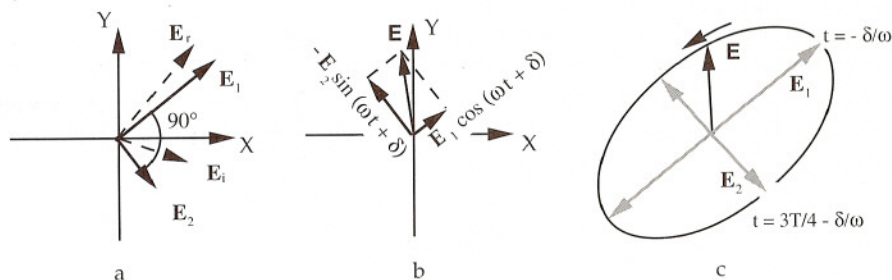



Figura 10.2

dove $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ sono due nuovi vettori reali dati da

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_r \cos\delta + \mathbf{E}_i \operatorname{sen}\delta \qquad \mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_r \operatorname{sen}\delta + \mathbf{E}_i \cos\delta \tag{10.3}$$

Pertanto, in luogo della (10.1) si può scrivere:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\left[\,(\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2)\,e^{j\delta} e^{j\omega t}\right] = \mathbf{E}_1 \cos(\omega t + \delta) - \mathbf{E}_2 \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \tag{10.4}$$

Le direzioni di $\mathbf{E}_1$ e di $\mathbf{E}_2$ differiscono da quelle di $\mathbf{E}_r$ ed $\mathbf{E}_i$ e dipendono dalla scelta di δ. Con una scelta opportuna è possibile fare in modo che $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ risultino ortogonali fra loro. Il valore di δ per il quale questo avviene è definito imponendo la condizione di ortogonalità $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$ alle espressioni (10.3). Si ottiene:

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_i}{|\mathbf{E}_r|^2 - |\mathbf{E}_i|^2} \tag{10.5}$$

Se i vettori $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ sono determinati introducendo nelle (10.3) questo valore di δ (vedi Figura 10.2*a*), la (10.4) rappresenta la scomposizione di un campo monocromatico generico in due campi polarizzati linearmente in direzioni ortogonali, oscillanti in quadratura (Figura 10.2*b*). È evidente che i vettori $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ rappresentano i semiassi dell'ellisse di polarizzazione (Figura 10.2*c*). Nel caso della polarizzazione lineare uno dei due vettori è nullo.

Le precedenti considerazioni mettono in evidenza che il modulo di un fasore vettoriale rappresenta la lunghezza della corda dell'ellisse di polarizzazione, presa fra gli estremi dell'asse maggiore e dell'asse minore (Figura 10.3). Infatti, introducendo i vettori $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$, risulta:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{(\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2)e^{j\delta} \cdot (\mathbf{E}_1 - j\mathbf{E}_2)e^{-j\delta}} =$$

$$\sqrt{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2} = \sqrt{|\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2}$$

Evidentemente, nel caso della polarizzazione lineare, il modulo rappresenta l'ampiezza delle oscillazioni del campo.

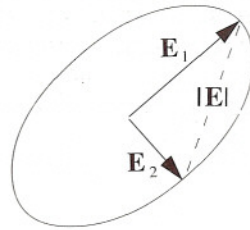



Figura 10.3

Nello studio delle onde è spesso utile evidenziare l'ampiezza e la polarizzazione del campo. A parità di polarizzazione l'ampiezza è caratterizzata dal modulo del campo. La polarizzazione è invece descritta mediante

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} e^{j\chi} \qquad (\chi = \textit{fase arbitraria})$$

che è un fasore di modulo unitario (versore complesso), corrispondente a un campo

sinusoidale che descrive una ellisse di corda unitaria, simile a quella descritta da **E**. Pertanto volendo evidenziare l'ampiezza e la polarizzazione di **E** si scrive:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\,|\mathbf{E}|\,e^{-j\chi}$$

Il versore **p** prende il nome di "vettore di polarizzazione" di **E**. Si nota che esso è definito a meno della fase χ. Nei problemi specifici il valore di χ viene fissato secondo convenienza.

■ ESEMPI

- Il fasore $\mathbf{E} = 3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y$ [V/m] (per il quale $\mathbf{E}_r = 3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y$, $\mathbf{E}_i = 0$) rappresenta un campo elettrico polarizzato linearmente, che oscilla come $\cos\omega t$. Il campo è parallelo al piano x, y e forma con l'asse x l'angolo $\xi = \text{arctg}\, 4/3 = 53.1°$. Esso raggiunge il valore massimo di 5 V/m. Il modulo di **E** coincide con il valore massimo, come avviene sempre nel caso dei campi polarizzati linearmente. Il vettore di polarizzazione può essere definito come il versore reale $\mathbf{p} = 0.6\mathbf{u}_x + 0.8\mathbf{u}_y$. Con questa definizione si ha $\mathbf{E} = \mathbf{p}|\mathbf{E}|$.
- Il fasore $\mathbf{E} = (3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y)e^{-j2z}$ [V/m] rappresenta un campo analogo al precedente, che oscilla come $\cos(\omega t - 2z)$. Il vettore di polarizzazione può essere definito come nell'esempio precedente. Con questa definizione si ha: $\mathbf{E} = \mathbf{p}\,|\mathbf{E}|\,e^{-j2z}$
- Il fasore $\mathbf{J} = 2\,(\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y)$ [A/m²] (per il quale $\mathbf{J}_r = 2\mathbf{u}_x$, $\mathbf{J}_i = -\,2\mathbf{u}_y$) rappresenta una densità di corrente polarizzata circolarmente, su un piano parallelo al piano x,y e ruotante nel verso antiorario rispetto all'asse z. La densità di corrente istantanea è un vettore rotante di intensità costante, pari a 2 A/m², che ruota con la velocità angolare ω. Si ha $|\mathbf{J}| = 2\sqrt{2}$ A/m², e si può definire $\mathbf{p} = (\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$. Con questa definizione si ha $\mathbf{J} = 2\sqrt{2}\mathbf{p}$.
- Il fasore $\mathbf{J} = 2\,(\mathbf{u}_x + j\mathbf{u}_y)$ [A/m²] rappresenta un campo analogo al precedente, che però ruota in verso orario.
- Il fasore $\mathbf{H} = (1 + j)\,\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z$ [A/m] (per il quale $\mathbf{H}_r = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z$, $\mathbf{H}_i = \mathbf{u}_x$) rappresenta un campo magnetico polarizzato ellitticamente su di un piano parallelo al piano x, z. Si trova: $\delta = 31.7°$, $\mathbf{H}_1 = 1.38\,\mathbf{u}_x + 0.851\mathbf{u}_z$, $\mathbf{H}_2 = 0.325\mathbf{u}_x - 0.526\mathbf{u}_z$. Gli assi dell'ellisse di polarizzazione sono $H_1 = 1.621$ A/m, $H_2 = 0.618$ A/m e l'asse maggiore forma l'angolo di 31.8° con l'asse z. Si ha: $|\mathbf{H}| = \sqrt{3}$ A/m.
  Definendo il vettore di polarizzazione come $\mathbf{p} = [(1 + j)\,\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z]/\sqrt{3}$, il campo viene rappresentato da $\mathbf{H} = \mathbf{p}\,|\mathbf{H}|$. Se invece nella definizione di **p** si assume $\chi = -\delta$ si ha:
  $\mathbf{p} = \mathbf{H}\,e^{-j\delta} / |\mathbf{H}| = (\mathbf{H}_1 + j\,\mathbf{H}_2)e^{j\delta}e^{-j\delta} / |\mathbf{H}| = \mathbf{H}_1/\sqrt{3} + j\,\mathbf{H}_2/\sqrt{3}$ e risulta $\mathbf{H} = \mathbf{p}\,|\mathbf{H}|\,e^{j\delta}$. ■

1.11 Funzioni d'onda in regime sinusoidale

Nei prossimi capitoli verranno studiate diverse soluzioni delle equazioni dei campi monocromatici. In generale si troveranno vettori che hanno componenti del tipo

$$\Psi = \Psi_0\,e^{j\varphi} \quad (\Psi_0,\ \varphi \text{ reali}) \tag{11.1a}$$

ovvero, esplicitando la dipendenza dal tempo:

$$\Psi = \Psi_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{11.1b}$$

L'ampiezza e la fase sono funzioni della posizione ($\Psi_0 = \Psi_0(\mathbf{r})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$). Se si escludono casi eccezionali, nelle regioni in cui i campi sono continui queste funzioni sono continue e le (11.1) rappresentano onde che si propagano.[1] Per questa ragione esse vengono dette "funzioni d'onda". In questo paragrafo le funzioni d'onda vengono esaminate senza far riferimento al loro significato fisico, al solo scopo di introdurre le grandezze che caratterizzano il moto delle onde monocromatiche in generale.

I luoghi dei punti **r** che soddisfano equazioni del tipo

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{cost.}$$

si chiamano "superfici equifase". Su di una superficie equifase le oscillazioni di Ψ avvengono in fase. Le superfici S_1, S_2, ecc. indicate in Figura 11.1 rappresentano esempi di superfici equifase, numerate nel verso della fase decrescente.

La quantità $\omega t + \varphi$ (l'argomento del coseno nella (11.1*b*)) prende il nome di "fase istantanea". Si dice "superficie a fase istantanea costante" o "fronte d'onda" il luogo dei punti **r** che soddisfano l'equazione

$$\omega t + \varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 \tag{11.2}$$

dove φ_0 è una costante reale arbitraria. All'istante t la superficie (11.2) coincide con la superficie equifase

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 - \omega t$$

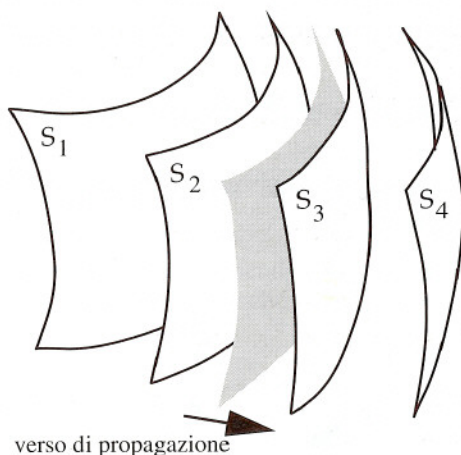



Figura 11.1

1 Un'eccezione è costituita dalle onde stazionarie di cui ci si occuperà nel successivo capitolo. Nelle onde stazionarie la fase è costante a tratti e subisce un salto di π in corrispondenza delle superfici nodali.

mentre in un istante successivo essa coincide con una superficie cui compete un valore minore della fase. Dunque i fronti d'onda si muovono nel verso delle fasi decrescenti (come la superficie ombreggiata di Figura 11.1, che si muove nel verso della freccia). Il moto dei fronti d'onda costituisce ciò che si intende per "propagazione" di un'onda monocromatica.

Ad esempio, le "creste" dell'onda sono costituite dai fronti d'onda per cui $\omega t + \varphi = n2\pi$ ($n=0, \pm1, \pm2, ..$); infatti negli istanti in cui un punto è attraversato da una di queste superfici si ha:

$$\Psi = \Psi_0 \cos n2\pi = \Psi_0 = \text{valore di picco di } \Psi.$$

Analogamente Ψ è nulla nei punti attraversati dalle superfici per cui la fase istantanea è un multiplo dispari di $\pi/2$.

Nei casi particolari in cui le superfici equifase e i fronti d'onda sono piani, sfere, cilindri ecc. l'onda viene detta piana, sferica, cilindrica, e così via.

Il vettore

$$\boldsymbol{\beta} = -\nabla\varphi \qquad [\text{rad/m}] \tag{11.3}$$

prende il nome di "vettore d'onda". Esso è perpendicolare alle superfici equifase ed è orientato nel verso di propagazione.

Si supponga che un ipotetico osservatore posto in un generico punto **r** voglia inseguire un fronte d'onda muovendosi nella direzione di un certo versore **a** (Figura 11.2). La velocità v_a con cui l'osservatore dovrebbe muoversi si chiama "velocità di fase" nella direzione **a**. Se all'istante t l'osservatore si trova nel punto **r**, all'istante t + dt egli deve trovarsi nel punto **r**', spostato rispetto al punto precedente di $\mathbf{a}v_a dt$. Nella nuova posizione il valore della funzione φ differisce da quello che si ha nel punto di partenza della quantità

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial a}(v_a\, dt) = \mathbf{a}\cdot\nabla\varphi\; v_a\, dt = -\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\beta}\, v_a\, dt$$

D'altro canto, poiché l'osservatore "vede" sempre lo stesso valore di fase istantanea, si ha pure $d(\varphi + \omega t) = 0$, ovvero:

$$d\varphi = -\omega\, dt$$

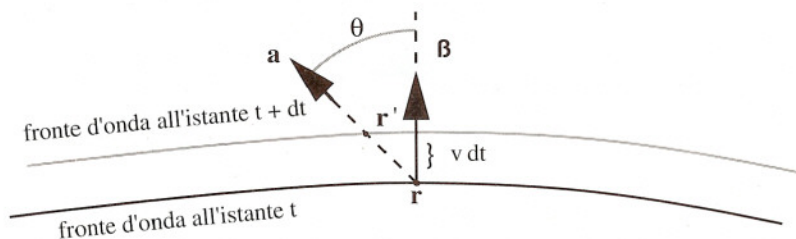



Figura 11.2

Uguagliando le due espressioni di $d\varphi$ si ottiene:

$$v_a = \frac{\omega}{\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{v}{\cos\theta}$$

dove

$$v = \frac{\omega}{\beta} \qquad [m/s] \qquad (11.4)$$

e θ è l'angolo compreso fra **a** e il vettore d'onda. La velocità di fase è minima nella direzione del vettore d'onda, e assume il valore v, detto semplicemente "velocità di fase", senza ulteriori specificazioni. Si nota che v_a tende all'infinito nelle direzioni tangenti alla superficie equifase.

Le onde monocromatiche sono comunemente rappresentate mediante funzioni d'onda complesse del tipo (11.1*a*). Per questa ragione è opportuno imparare a riconoscere le onde di tipo più comune in base al solo esame delle funzioni d'onda complesse. A questo scopo sono utili i seguenti esempi.

ESEMPIO 1:

$$\Psi = A\, e^{-jkz} \quad \text{(A costante complessa, k costante reale positiva)} \qquad (11.5)$$

Indicato con φ_a l'argomento di A, si ha $\varphi = \varphi_a - kz$ e quindi le superfici equifase sono i piani perpendicolari all'asse z. Il vettore d'onda è

$$\boldsymbol{\beta} = -\nabla(\varphi_a - kz) = \nabla(kz) = k\,\mathbf{u}_z$$

Pertanto la (11.5) rappresenta un'onda piana che si propaga nella direzione positiva dell'asse z. Si ha

$$\beta = k \qquad v = \omega/k \qquad (11.6)$$

Poiché β è costante la velocità di fase non dipende dalla posizione; inoltre avviene che due piani equifase cui competono valori di fase che differiscono di 2π sono separati da una

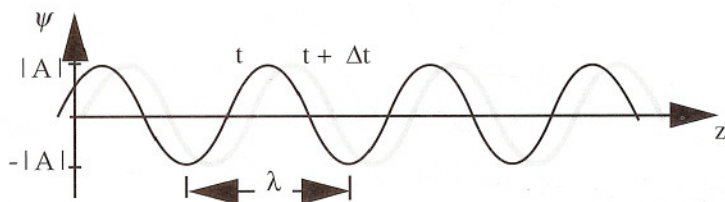



Figura 11.3

distanza fissa λ. Tale distanza è la ben nota "lunghezza d'onda" ed è determinata dalla condizione $\beta\,\lambda = 2\pi$. Si ottiene:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.7}$$

A causa della (11.4) vale la relazione notevole

$$\lambda = \frac{v}{f} = v\,T \tag{11.8}$$

dove f e T sono rispettivamente la frequenza e il periodo. Si noti che la lunghezza d'onda rappresenta la distanza percorsa dai fronti d'onda in un periodo. La funzione d'onda istantanea corrispondente alla (11.5) è

$$\psi = \mathrm{Re}\left[\Psi\, e^{j\omega t}\right] = |A| \cos\left(\omega t - kz + \varphi_a\right) = |A| \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \frac{\varphi_a}{2\pi}\right)$$

In un istante fissato tale funzione è periodica rispetto a z, con periodo λ. La Figura11.3 rappresenta l'andamento spaziale di ψ in due istanti successivi.
L'ampiezza delle oscillazioni è identica in tutti i punti di uno stesso piano equifase (in questo esempio essa è addirittura uguale ovunque). Per questa ragione si dice che la (11.5) rappresenta un'onda piana "uniforme".

ESEMPIO 2:

$$\psi = A\, e^{jkz} \qquad \text{(A costante complessa, k costante reale positiva)} \tag{11.9}$$

Questa funzione differisce dalla precedente solo per il segno dell'esponente. Si verifica immediatamente che a tale cambiamento corrisponde solo l'inversione del verso di propagazione, che è quello negativo dell'asse z.

ESEMPIO 3:

$$\psi = A\, e^{-\gamma z} \tag{11.10}$$

dove A e γ sono costanti complesse ($\mathrm{Re}\gamma > 0$, $\mathrm{Im}\,\gamma > 0$). Ponendo

$$\alpha = \mathrm{Re}\,\gamma$$

la (11.10) può essere scritta nel modo seguente:

$$\psi = |A|\, e^{-\alpha z}\, e^{j\varphi} \qquad \text{dove} \qquad \varphi = \varphi_a - (\mathrm{Im}\,\gamma)\, z$$

Si ha nuovamente un'onda piana, perché le superfici equifase sono piani perpendicolari

all'asse z. L'onda è uniforme perché su ciascun piano l'ampiezza delle oscillazioni è costante. Si ha inoltre

$$\mathbf{\beta} = (\text{Im}\,\gamma)\,\mathbf{u}_z$$

e quindi l'onda si propaga nel verso positivo dell'asse z, con costante di fase e velocità di fase date da

$$\beta = \text{Im}\,\gamma \qquad\qquad v = \omega/(\text{Im}\,\gamma)$$

Anche in questo caso si può definire la lunghezza d'onda, che soddisfa sempre le relazioni (11.7) e (11.8). La funzione d'onda istantanea è:

$$\psi = \text{Re}\left[\Psi\, e^{j\omega t}\right] = |A|\, e^{-\alpha z} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \frac{\varphi_a}{2\pi}\right)$$

Ad essa corrispondono gli andamenti indicati in Figura 11.4. L'ampiezza delle oscillazioni si attenua con legge esponenziale nel verso della propagazione, tanto più rapidamente quanto maggiore è α. La costante α prende il nome di "costante di attenuazione". Il rapporto fra i quadrati dell'ampiezza delle oscillazioni in due punti di coordinate z e z + d viene detto "attenuazione sulla distanza d". Essa è data da:

$$\frac{|\psi(z)|^2}{|\psi(z+d)|^2} = \frac{e^{-2\alpha z}}{e^{-2\alpha(z+d)}} = e^{2\alpha d}$$

Le attenuazioni vengono comunemente espresse in decibel (db). Si ha:

$$\text{att. in db} = 10 \log \frac{|\psi(z)|^2}{|\psi(z+d)|^2} = 10 \log e^{2\alpha d} = 8.68\,\alpha\, d = \alpha_{db} d$$

$$\alpha_{db} = 8.68\,\alpha \qquad (11.11)$$

L'attenuazione in db è proporzionale alla distanza. Il coefficiente α_{db} è la costante di attenuazione espressa in db/m.

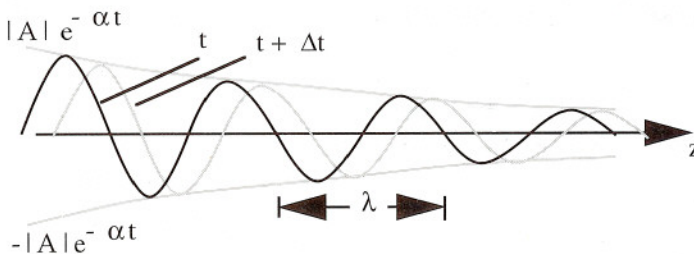



Figura 11.4

ESEMPIO 4:

$$\psi = A\, e^{-\gamma\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \tag{11.12}$$

dove A e γ sono costanti complesse ($\mathrm{Re}\gamma \geq 0$, $\mathrm{Im}\,\gamma > 0$) e **u** è un versore costante qualsiasi. Introducendo la coordinata $s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ presa a partire dall'origine nella direzione di **u** (vedi Figura 11.5), la funzione d'onda può essere scritta nella forma:

$$\psi = A\, e^{-\gamma s} \tag{11.13}$$

Questa espressione è del tutto analoga alla (11.10). Quindi la (11.12) rappresenta un'onda che si propaga nella direzione e nel verso di **u**, con velocità di fase, lunghezza d'onda e costante di attenuazione identiche a quelle viste nell'esempio precedente. La (11.12) è l'espressione più generale di un'onda piana uniforme. Nel caso particolare in cui γ è una costante immaginaria l'onda si propaga senza attenuazione.

ESEMPIO 5:

$$\psi = \mathbf{A}(\theta, \phi) \frac{e^{-jkr}}{r} \tag{11.14}$$

dove: r, θ, ϕ indicano le coordinate sferiche; k = costante reale positiva; A = funzione complessa avente modulo dipendente dalla direzione e argomento costante. Le superfici equifase sono i luoghi kr = cost.; quindi esse sono le superfici sferiche con centro nell'origine (onda sferica). Si ha inoltre:

$$\boldsymbol{\beta} = -\nabla(-kr) = k\, \mathbf{u}_r \qquad \beta = k \qquad v = \omega / k$$

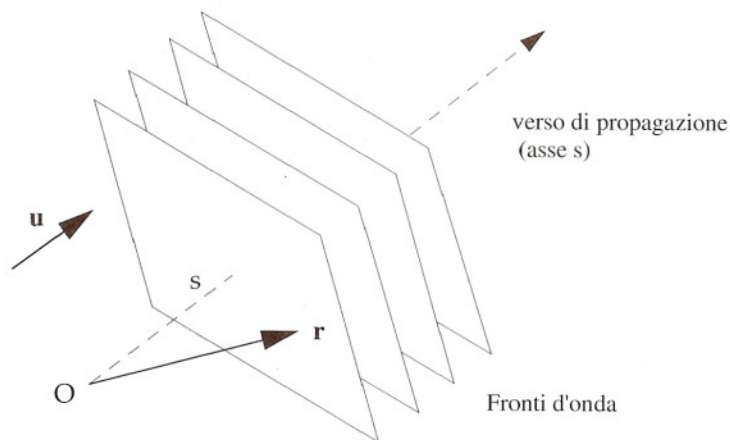
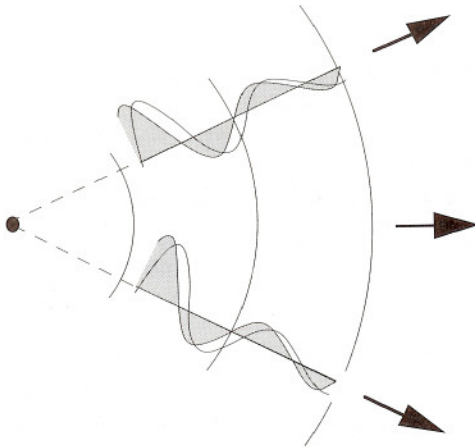



Figura 11.5

dove $\mathbf{u}_r$ rappresenta il versore radiale. La propagazione avviene nel verso centrifugo. Siccome β è costante, anche in questo caso si può definire la lunghezza d'onda, data dalla solita espressione. L'onda non è uniforme perché l'ampiezza delle oscillazioni - che è $|A(\theta, \phi)|/r$ - varia con la direzione. Infine l'onda si attenua secondo una legge di proporzionalità inversa rispetto alla distanza dall'origine. L'andamento dell'onda in due direzioni radiali e in due istanti successivi è rappresentato in Figura 11.6.

Figura 11.6

2

Onde piane nei mezzi isotropi

Le onde piane uniformi sono le più semplici soluzioni delle equazioni di Maxwell. Per questa ragione il loro studio permette di evidenziare alcuni aspetti fondamentali della propagazione delle onde - in particolare l'influenza del mezzo - senza che essi siano messi in ombra da difficoltà analitiche. La prima parte del capitolo è dedicata a evidenziare tali aspetti.

Sebbene, a rigore, le onde piane uniformi non esistono in alcuna situazione reale, alcune onde che si incontrano in pratica possono essere considerate approssimativamente piane e uniformi, se osservate in zone sufficientemente ristrette. In particolare questa approssimazione è quasi sempre lecita, ad alta frequenza, in prossimità delle superfici dei conduttori metallici. Proprio per questo, lo studio delle onde piane nei buoni conduttori permette di ottenere risultati di portata molto generale (Paragrafo 6).

Soluzioni delle equazioni di Maxwell formalmente simili alle onde piane uniformi sono le cosiddette onde piane "evanescenti". Queste onde vengono trattate nel Paragrafo 7, sia per la loro analogia formale con le onde uniformi, sia perché, assieme ad esse, intervengono nello studio della riflessione e della trasmissione sui piani di discontinuità del mezzo. Alla riflessione e alla trasmissione delle onde è dedicata la seconda parte del capitolo. Nel corso di questo studio vengono introdotti alcuni concetti generali che risulteranno utili anche in altre parti del corso (Capitolo 5 e Capitolo 9).

2.1 Onde piane uniformi

Si consideri una regione priva di sorgenti ($\mathbf{J}_0 = 0$) in cui il mezzo è isotropo e omogeneo. Si vuole verificare se, e sotto quali condizioni, le equazioni di Maxwell ammettono soluzioni particolari in cui **E** ha la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\,\psi \tag{1.1}$$

dove **p** indica un vettore di polarizzazione costante e ψ è una funzione d'onda del tipo

$$\psi = A\,e^{-\gamma\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \qquad \left(A,\ \gamma,\ \mathbf{u}\ \text{costanti},\ \operatorname{Im}\gamma \geq 0\right)$$

Questa funzione è del tipo (11.2) visto nel capitolo precedente e rappresenta un'onda piana uniforme che si propaga nella direzione del versore **u**, con la velocità di fase $v = \omega/\mathrm{Im}\gamma$.

Si ha:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{p} A \times \nabla e^{-\gamma \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} = -\mathbf{p} A \times (-\gamma \mathbf{u}) e^{-\gamma \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} = -\gamma \mathbf{u} \times \mathbf{p}\psi$$

Sostituendo nell'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$, si ottiene:

$$\mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{p}\, \psi/\eta \tag{1.2}$$

dove

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{1.3}$$

L'espressione (1.2) è analoga alla (1.1), con la differenza che in luogo del vettore di polarizzazione **p** si ha $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$, e al posto di ψ si ha ψ/η. Pertanto, con sviluppi analoghi a quelli che hanno portato a esprimere $\nabla \times \mathbf{E}$, si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\gamma \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p})\, \psi/\eta = -\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p})\, (\gamma^2/j\omega\mu)\psi$$

Sostituendo nell'equazione $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon \mathbf{E}$, si ricava:

$$\omega^2\varepsilon\mu\, \mathbf{p} = \gamma^2\, \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) \tag{1.4}$$

Poiché il secondo membro è evidentemente ortogonale a **u**, si ottiene come primo risultato che il vettore di polarizzazione deve necessariamente essere trasversale rispetto alla direzione di propagazione:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = 0$$

Poiché $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{p} = -\mathbf{p}$, dalla (1.4) risulta:

$$\omega^2\varepsilon\mu = -\gamma^2$$

Pertanto deve aversi:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = jk$$

dove si è posto:[1]

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{\frac{|\varepsilon\mu| + \mathrm{Re}(\varepsilon\mu)}{2}} - j\omega\sqrt{\frac{|\varepsilon\mu| + \mathrm{Re}(\varepsilon\mu)}{2}} \tag{1.5}$$

1 Nella definizione di k (Equazione 1.5) si considera la radice di $\varepsilon\mu$ che ha la parte reale non-negativa. Questa scelta deriva dall'ipotesi $\mathrm{Im}\gamma \geq 0$. Il simbolo k verrà utilizzato in tutto il testo, con lo stesso significato.

Riassumendo, in un mezzo isotropo omogeneo le equazioni di Maxwell ammettono come soluzioni particolari onde piane uniformi del tipo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\, A e^{-jk\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{p}\,(A/\eta)\, e^{-jk\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \tag{1.6}$$

Sostituendo nella (1.3) jk al posto di γ, e osservando che $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$ si ottiene:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (\textit{impedenza caratteristica del mezzo } [\Omega]) \tag{1.7}$$

La costante A, la direzione di propagazione **u** e il vettore di polarizzazione **p** sono arbitrari, con la sola limitazione che **p** deve essere ortogonale a **u**. Il vettore complesso $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$, che evidentemente è un versore ortogonale a **u** e a **p**, è il vettore di polarizzazione di **H**. Sia **E** che **H** sono ortogonali a **u.** Le onde che godono di questa proprietà sono designate con la sigla TEM (trasversali elettriche e magnetiche); dunque le onde piane uniformi nei mezzi isotropi sono esempi di onde TEM. Dalle (1.6) discendono immediatamente le seguenti relazioni:

$$\mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{E}/\eta \qquad \mathbf{E} = \eta\, \mathbf{H} \times \mathbf{u} \tag{1.8}$$

Le costanti di attenuazione e di fase delle onde piane uniformi sono:

$$\alpha = -\operatorname{Im} k = \omega \sqrt{\frac{|\varepsilon\mu| - \operatorname{Re}(\varepsilon\mu)}{2}} \tag{1.9a}$$

$$\beta = \operatorname{Re} k = \omega \sqrt{\frac{|\varepsilon\mu| + \operatorname{Re}(\varepsilon\mu)}{2}} \tag{1.9b}$$

L'ellisse di polarizzazione di **E** è simile a quella di **p** e ugualmente orientata; lo stesso si può dire per le ellissi di polarizzazione di **H** e di $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$. Poiché **p** è costante, la polarizzazione è uguale dappertutto. Come si è visto nel Paragrafo 10 del precedente capitolo, è sempre possibile porre:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 + j\mathbf{p}_2)e^{j\delta} \qquad (p_1^2 + p_2^2 = 1) \tag{1.10}$$

dove $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ sono due vettori reali che rappresentano i semiassi dell'ellisse di polarizzazione di **p** (Figura 1.1*a*). I semiassi dell'ellisse di polarizzazione di $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$ sono evidentemente $\mathbf{u} \times \mathbf{p}_1$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{p}_2$, e quindi quest'ultima ellisse differisce da quella precedente per una rotazione di 90°, come indicato in figura. La rotazione che porta $\mathbf{p}_1$ su $\mathbf{u} \times \mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ su $\mathbf{u} \times \mathbf{p}_2$ avviene nel verso di un cavatappi che si avvita avanzando nel verso di propagazione. Dunque **E** e **H** hanno lo stesso tipo di polarizzazione, con l'unica differenza che l'ellisse di polarizzazione di **H** è ruotata di 90° rispetto a quella di **E**. È appena il caso di precisare che nel caso $p_1 = p_2$ l'onda è polarizzata circolarmente, mentre essa è polarizzata linearmente quando $\mathbf{p}_1$ o $\mathbf{p}_2$ è nullo. Nell'onda polarizzata linearmente il campo elettrico e il campo magnetico oscillano in direzioni ortogonali.

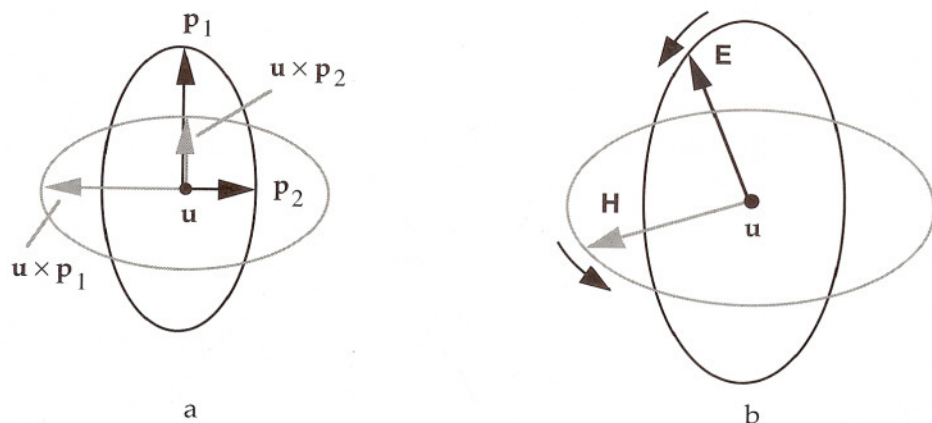



Figura 1.1

Il verso in cui gli estremi dei campi istantanei percorrono le rispettive ellissi di polarizzazione è uguale per **E** e per **H** ed è quello che va da $\mathbf{p}_2$ a $\mathbf{p}_1$. L'onda viene detta "destrogìra" se un osservatore che guarda nel verso di propagazione vede ruotare i campi istantanei nel verso antiorario, "levogìra" in caso contrario. Ad esempio la polarizzazione indicata nella Figura 1.1*b* è destrogìra, se l'onda si propaga nel verso entrante nel foglio.

Rappresentando **p** mediante la (1.10), operando la sostituzione

$$jk = \alpha + j\beta = \alpha + j\frac{2\pi}{\lambda} \qquad (\lambda = 2\pi/\beta = \text{lunghezza d'onda})$$

ponendo

$$\eta = |\eta|\, e^{j\varphi} \qquad A = |A|\, e^{j\varphi_a} \qquad \chi = \delta + \varphi_a$$

e introducendo l'ascissa $s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ (vedi Figura 11.5, Capitolo 1), dalle (1.6) si deducono immediatamente le seguenti espressioni dei campi istantanei:

$$\mathbf{E} = |A| e^{-\alpha s}\left(\mathbf{p}_1 \cos(\omega t - \frac{2\pi s}{\lambda} + \chi) - p_2 \operatorname{sen}(\omega t - \frac{2\pi s}{\lambda} + \chi)\right)$$

$$\mathbf{H} = \frac{|A| e^{-\alpha s}}{|\eta|}\left(\mathbf{u} \times \mathbf{p}_1 \cos(\omega t - \frac{2\pi s}{\lambda} + \chi - \varphi) - \mathbf{u} \times \mathbf{p}_2 \operatorname{sen}(\omega t - \frac{2\pi s}{\lambda} + \chi - \varphi)\right)$$

La Figura 1.2 rappresenta l'andamento del campo elettrico e del campo magnetico in un istante fissato e lungo una retta qualsiasi parallela a **u**, nel caso di polarizzazione lineare ($p_2 = 0$) e di attenuazione non nulla.

Dalle (1.8) si deduce infine che in un'onda piana uniforme il vettore di Poynting può essere espresso come segue:

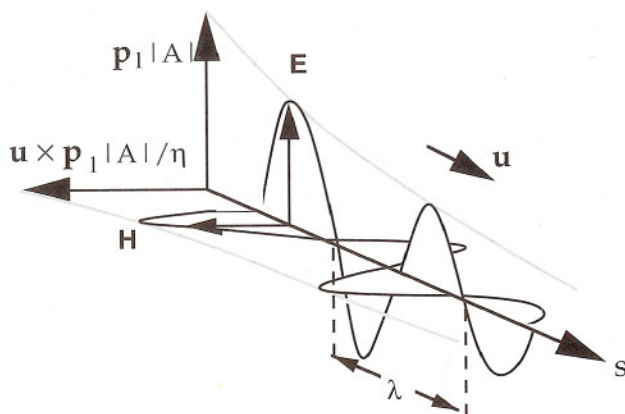



Figura 1.2

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*}{2} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2\eta^*}\mathbf{u} = \dfrac{|E|^2}{2\eta^*}\mathbf{u} \\ \dfrac{\eta\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*}{2}\mathbf{u} = \dfrac{\eta|E|^2}{2}\mathbf{u} \end{cases} \tag{1.11}$$

Esso è allineato alla direzione di propagazione. La potenza che attraversa nel verso di propagazione una superficie unitaria perpendicolare a **u** è

$$W = \mathrm{Re}\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} = \begin{cases} \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\eta^*}\right) & \dfrac{|E|^2}{2} \\ \mathrm{Re}(\eta) & \dfrac{|H|^2}{2} \end{cases} \qquad [\mathrm{W/m^2}] \tag{1.12}$$

Risulta sempre $W \geq 0$, perché la parte reale dell'impedenza caratteristica non può essere negativa.[1] Dunque, *nei mezzi isotropi le onde piane uniformi trasportano energia nella direzione e nel verso di propagazione.*

In base alla prima delle (1.6) si ha:

$$|E|^2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}^*\,A\,e^{-\alpha s}\,e^{-j\beta s}\,A^*\;e^{-\alpha s}\,e^{j\beta s} = |A|^2\,e^{-2\alpha s}$$

1 In un mezzo passivo gli argomenti di μ e di ε sono compresi fra 0 e $-\pi$, così che l'argomento di $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ è compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Dunque la parte reale dell'impedenza caratteristica di un mezzo passivo è positiva o nulla.

(si ricorda che il vettore di polarizzazione ha modulo unitario). Pertanto dalla prima delle (1.12) si deduce:

$$W(s) = W(0)\,e^{-2\alpha s}$$

Dunque, se l'attenuazione non è nulla, la potenza decresce con legge esponenziale. L'attenuazione sulla distanza d è data da

$$\frac{W(s)}{W(s+d)} = e^{2\alpha d}$$

La stessa attenuazione, espressa in decibel, è:

$$10 \log \frac{W(s)}{W(s+d)} = 8.68\alpha\, d = \alpha_{db} d \qquad [db]$$

2.2 Propagazione nel vuoto

Nel caso del vuoto si ha $|\varepsilon\mu| = \text{Re}\,(\varepsilon\mu) = \varepsilon_0\mu_0$. Pertanto:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c} \qquad \alpha = 0 \qquad \beta = \frac{\omega}{c} \qquad v = c$$

La velocità di fase delle onde piane uniformi nel vuoto è uguale alla velocità della luce. La lunghezza d'onda e l'impedenza caratteristica del vuoto vengono indicate con λ_0 e η_0. Si ha:

$$\lambda_0 = c/f \qquad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi\ \Omega \approx 377\ \Omega$$

La lunghezza d'onda λ_0 viene spesso utilizzata, in luogo della frequenza, per caratterizzare la collocazione dei campi monocromatici nello spettro delle onde elettromagnetiche (vedi Appendice C). Quest'uso è particolarmente diffuso in Ottica, perché nella regione dell'infrarosso e del visibile la lunghezza d'onda può essere misurata molto più facilmente della frequenza.

2.3 Propagazione nei dielettrici a bassa perdita

Vengono detti "a bassa perdita" i dielettrici in cui

$$\theta_e = \text{arctg}\,(\varepsilon''/\varepsilon') << 1 \qquad \theta_m = \text{arctg}\,(\mu''/\mu') << 1$$

Gli angoli θ_e e θ_m (argomenti di ε e μ) vengono detti "angolo di perdita elettrico" e "angolo di perdita magnetico". Molto spesso i dielettrici a bassa perdita sono diamagnetici o paramagnetici; per questa ragione, allo scopo di semplificare la discussione, in questo paragrafo si suppone $\mu \approx \mu_0$, $\theta_m = 0$. Siccome la permeabilità elettrica varia con la frequenza, un dielettrico può essere considerato a bassa perdita in un certa banda di frequenze, mentre può non essere più tale in regioni diverse dello spettro. Ad esempio, l'acqua (vedi Figura 6.1, Capitolo 1) può essere considerata a basse perdite a bassa frequenza e nella regione visibile, ma non nelle regioni delle microonde, delle onde millimetriche, submillimetriche e dell'infrarosso. Le caratteristiche di alcuni dielettrici a bassa perdita usati nella regione delle microonde e delle onde millimetriche sono riportate nella Tabella 3.1. In questi materiali l'angolo di perdita a 10 GHz è dell'ordine dei millesimi o decimillesimi di radiante.

Nei dielettrici a bassa perdita l'angolo di perdita (in radianti) è dato da $\theta_e \approx \varepsilon''/\varepsilon'$. Quindi:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\varepsilon' - j\,\varepsilon'') \approx \varepsilon_0\, \varepsilon' \,(1 - j\theta_e)$$

Pertanto:

$$\mathrm{Re}(\varepsilon\mu) = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon' = \frac{\varepsilon'}{c^2} \qquad |\varepsilon\mu| = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon' \sqrt{1+\theta_e^2} \approx \frac{\varepsilon'}{c^2}\left(1+\frac{\theta_e^2}{2}\right)$$

$$k \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'}\left(1 - j\frac{\theta_e}{2}\right) \qquad \beta \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'} \qquad \alpha \approx \beta\frac{\theta_e}{2}$$

$$\eta = \frac{\omega\mu_0}{k} = \frac{\omega\mu_0}{\beta - j\alpha} = \frac{c\mu_0}{\sqrt{\varepsilon'}\,(1 - j\theta_e/2)} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon'}}\left(1 + j\frac{\theta_e}{2}\right) \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon'}}$$

Ponendo

$$n = \sqrt{\varepsilon'} \qquad \textit{(indice di rifrazione)}$$

Tabella 3.1 Permeabilità dielettrica e angolo di perdita di alcuni dielettrici a bassa perdita alla frequenza di 10 GHz.

Dielettrico	ε'	$\theta_e \cdot 10^4$ [rad]
Allumina (99.5%)	9.6 ÷ 10.4	0.5 ÷ 3
Quarzo fuso (99.9%)	3.75	1
Ossido di berillio	6.6	1
RT-duroid™ 5880	2.16 ÷ 2.24	5 ÷ 15
RT-duroid™ 6010	10.2 ÷ 10.7	10 ÷ 60
Polietilene puro	2.25	3

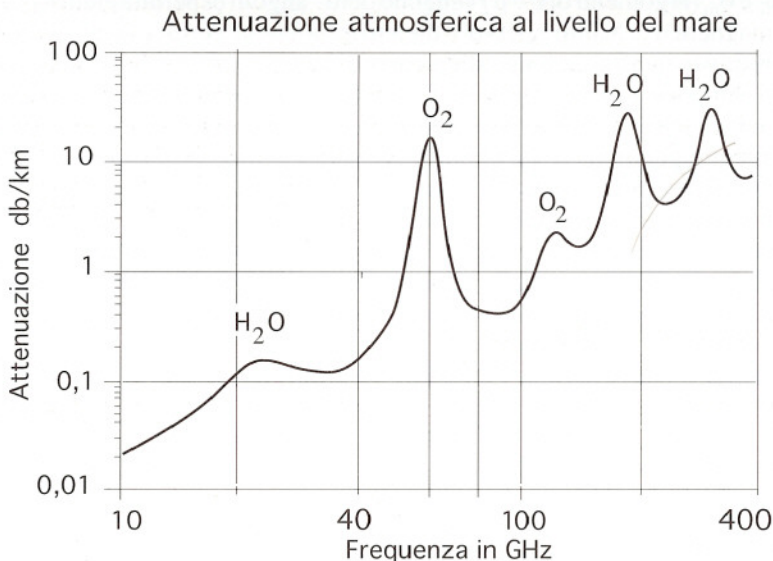



Figura 3.1

si ottengono le seguenti formule:

$$v \approx \frac{c}{n} \qquad \lambda \approx \frac{\lambda_0}{n} \qquad \alpha \approx \frac{\pi \theta_e}{\lambda} \qquad \eta \approx \frac{\eta_0}{n} \tag{3.1}$$

In generale l'indice di rifrazione e la velocità di fase variano con la frequenza (dispersività). Solo a frequenze sufficientemente basse le variazioni possono essere trascurate. Ad esempio l'indice di rifrazione e la velocità di fase sono praticamente costanti fino a frequenze dell'ordine della decina di gigahertz nei dielettrici elencati nella Tabella 3.1, fino a circa 4 GHz nell'acqua.

La costante di attenuazione risulta in genere molto piccola, e può essere trascurata se si considerano percorsi propagativi sufficientemente brevi.[1] Trascurare l'attenuazione equivale a considerare il dielettrico come un mezzo ideale senza perdite.

I gas non ionizzati sono sempre mezzi a bassa perdita e danno luogo ad attenuazioni sensibili solo su distanze pari a moltissime lunghezze d'onda. Ad esempio la Figura 3.1, riporta i valori sperimentali dell'attenuazione atmosferica al livello del mare nella regione delle microonde e delle onde millimetriche. I picchi di attenuazione (o picchi d'assorbimento) sono determinati dalle risonanze delle molecole di ossigeno e di vapore d'acqua.

---

1 Se si assume di poter ignorare attenuazioni dell'ordine di 0.1 db, la costante di attenuazione può essere trascurata quando si considerano percorsi propagativi minori di

$$d = 0.1/\alpha_{db} = 0.1/(8.68\,\alpha) \approx \frac{0.004}{\theta_e}\lambda$$

■ Anche sui picchi d'assorbimento l'angolo di perdita dell'aria rimane molto basso. Ad esempio in corrispondenza del picco a 183 GHz si ha $\alpha_{db} \approx 25$ db/km = 0.025 db/m cioè $\alpha = 0.025/8.68 = 0.0028$ m^{-1}; siccome $\lambda \approx \lambda_0 = 1.6$ mm si deduce $\theta_e \approx \alpha\lambda/\pi = 1.4 \cdot 10^{-6}$ rad, che è un valore molto più basso di quelli dei dielettrici solidi elencati in Tabella 3.1. Si osservi che nonostante il bassissimo valore di θ_e, alla frequenza considerata l'attenuazione sulla distanza di 1km (25db, equivalente a una diminuzione della potenza trasmessa di un fattore 316) è tutt'altro che trascurabile. L'attenuazione è molto minore in corrispondenza delle "finestre" a 33, a 90 e a 220 GHz (0.11, 0.5 e 1.5 db/km rispettivamente). A frequenze inferiori a 10 GHz l'attenuazione è tanto bassa da poter essere ignorata anche su distanze dell'ordine di diverse decine di chilometri. ■

2.4 Propagazione nel plasma isotropo

Nel plasma isotropo, freddo e senza collisioni la permeabilità elettrica è data dalla (6.6) del capitolo precedente; inoltre si ha $\mu \approx \mu_o$. Pertanto:

$$\varepsilon\mu = \varepsilon_0\mu_0\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right] = \frac{1}{c^2}\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]$$

$$|\varepsilon\mu| = -\mathrm{Re}[\varepsilon\mu] = \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2-1\right] \qquad \text{se } \omega < \omega_p$$

$$|\varepsilon\mu| = 0 \qquad \text{se } \omega = \omega_p$$

$$|\varepsilon\mu| = \mathrm{Re}[\varepsilon\mu] = \frac{1}{c^2}\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right] \qquad \text{se } \omega > \omega_p$$

Pertanto dalle (1.9) si ottiene:

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2-1} \qquad \beta = 0 \qquad \text{se } \omega < \omega_p \qquad (4.1a)$$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \text{se } \omega = \omega_p$$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \qquad \text{se } \omega > \omega_p \qquad (4.1b)$$

Al disotto della frequenza di plasma risulta $\gamma = \alpha$; quindi in questo campo di frequenze si ha:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\, A\, e^{-\alpha\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}\times\mathbf{p}\,(A/\eta)\, e^{-\alpha\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \qquad (4.2)$$

$$\eta = \frac{\omega\mu_0}{-j\alpha} = \frac{j\eta_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}} \qquad \text{Re}\,\eta = 0 \qquad W = 0 \tag{4.3}$$

Sotto la frequenza di plasma non si ha trasporto di energia. È interessante osservare che nelle (4.2) la fase non dipende dalle coordinate; dunque a frequenze minori della frequenza di plasma non si ha propagazione e l'intensità di **E** e **H** decresce con legge esponenziale lungo la direzione **u** (campo "evanescente").

Invece la propagazione e il trasporto di energia sono possibili quando la frequenza supera quella di plasma. Infatti in questo caso risulta $\gamma = j\beta$ e si ha:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\, A e^{-j\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{p}\, (A/\eta)\, e^{-j\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \tag{4.4}$$

$$\eta = \frac{\omega\mu_0}{\beta} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \qquad W = \frac{\eta |H|^2}{2} > 0 \tag{4.5}$$

Dalle (4.1*b*) si deduce l'espressione della pulsazione alla quale è possibile avere un'onda con un valore assegnato della costante di fase. Si trova:

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + (c\beta)^2} \tag{4.6}$$

Il grafico che rappresenta ω in funzione di β ("diagramma di dispersione") ha l'andamento indicato nella Figura 4.1. Si noti che per $\omega \to \infty$ la curva tende asintoticamente alla retta $\omega = c\beta$, che rappresenta il diagramma di dispersione per le onde piane uniformi nel vuoto; ciò significa che ad alta frequenza (più precisamente per $\omega >> \omega_p$) il plasma tende a comportarsi come il vuoto.

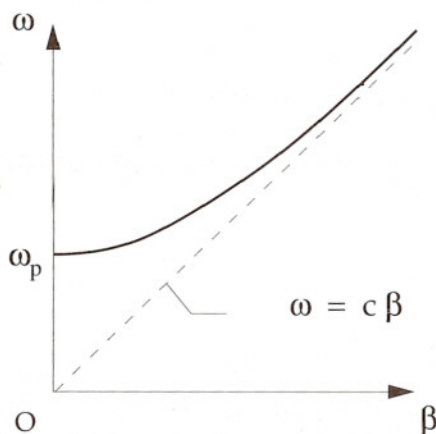



Figura 4.1

La velocità di fase e la lunghezza d'onda sono date da:

$$v = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

Come per i dielettrici, anche nel caso del plasma si usa scrivere

$$v = c/n \qquad \lambda = \lambda_0/n \qquad \eta = \eta_0/n$$

dove l'indice di rifrazione è dato da (vedi Equazione 6.5 e 6.6, Capitolo 1):

$$n = \sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{80\,N_0}{f^2}} \tag{4.7}$$

Nell'ultima espressione f è la frequenza in hertz ed N_0 è la densità di elettroni liberi in m^{-3}. L'indice di rifrazione è minore di 1, al contrario di quanto avviene nei dielettrici. Pertanto la velocità di fase supera c.[1]

Un plasma di particolare interesse per le telecomunicazioni è la ionosfera, che può essere considerata isotropa se si trascura l'effetto del campo magnetico terrestre. I valori massimi di N_0 che si incontrano nella ionosfera sono dell'ordine di 10^{12} m^{-3}; con questi valori la trasmissione delle onde fra la superficie terrestre e lo spazio è possibile solo al disopra di una decina di megahertz. Questo fenomeno ha notevole importanza per le comunicazioni radio perché, quando la trasmissione di energia è impedita, le onde irradiate verso la ionosfera vengono riflesse a terra. Utilizzando frequenze sufficientemente basse la riflessione ionosferica permette di effettuare collegamenti radio al di là dell'orizzonte. Al contrario, utilizzando le microonde, l'effetto della ionosfera è ridotto a livelli insignificanti e risulta possibile effettuare collegamenti con lo spazio (esempio collegamenti via satellite).

2.5 Propagazione nei buoni conduttori

Si dice "buon conduttore" un materiale di conducibilità non nulla, che lavora a frequenza tanto bassa da poter assumere:

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0\varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega} \approx \frac{\sigma}{j\omega}$$

---

1 Questo non è in contrasto con i principi della teoria della relatività, dato che v non è la velocità con cui si spostano masse e energie, ma solo la velocità con cui si propagano i fronti d'onda, che sono entità puramente geometriche.

Nei metalli ad alta conducibilità quest'approssimazione è valida in tutto il campo di frequenze in cui la conduzione è descrivibile mediante la legge di Ohm. L'approssimazione può essere valida anche in materiali di conducibilità molto minore se la frequenza è sufficientemente bassa, più precisamente se:

$$\omega << \sigma/\varepsilon_0\,\varepsilon_r \tag{5.1}$$

Ad esempio un terreno umido in cui $\sigma = 0.1$ S/m ed $\varepsilon_r = 4$ si comporta da buon conduttore fino a qualche decina di megahertz.

Supponendo $\mu = \mu_o$, risulta $\mathrm{Re}(\varepsilon\mu) = 0$. Si trova

$$k = \frac{1-j}{\delta} \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \qquad \eta = \frac{\omega\mu_0}{k} = R_s(1+j) \tag{5.2}$$

dove:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma}} \qquad [\mathrm{m}] \tag{5.3}$$

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} \qquad [\Omega] \tag{5.4}$$

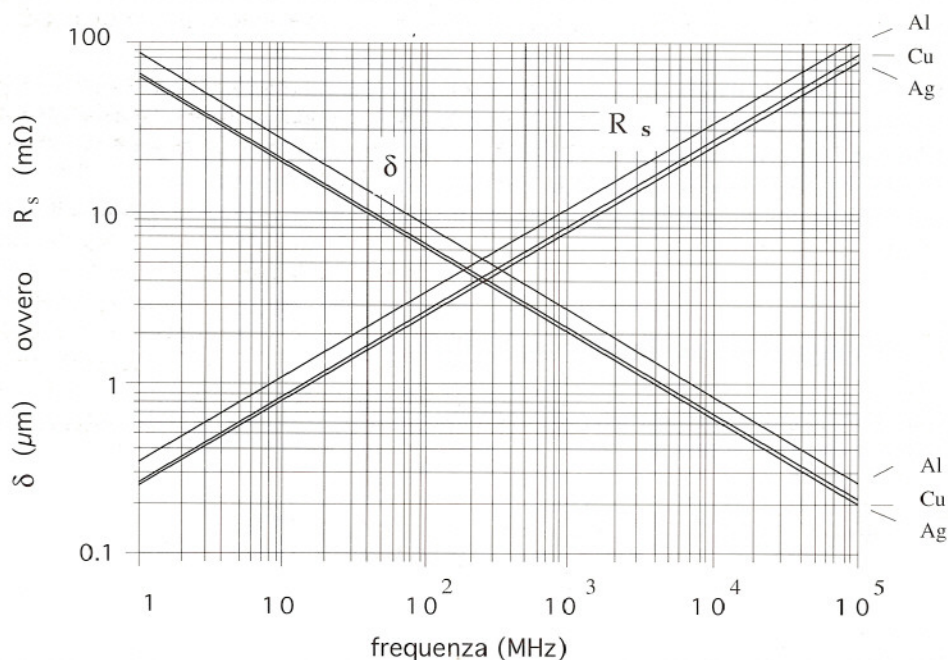



Figura 5.1

Si ha quindi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} A\, e^{-s/\delta}\, e^{-js/\delta} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{p} \frac{A}{R_s(1+j)} e^{-s/\delta}\, e^{-js/\delta} \tag{5.5}$$

La potenza trasportata dall'onda decresce come $e^{-2s/\delta}$.

Il diagramma di Figura 5.1 fornisce i valori di δ e R_s per l'argento, il rame e l'alluminio in un vasto campo di frequenze. Si nota che in questi metalli, anche a frequenze modeste (1 MHz), δ è minore di un decimo di millimetro e α è maggiore di $10^4 m^{-1}$ ($\alpha_{db} > 90$ db/mm). Si tratta di un valore altissimo, che diviene ancora più elevato a frequenze più alte, dato che δ decresce come $1/\sqrt{f}$. Il valore di R_s è molto piccolo nei metalli ad alta conducibilità (frazioni di ohm, anche a frequenza molto alta).

La velocità di fase e la lunghezza d'onda sono date da

$$v = \omega/\beta = \omega\,\delta \qquad \lambda = 2\pi\delta$$

I loro valori sono molto al disotto di quelli tipici dei dielettrici; ad esempio, nel rame ad 1 MHz si ha $v = 418$ m/s, $\lambda = 0.418$ mm.

2.6 Effetto pelle

Attraverso lo studio delle onde piane in un buon conduttore è possibile giungere in modo semplice a importanti risultati circa la distribuzione della corrente in un corpo metallico, ad alta frequenza.

Si consideri in primo luogo un buon conduttore che occupa l'intero semispazio $z > 0$ (Figura 6.1*a*), e si supponga che opportune sorgenti poste nell'altro semispazio generino dentro il conduttore un campo indipendente dalle coordinate x, y. Si supponga inoltre di conoscere il campo magnetico tangenziale alla superficie ($\mathbf{H}_T$).

Un campo che dipende solo da z può - in generale - essere rappresentato dalla sovrapposizione di due onde piane uniformi, che si propagano in versi opposti nella direzione dell'asse z.[1] L'ampiezza e la polarizzazione delle due onde deve essere precisata in base alle condizioni fisiche del problema. Nel caso in esame l'onda che si propaga nel verso negativo deve essere esclusa, perché la sua presenza contrasta con l'ipotesi sull'ubicazione delle sorgenti: infatti, se essa esistesse, per valori sufficientemente grandi di z il campo sarebbe sostanzialmente costituito da questa sola onda, e si avrebbe trasporto di energia nel verso negativo dell'asse z. Dunque il campo è costituito da una sola onda che si propaga nel verso positivo di z:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} A\, e^{-z/\delta}\, e^{-jz/\delta} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p} \frac{A}{R_s(1+j)} e^{-z/\delta}\, e^{-jz/\delta}$$

1 Grazie alla linearità delle equazioni di Maxwell, la somma di due soluzioni particolari è ancora una soluzione.

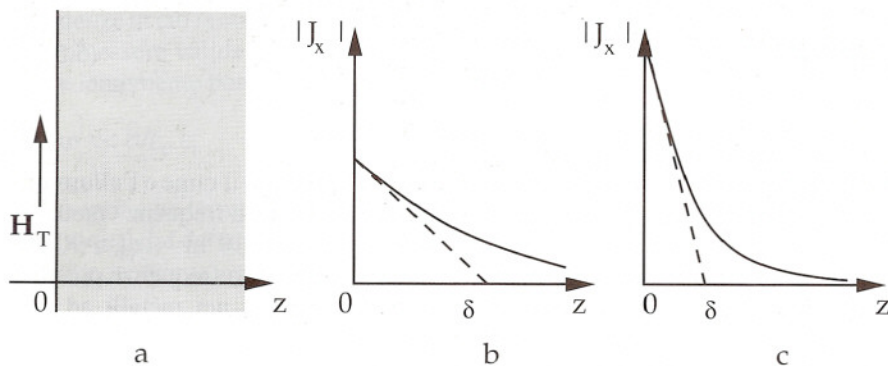



Figura 6.1

Il prodotto **p**A viene determinato osservando che in $z = 0_+$ il campo magnetico deve essere uguale al campo tangenziale assegnato sulla superficie. Pertanto:

$$\mathbf{u}_z \times \mathbf{p} \frac{A}{R_s(1+j)} = \mathbf{H}_T$$

Poiché **p** è ortogonale a $\mathbf{u}_z$ si ha: $(\mathbf{u}_z \times \mathbf{p}) \times \mathbf{u}_z = \mathbf{p}$. Quindi, dalla precedente espressione si deduce:

$$\mathbf{p}\, A = R_s(1+j)\,\mathbf{H}_T \times \mathbf{u}_z$$

Dunque il campo dentro il conduttore è rappresentato da:

$$\mathbf{E} = R_s(1+j)\,\mathbf{H}_T \times \mathbf{u}_z\, e^{-z/\delta}\, e^{-jz/\delta} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_T\, e^{-z/\delta}\, e^{-jz/\delta} \tag{6.1}$$

Procedendo dalla superficie verso l'interno del conduttore il campo decresce esponenzialmente e la sua intensità scende al disotto dell'1% del valore iniziale a profondità maggiori di 5δ.

La densità della corrente indotta nel conduttore dall'onda elettromagnetica è:

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} = \frac{1+j}{\delta}\,\mathbf{H}_T \times \mathbf{u}_z\, e^{-z/\delta}\, e^{-jz/\delta} \tag{6.2}$$

Dunque la densità di corrente è diretta parallelamente alla superficie e ha valori sensibili solo in uno strato superficiale di spessore dell'ordine di δ (Figura 6.1*b*, *c*). Tale strato è tanto più sottile quanto più alta è la frequenza (nella Figura 6.1*c* la frequenza è circa il quadruplo di quella della Figura 6.1*b*). A parità di $\mathbf{H}_T$ e al crescere della frequenza, la densità della corrente cresce a ridosso della superficie e diviene sempre più debole nel volume del conduttore. Quindi la corrente si addensa in una pellicola superficiale, tanto più sottile quanto maggiore è la frequenza (effetto "pelle"). La lunghezza δ prende il nome di "spessore della pelle".

Nei metalli ad alta conducibilità, anche a frequenze dell'ordine della decina di megahertz, lo spessore della pelle è talmente piccolo da permettere di assimilare il campo di corrente a una lamina concentrata sulla superficie del conduttore. Questo tipo di modellizzazione è tanto più aderente alla realtà quanto più elevata è la frequenza e/o la conducibilità. La densità $\mathbf{J}_s$ della corrente sulla lamina viene determinata imponendo che l'intensità della corrente che attraversa un segmento AB di lunghezza L posto sulla lamina (cioè $\mathbf{m} \cdot \mathbf{J}_s L$, vedi Figura 6.2) sia uguale alla corrente che in realtà fluisce attraverso il rettangolo ABCD. Nel calcolo i punti C e D vengono considerati all'infinito perché - teoricamente - $\mathbf{J}$ si annulla solo all'infinito. Si ha:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{J}_s \, L = L \int_0^\infty \mathbf{m} \cdot \mathbf{J} \, dz = L\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_T \times \mathbf{u}_z \frac{1+j}{\delta} \int_0^\infty e^{-z/\delta} \cdot e^{-jz/\delta} \, dz = \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_T \times \mathbf{u}_z L$$

e quindi, grazie all'arbitrarietà di AB, si deduce:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{H}_T \times \mathbf{u}_z \qquad (6.3)$$

I precedenti risultati permettono la seguente generalizzazione. Si consideri un corpo metallico qualsiasi (Figura 6.3) in cui esiste un campo a frequenza tanto alta da poter assumere che lo spessore della pelle sia molto minore di tutte le dimensioni caratteristiche del corpo e delle minime distanze per le quali si hanno apprezzabili variazioni di $\mathbf{H}_T$ sulla superficie. Se sono verificate queste ipotesi, intorno a un generico punto P preso sulla superficie del conduttore è possibile considerare un elemento di superficie ΔS di dimensioni molto maggiori di δ, ma - ciò nonostante - tanto piccolo da poter supporre che l'elemento sia piano e che su di esso $\mathbf{H}_T$ sia costante. È spontaneo assumere che, in corrispondenza di ΔS, l'andamento del campo e della corrente all'interno del conduttore sia molto prossimo a quello studiato precedentemente; pertanto, indicando con $\mathbf{n}$ la normale alla superficie del conduttore orientata nel verso *entrante*, le espressioni (6.1) e

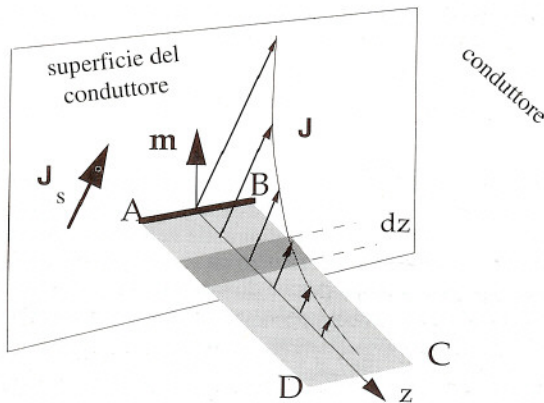



Figura 6.2

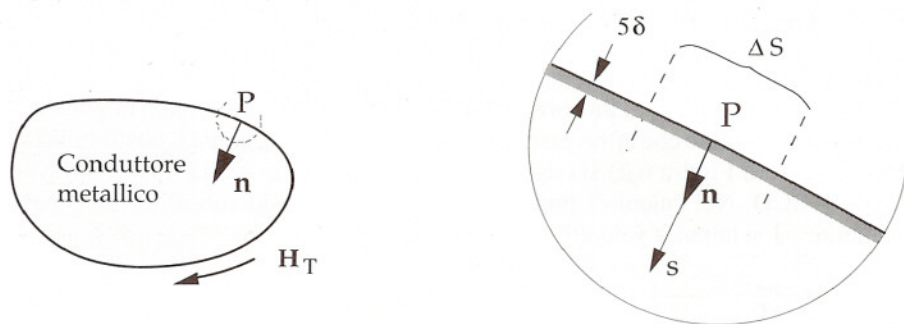



Figura 6.3

(6.2) possono essere usate per rappresentare approssimativamente la corrente in prossimità del punto P, purché $\mathbf{u}_z$ sia sostituito da $\mathbf{n}$ e z sia sostituita da una coordinata s presa su un asse locale, con origine in P e diretto come $\mathbf{n}$ (Figura 6.3). La corrente risulta addensata in uno strato superficiale il cui spessore (dell'ordine di 5δ) è piccolissimo rispetto a tutte le dimensioni del corpo. In questa situazione si parla di "effetto pelle spinto".[1]

In condizioni di effetto pelle spinto tutti i risultati ottenuti per l'onda piana propagantesi nel semispazio riempito di conduttore sono applicabili a corpi di forma qualsiasi. In particolare, dalla prima delle (6.1) e dalla (6.3) si deduce

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_T = R_s\,(1 + j)\,\mathbf{H}_T \qquad \mathbf{J}_s = \mathbf{H}_T \times \mathbf{n}$$

dove $\mathbf{E}_T$ rappresenta il campo elettrico immediatamente all'interno del conduttore e $\mathbf{J}_s$ è la densità della corrente sulla lamina che approssima l'effettiva distribuzione delle correnti nello strato superficiale. $\mathbf{E}_T$ è tangenziale alla superficie del conduttore.

Il campo elettrico e il campo magnetico tangenziali sono continui attraverso la superficie del conduttore (la corrente non è effettivamente concentrata sulla superficie). Pertanto, nelle precedenti relazioni $\mathbf{E}_T$ e $\mathbf{H}_T$ possono essere considerati indifferentemente come campi tangenziali presi all'interno o all'esterno del conduttore. Dunque, indicando con $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ i campi sulla faccia *esterna* della superficie, si può scrivere

$$\mathbf{H}_T \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} \qquad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_T = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$$

---

1 Ad esempio in un corpo di rame di dimensioni maggiori di 1mm l'effetto pellicolare è spinto già a frequenze di alcuni megahertz. A frequenze più basse la corrente tende pure ad addensarsi vicino alla superficie, ma la densità di corrente non è trascurabile nelle parti più interne del conduttore. Ciò nonostante, anche in questo caso si parla di effetto pelle. Lo studio dell'effetto pelle a bassa frequenza è meno semplice di quello qui riportato, poiché diviene importante la forma del conduttore. Esso è comunque abbastanza agevole nel caso di conduttori di forma semplice, come ad esempio nel caso di un filo a sezione circolare (vedi Ramo, Whinnery, Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, J. Wiley & Sons, N.Y. 1967, § 5.16). Lo studio della distribuzione di corrente in un filo mostra fra l'altro che - come è facilmente intuibile - l'effetto pellicolare può essere ignorato quando il diametro del filo è piccolo rispetto alla profondità di penetrazione. Solo in questo caso è lecito assumere che la densità di corrente sia uguale in tutto il filo, come avviene per le correnti continue. Nelle più comuni applicazioni delle onde si è sempre in condizioni di effetto pelle spinto.

Pertanto le precedenti relazioni possono essere poste nella forma seguente, in cui figurano i campi sulla faccia esterna della superficie del conduttore:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = R_s\,(1 + j)\,\mathbf{H}_T \qquad \textit{(condizione di Leontovic)} \qquad (6.4)$$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{H} \times \mathbf{n} \qquad (6.5)$$

Nello studio dei campi monocromatici le superfici su cui le componenti tangenziali del campo sono soggette a condizioni del tipo

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \zeta\,\mathbf{H}_T$$

vengono dette "superfici (o pareti) d'impedenza" e la quantità scalare ζ è chiamata "impedenza superficiale" (o "impedenza della parete"). La condizione di Leontovic indica che *in condizioni di effetto pelle spinto la superficie di un buon conduttore si comporta come una parete d'impedenza.* L'impedenza superficiale è data da $R_s(1 + j)$. La quantità R_s è la "resistenza superficiale" del conduttore. Come si vedrà nei capitoli successivi la condizione di Leontovic, può essere usata come condizione al contorno per studiare il campo nella regione *esterna* ai corpi conduttori.[1]

In condizioni di effetto pelle spinto la potenza elettromagnetica viene dissipata in prossimità della superficie del conduttore. Dopo aver determinato $\mathbf{H}_T$ attraverso lo studio del campo all'esterno del conduttore, è possibile determinare la potenza dw dissipata in corrispondenza di ogni elemento dS di superficie, osservando che tale potenza è uguale a quella che penetra nel conduttore attraverso dS. Poiché immediatamente all'interno del conduttore si ha

$$W = \frac{R_s}{2}\mathbf{H}_T \cdot \mathbf{H}_T^* = \frac{R_s}{2}(\mathbf{H}_T \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_T^* \times \mathbf{n}) = \frac{R_s\,\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{J}_s^*}{2}$$

la potenza dw dissipata in corrispondenza di dS è

$$dw = \frac{R_s\,|\mathbf{H}_T|^2}{2}\,dS = \frac{R_s\,|\mathbf{J}_s|^2}{2}\,dS \qquad (6.6)$$

---

1 La determinazione del campo all'esterno permette in particolare di trovare il campo magnetico tangenziale ai conduttori. Solo se le variazioni del campo così determinato sono piccolissime entro distanze dell'ordine di δ, il risultato del calcolo è accettabile; infatti, se così non fosse, esso sarebbe in contrasto con una delle ipotesi su cui è stata basata la presente trattazione dell'effetto pelle. In pratica, come si avrà modo di constatare in seguito, le variazioni del campo esterno sono tipicamente apprezzabili su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda nel mezzo esterno, che è generalmente molto maggiore di δ. Pertanto la condizione di Leontovic può essere applicata quasi sempre, purché - beninteso - la profondità di penetrazione sia piccola rispetto allo spessore dei conduttori.

Pertanto la potenza totale dissipata in un corpo conduttore delimitato dalla superficie S è:

$$w = \frac{R_s}{2} \int_S |\mathbf{H}_T|^2 \, dS = \frac{R_s}{2} \int_S |\mathbf{J}_s|^2 \, dS \tag{6.7}$$

L'impedenza superficiale dei metalli ad alta conducibilità è piccolissima anche a frequenze molto elevate. Per questa ragione, nella determinazione del campo all'esterno dei conduttori, si assume molto spesso che essa sia nulla, così che la condizione di Leontovic assume la forma semplicissima:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \qquad \textit{(condizione di parete elettrica)} \tag{6.8}$$

Secondo questa condizione il campo elettrico è normale alle superfici metalliche. Considerare nulla l'impedenza superficiale equivale ad assumere che il metallo sia un "conduttore perfetto", cioè un mezzo di conducibilità infinitamente elevata (si noti che $R_s \to 0$ implica $\sigma \to \infty$). Assimilare i corpi metallici a conduttori perfetti semplifica notevolmente il calcolo del campo esterno, perché la condizione di parete elettrica è più semplice della condizione di Leontovic.

Dentro un conduttore perfetto il campo è nullo, perché lo spessore della pelle è infinitesimo. D'altro canto il campo magnetico sulla faccia esterna della superficie è generalmente diverso da zero, così che **H** è discontinuo. Questo non deve meravigliare: infatti, nel caso limite del conduttore perfetto, la corrente è *effettivamente* concentrata in una lamina e dà luogo alla discontinuità.

Fino a frequenze dell'ordine del migliaio di gigahertz (e anche oltre) la resistenza superficiale dei metalli ad alta conducibilità è talmente piccola da rendere del tutto giustificato assimilare i corpi metallici a conduttori perfetti, almeno per un calcolo di prima approssimazione del campo esterno.

2.7 Onde piane evanescenti

Si consideri nuovamente un campo del tipo (1.1), in cui però:

$$\psi = A\, e^{-(\alpha \mathbf{u}' + j\beta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}} = A\, e^{-\alpha \mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}} e^{-j\beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \tag{7.1}$$

dove α e β sono costanti scalari non negative e **u**, **u**' sono versori reali costanti e non coincidenti. ψ rappresenta un'onda piana che si propaga nella direzione **u** con la velocità $v = \omega/\beta$, e si attenua nella direzione **u**' con la costante d'attenuazione α (Figura 7.1). L'ampiezza dell'onda è costante sui piani perpendicolari a **u**', che non coincidono con i piani equifase. Pertanto l'onda considerata non è uniforme.

L'espressione $\mathbf{E} = \mathbf{p}\psi$ è formalmente simile a quella considerata nel caso delle onde piane uniformi (in luogo del vettore costante $\gamma\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + j\beta\,\mathbf{u}$ si ha il vettore costante $\alpha\mathbf{u}' + j\beta\,\mathbf{u}$). Pertanto gli sviluppi che portano a determinare le condizioni sotto le quali l'onda considerata soddisfa le equazioni di Maxwell sono analoghi a quelli visti nel Paragrafo 1. Si trovano le seguenti condizioni:

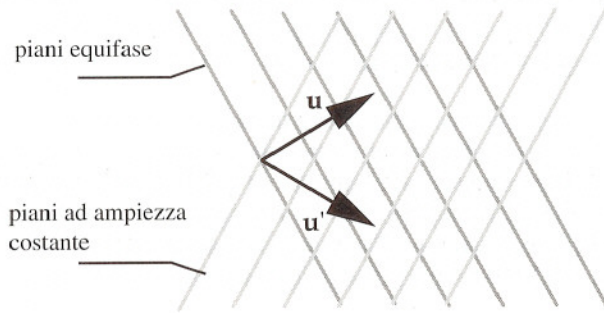



Figura 7.1

$$(\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p} = 0 \tag{7.2}$$

$$k^2\, \mathbf{p} = (\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}) \times [(\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}) \times \mathbf{p}] \qquad (k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu) \tag{7.3}$$

Risulta inoltre che il campo magnetico deve essere del tipo:

$$\mathbf{H} = \frac{\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}}{j\omega\mu} \times \mathbf{p}\psi \tag{7.4}$$

Per la (7.2), sviluppando il doppio prodotto vettoriale nella (7.3), si ottiene:

$$k^2\, \mathbf{p} = [(\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p}]\, (\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}) - [(\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}) \cdot [(\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u})]\, \mathbf{p} =$$
$$(\beta^2 - \alpha^2 - j2\alpha\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\, \mathbf{p}$$

Dunque per la (7.3) deve aversi:

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - j2\alpha\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$$

ovvero:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \operatorname{Re} k^2 \\ 2\alpha\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = -\operatorname{Im} k^2 \end{cases} \tag{7.5}$$

In conclusione un campo del tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{p}\, A\, e^{-\alpha\, \mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}}\, e^{-j\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{H} &= \frac{\alpha\, \mathbf{u}' + j\beta\, \mathbf{u}}{j\omega\mu} \times \mathbf{p}\, A\, e^{-\alpha\, \mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}}\, e^{-j\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \tag{7.6}$$

verifica le equazioni di Maxwell se α e β soddisfano le (7.5), e se **p** soddisfa la (7.2).

L'onda (7.6) non è un'onda TEM perché non è possibile che siano contemporaneamente verificate le condizioni $\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{H} = 0$. Sono invece possibili onde TE (trasversali elettriche, in cui solo **E** è ortogonale a **u**) o onde TM (trasversali magnetiche, in cui solo **H** è trasversale a **u**).

Nelle onde TE il vettore di polarizzazione deve essere ortogonale al piano formato da **u** e da **u'**, in modo che esso, oltre ad essere ortogonale alla direzione di propagazione, soddisfi anche la (7.2). Dall'espressione di **H** risulta che in questo caso il campo magnetico giace sul piano suddetto, perché sia $j\beta\, \mathbf{u} \times \mathbf{p}$ che $\alpha\, \mathbf{u}' \times \mathbf{p}$ giacciono su questo piano. Il secondo di questi vettori, però, non è normale a **u** e, inoltre, esso è in quadratura con il primo. Ne consegue che, in generale, nelle onde TE il campo magnetico è polarizzato ellitticamente sul piano formato da **u** e **u'**.

Analoghe considerazioni portano a concludere che sono possibili onde TM con il campo magnetico polarizzato linearmente in direzione perpendicolare a **u** e **u'**, e il campo elettrico polarizzato ellitticamente sul piano formato dai due versori.[1]

Se il mezzo è un dielettrico senza perdite risulta $\mathrm{Im}\, k^2 = 0$. In questo caso il sistema (7.5) diviene:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = k^2 \\ 2\alpha\beta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0 \end{cases}$$

Quindi, si hanno solo le seguenti possibilità:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \alpha = 0 & \beta = k & \\ \text{b)} & \mathbf{u}' \perp \mathbf{u} & \beta > k & \alpha = \sqrt{\beta^2 - k^2} \end{array} \qquad (7.7)$$

Il caso a) non presenta nulla di nuovo: esso è quello della solita onda piana uniforme che si propaga senza attenuazione nella direzione **u**. Il caso b) è invece quello di un'onda la cui ampiezza decresce esponenzialmente in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione ("onda evanescente").

Dunque, in un dielettrico senza perdite, la classe delle soluzioni del tipo (7.6) comprende, oltre alle onde piane uniformi, le onde evanescenti corrispondenti a tutte le coppie di versori **u** e **u'** perpendicolari fra loro, e a tutti i valori della costante di fase maggiori di quello delle onde piane uniformi (cioè di k). Siccome nelle onde evanescenti si ha sempre $\beta > k$, tali onde possono avere velocità e lunghezza d'onda qualsiasi, comprese fra zero e quelle delle onde piane uniformi (c/n, λ_0/n).

Le onde che si propagano con velocità minore di c/n vengono dette "lente"; dunque le onde evanescenti sono esempi di onde lente. La costante di attenuazione è tanto più alta quanto più grande è β, ovvero quanto più è lenta l'onda.

---

1 La sovrapposizione di un'onda TE e di un'onda TM, con gli stessi versori **u'** e **u** e con valori di A scelti arbitrariamente nelle due onde, è ancora un'onda del tipo (7.6). Essa però non è né TE né TM. Variando indipendentemente i valori di A nelle due onde si può rappresentare qualsiasi onda del tipo (7.6). Al contrario, qualsiasi onda del tipo (7.6) può essere scomposta in un'onda TE e in un'onda TM.

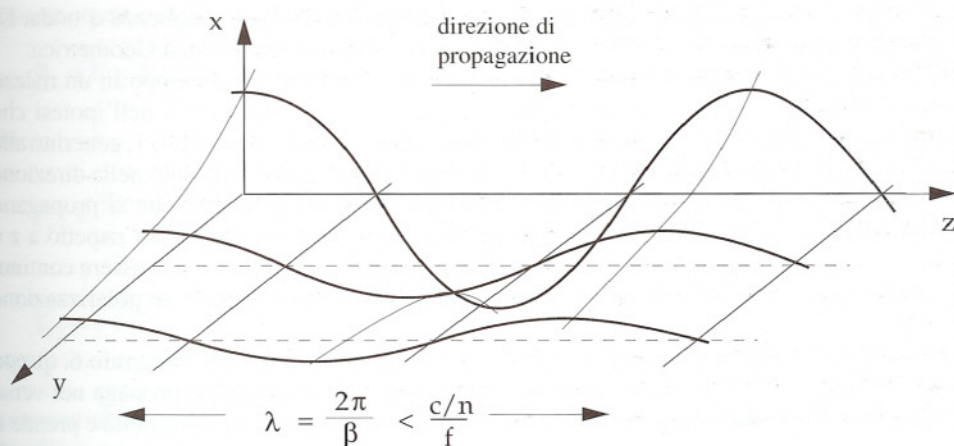



Figura 7.2

Ad esempio, in un dielettrico senza perdite, il campo

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_x\, A\, e^{-\alpha\, \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{r}}\, e^{-j\beta\, \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{u}_x\, A\, e^{-\alpha y}\, e^{-j\beta z}$$

$$\left(\beta > k,\ \alpha = \sqrt{\beta^2 - k^2}\right)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{\beta\, \mathbf{u}_z + j\alpha\, \mathbf{u}_y}{\omega\, \mu}\, A\, e^{-\alpha y}\, e^{-j\beta z}$$

rappresenta un'onda piana evanescente di tipo TE che si propaga nella direzione z e si attenua nella direzione y. Il campo elettrico istantaneo è

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_x\, |A|\, e^{-\alpha y} \cos\left[\omega t - \beta z + \varphi_A\right]$$

dove φ_A è l'argomento di A. Il suo andamento spaziale, considerato in un certo istante, è rappresentato nella Figura 7.2.

2.8 Riflessione e trasmissione nel caso di incidenza normale

Sovrapponendo onde piane uniformi e/o evanescenti si ottengono nuove soluzioni delle equazioni di Maxwell. Considerando due sole onde, si ottengono espressioni adatte a rappresentare il campo in un "mezzo stratificato", cioè un mezzo in cui ε e μ variano bruscamente attraverso uno o più piani paralleli. Lo studio del campo spiega il fenomeno della riflessione e della trasmissione delle onde in corrispondenza delle superfici di discontinuità del mezzo. Sebbene l'ipotesi che le onde in gioco siano piane costituisca una idealizzazione che non ha riscontro nella realtà, i risultati ottenuti si prestano ad essere applicati in situazioni reali, quando i fronti d'onda e/o le superfici di discontinuità non sono

piane, purché i loro raggi di curvatura siano molto maggiori della lunghezza d'onda. Di questo si parlerà più diffusamente nel Capitolo 9, a proposito dell'Ottica Geometrica.

Il problema più semplice è quello in cui si vuole rappresentare il campo in un mezzo comprendente un solo piano di discontinuità (piano $z = 0$, Figura 8.1), nell'ipotesi che opportune sorgenti, poste alla sinistra di una certa ascissa z_0 presa nel mezzo 1, generino alla destra di z_0 un campo indipendente da x e da y. Poiché i campi variano solo nella direzione di z, nella regione $z > z_0$ il campo sarà dato da onde piane uniformi che si propagano perpendicolarmente al piano di discontinuità. Sia **E** che **H** sono trasversali rispetto a z e quindi sono tangenziali all'interfaccia fra i due mezzi; pertanto essi devono essere continui in $z = 0$, cosa che è possibile solo se tutte le onde hanno lo stesso vettore di polarizzazione **p**.

La regione 2 è illimitata a destra e non contiene sorgenti. Come nel Paragrafo 6, questo porta ad assumere che in questa regione si abbia una sola onda che si propaga nel verso positivo di z. Tale onda viene trasmessa attraverso la superficie di discontinuità e prende il nome di "onda trasmessa". Il campo dell'onda trasmessa è del tipo:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{p}\, A_2\, e^{-\gamma_2 z} \qquad \mathbf{H}_2 = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\, (A_2/\eta_2)\, e^{-\gamma_2 z} \qquad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_z = 0) \tag{8.1}$$

(in questo paragrafo gli indici 1 e 2 contrassegnano quantità relative alle due regioni). Nella regione 1 non si può avere una sola onda; infatti, se così fosse, il rapporto fra le ampiezze di **E** e di **H** sarebbe determinato dall'impedenza caratteristica η_1 e non potrebbe essere uguale a quello che si ha nel mezzo 2, come invece è richiesto dalla condizione di continuità dei campi. Pertanto nella regione 1 devono essere presenti due onde che si propagano in verso opposto. Quindi il campo è del tipo:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{p}\, (A_1\, e^{-\gamma_1 z} + B_1\, e^{\gamma_1 z}) \tag{8.2a}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\, (A_1\, e^{-\gamma_1 z} - B_1\, e^{\gamma_1 z})/\eta_1 \tag{8.2b}$$

(il segno meno nell'ultima espressione dipende dal fatto che la seconda onda si propaga nella direzione $-\mathbf{u}_z$). L'onda che si propaga verso l'interfaccia prende il nome di "onda incidente", l'altra di "onda riflessa".

Affinché i campi tangenziali siano continui in $z = 0$ deve risultare:

$$A_1 + B_1 = A_2 \qquad (A_1 - B_1)/\eta_1 = A_2/\eta_2$$

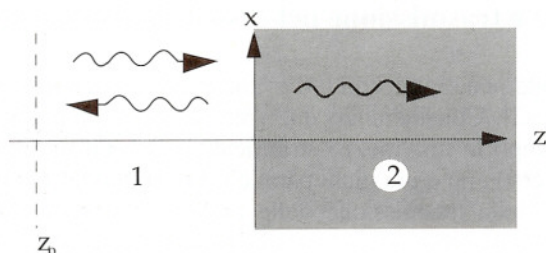



Figura 8.1

Queste equazioni permettono di esprimere B_1 e A_2 in funzione di A_1. Si ottiene:

$$B_1 = \Gamma_{12} A_1 \qquad A_2 = T_{12} A_1 \tag{8.3}$$

dove:

$$\Gamma_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{8.4}$$

$$T_{12} = 1 + \Gamma_{12} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{8.5}$$

Le quantità adimensionali Γ_{12} e T_{12} prendono il nome di "coefficiente di riflessione" e di "coefficiente di trasmissione" dell'interfaccia.

Le densità della potenza incidente e della potenza riflessa, considerate a ridosso dell'interfaccia,[1] sono rispettivamente:

$$W_i = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\eta^*_1}\right)\frac{|A_1|^2}{2} \qquad W_r = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\eta^*_1}\right)\frac{|B_1|^2}{2}$$

Si ha quindi:

$$\frac{W_r}{W_i} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |\Gamma_{12}|^2 \qquad \textit{(coefficiente di riflessione della potenza)}$$

Poiché la densità della potenza trasmessa immediatamente al di là dell'interfaccia è $W_t = W_i - W_r$ si ha pure:

$$\frac{W_t}{W_i} = 1 - |\Gamma_{12}|^2 \qquad \textit{(coefficiente di trasmissione della potenza)}$$

ESEMPIO 1: INTERFACCIA FRA DIELETTRICI A BASSA PERDITA Esprimendo le impedenze caratteristiche in funzione degli indici di rifrazione (n_1, n_2) dei due dielettrici, si ottiene:

$$\Gamma_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad T_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tag{8.6}$$

I coefficienti di riflessione e di trasmissione sono reali. Il coefficiente di trasmissione è sempre positivo, mentre il coefficiente di riflessione è positivo quando il secondo mezzo è "meno denso" del primo ($n_2 < n_1$), negativo in caso contrario. Ciò significa che nel caso di

1 Questa precisazione è superflua se in entrambe le regioni il mezzo è senza perdite.

passaggio da un mezzo più denso a uno mezzo meno denso (esempio vetro/aria) B_1 e A_1 sono in fase, mentre sono in opposizione di fase nel passaggio da un mezzo meno denso a uno più denso (esempio aria/vetro).

ESEMPIO 2: INTERFACCIA FRA UN DIELETTRICO A BASSA PERDITA E UN PLASMA CHE NON PERMETTE LA PROPAGAZIONE Il plasma (isotropo e senza collisioni) non permette la propagazione se $\omega < \omega_p$. In questo caso l'impedenza caratteristica del secondo mezzo è immaginaria ed è data dalla (4.3). Si ottiene:

$$\Gamma_{12} = -\frac{\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1} - jn_1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1} + jn_1} \qquad \Gamma_{12} = \frac{j2n_1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1} + jn_1} \tag{8.7}$$

Entrambi i coefficienti sono complessi. Inoltre il modulo del coefficiente di riflessione è unitario, cosicché tutta la potenza incidente viene riflessa (riflessione totale). Ciò non significa che il campo nel plasma è nullo, ma solo che esso non trasmette potenza. Infatti il campo nel plasma è evanescente e non trasporta potenza attiva (vedi Equazione 4.2-3).

ESEMPIO 3: INTERFACCIA FRA DIELETTRICO E CONDUTTORE METALLICO Si ha $\eta_2 = R_s(1 + j)$ e quindi:

$$\Gamma_{12} = -\frac{1-(1+j)n_1 R_s / \eta_0}{1+(1+j)n_1 R_s / \eta_0} \qquad T_{12} = \frac{2(1+j)n_1 R_s / \eta_0}{1+(1+j)n_1 R_s / \eta_0} \tag{8.8}$$

Siccome il rapporto R_s/η_0 è sempre molto piccolo, trascurando termini dell'ordine di $(R_s/\eta_0)^2$ si ottiene:

$$\Gamma_{12} \approx -1 + 2(1+j)\frac{n_1 R_s}{\eta_0} \qquad T_{12} \approx 2(1+j)\frac{n_1 R_s}{\eta_0}$$

I coefficienti di riflessione e di trasmissione per la potenza sono:

$$|\Gamma_{12}|^2 \approx 1 - 4\frac{n_1 R_s}{\eta_0} \qquad 1-|\Gamma_{12}|^2 \approx 4\frac{n_1 R_s}{\eta_0} \tag{8.9}$$

Nel caso dei metalli ad alta conducibilità, fino alle più alte frequenze nella gamma delle onde millimetriche, quasi tutta la potenza incidente viene riflessa (la piccola parte trasmessa viene assorbita nelle immediate vicinanze della superficie). Ad esempio, per il rame, l'argento e l'alluminio fino a un centinaio gigahertz si ha $R_s < 100$ mΩ; pertanto la potenza riflessa differisce da quella incidente per meno di 1/1000. Il coefficiente di riflessione è molto prossimo a -1. Nel vicino infrarosso e nel visibile la potenza riflessa può differire di qualche percento da quella incidente.

I campi sulla superficie del conduttore sono ottenuti ponendo z = 0 nella (8.1). Si ha:

$$\mathbf{E}_{sup} = \mathbf{p}\,A_2 \approx 2(1+j)\frac{n_1\,R_s}{\eta_0}\mathbf{p}\,A_1 = 2(1+j)\frac{n_1\,R_s}{\eta_0}\mathbf{E}_{0i}$$

$$\mathbf{H}_{sup} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\frac{A_2}{R_s(1+j)} \approx 2\,\mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\frac{A_1}{\eta_0/n_1} = 2\,\mathbf{H}_{0i}$$

dove $\mathbf{E}_{0i}$ e $\mathbf{H}_{0i}$ sono i campi dell'onda incidente, considerati sul piano di discontinuità. Si noti che il campo elettrico sull'interfaccia è molto più piccolo di quello incidente, mentre il campo magnetico è circa il doppio.

È appena il caso di osservare che, a causa dell'effetto pelle, i risultati ottenuti sono praticamente validi anche quando il conduttore non occupa l'intero semispazio $z > 0$, purché lo spessore della regione occupata dal conduttore sia sufficentemente maggiore dello spessore della pelle (es. > 5δ). In questo caso, infatti, l'onda trasmessa è praticamente estinta prima di avere attraversato l'intero spessore del conduttore, e quindi il fatto che lo spessore stesso sia finito è ininfluente.

Nel caso limite del conduttore perfetto si ha

$$\Gamma_{12} = -1 \qquad \mathbf{E}_{sup} = 0 \qquad \mathbf{H}_{sup} = 2\mathbf{H}_{0i}$$

In questo caso la potenza incidente viene totalmente riflessa.

2.9 Onde stazionarie

Se il mezzo 2 è un conduttore perfetto si ha $B_1 = -A_1$; pertanto:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{p}\,A_1(e^{-\gamma_1 z} - e^{\gamma_1 z}) = -\mathbf{p}\,2A_1 \sinh\gamma_1 z$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}A_1(e^{-\gamma_1 z} + e^{\gamma_1 z})\,/\,\eta_1 = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\,2(A_1/\eta_1)\,\cosh\gamma_1 z$$

Se il mezzo 1 è senza perdite, si ha $\gamma_1 = j\,2\pi/\lambda_1$. Pertanto risulta (si omette l'indice 1):

$$\mathbf{E} = -\mathbf{p}\,j2A\sin\frac{2\pi z}{\lambda} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\frac{2A}{\eta}\cos\frac{2\pi z}{\lambda} \tag{9.1}$$

Si nota che la fase dei campi non dipende dalle coordinate (a parte un salto di 180° in corrispondenza dei valori di z in cui le funzioni trigonometriche cambiano segno). Pertanto le funzioni (9.1) *non* rappresentano onde che si propagano. Ad esempio, nel caso $\mathbf{p} = \mathbf{u}_x$ e assumendo che A sia reale, il campo istantaneo è:

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_x\,2A\sin\frac{2\pi z}{\lambda}\sin\omega t \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}_y\,\frac{2A}{\eta}\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\omega t$$

Le Figure 9.1*a*, *b* rappresentano l'andamento dei campi in istanti considerati a intervalli di tempo distanti 1/8 di periodo. Nelle sezioni di ascisse 0, $-\lambda/2$, $-\lambda$, $-3\lambda/2$, ecc. il campo elettrico è sempre nullo ("nodi" del campo elettrico) mentre il campo magnetico raggiunge la massima intensità ("antinodi" del campo magnetico). Il contrario avviene alle ascisse $-\lambda/4$, $-3\lambda/4$, ecc. Poiché la fase non dipende dalle coordinate il campo elettrico si annulla ovunque negli istanti 0, T/2, T, ecc.; lo stesso accade per il campo magnetico negli istanti T/4, 3T/4, 5T/4, ecc. Le oscillazioni del campo elettrico e del campo magnetico sono sfasate di 1/4 di periodo; quindi negli istanti in cui il campo elettrico è nullo il campo magnetico è massimo, in quelli in cui il campo elettrico è massimo il campo magnetico è nullo.

Un simile andamento spazio-temporale viene detto *onda stazionaria*. La formazione dei nodi nell'onda stazionaria dipende dal fatto che l'ampiezza dell'onda riflessa uguaglia quella dell'onda incidente; per questa ragione i campi delle due onde si cancellano nei punti in cui essi risultano in opposizione di fase (interferenza distruttiva). In corrispondenza degli antinodi, dove i campi delle due onde sono in fase, i campi si sommano (interferenza costruttiva) e danno luogo a un campo di intensità doppia.[1]

Poiché il conduttore perfetto non dissipa potenza, c'è da attendersi che la potenza attiva trasmessa verso il conduttore sia nulla. In effetti il vettore di Poynting ottenuto dalle (9.1) è immaginario.[2]

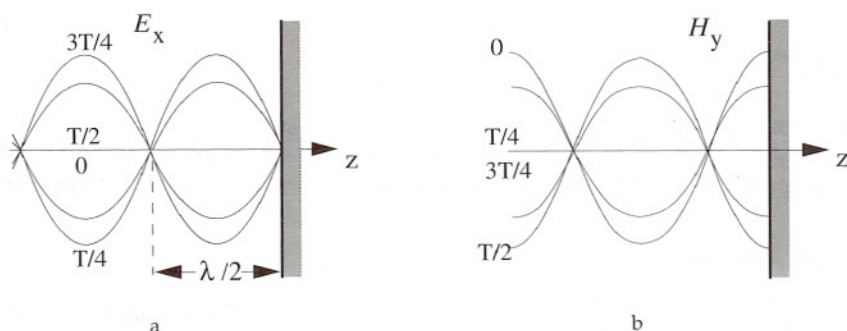



Figura 9.1

1 Queste considerazioni fanno comprendere che le onde stazionarie si formano ogni qualvolta si ha una riflessione totale. Ciò avviene in tutti i casi in cui il secondo mezzo non permette la propagazione (es. plasma a bassa frequenza). In questi casi però, non è detto che sulla superficie di discontinuità si debba avere necessariamente un nodo del campo elettrico, poiché non è detto che l'argomento del coefficiente di riflessione sia π, come nel caso del conduttore perfetto. In ogni caso la distanza fra due nodi successivi è pari a mezza lunghezza d'onda.

2 In presenza di due onde che si propagano in verso opposto in un mezzo senza perdite si mostra facilmente che la potenza netta che fluisce nel verso di z è ovunque data dalla differenza fra la potenza trasportata dall'onda incidente e la potenza trasportata dall'onda riflessa. Nel caso della riflessione totale le due potenze sono uguali, cosicché - anche per questa via - si vede che la potenza netta è nulla.

2.10 Coefficiente di riflessione - diagrammi d'onda stazionaria - impedenza d'onda

In questo paragrafo vengono introdotti alcuni concetti che servono a facilitare lo studio delle onde in un mezzo stratificato, come quello rappresentato nella Figura 10.1. Le caratteristiche del mezzo sono costanti all'interno di ciascuno strato e variano bruscamente passando da uno strato all'altro. Le sorgenti (poste alla sinistra della regione stratificata) creano un campo indipendente dalle coordinate x, y, rappresentabile in ogni strato come sovrapposizione di due onde che si propagano in versi opposti lungo l'asse z. In ogni strato l'onda che si propaga nel verso positivo incide sull'interfaccia di destra ("onda incidente"); le riflessioni dovute a questa interfaccia e a tutte quelle che la seguono danno luogo all'onda di ritorno ("onda riflessa"). Nell'ultima regione, che è illimitata, si ha una sola onda che si propaga verso l'infinito.

Tutte le onde hanno la stessa polarizzazione, come è richiesto dalla condizione di continuità dei campi, pertanto la polarizzazione del campo elettrico è ovunque rappresentata da uno stesso vettore **p**, quella del campo magnetico da $\mathbf{u}_z \times \mathbf{p}$. Il vettore **p** è indipendente dalla stratificazione ed è determinato dalla polarizzazione dell'onda che incide sulla prima superficie di discontinuità. Le onde che si propagano in versi opposti danno luogo a effetti di interferenza analoghi a quelli visti nel Paragrafo 9.

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE In uno strato generico il campo ha la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\,(\psi^+ + \psi^-) \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\,(\psi^+ - \psi^-)/\eta$$

$$\psi^+ = A\,e^{-\gamma z} \qquad \psi^- = B\,e^{\gamma z} \tag{10.1}$$

$(\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j\,2\pi/\lambda;$ A, B costanti complesse)

Ad una generica ascissa z (Figura 10.1) la relazione fra ψ^- e ψ^+ dipende solo dalla natura del mezzo alla destra di z. Grazie alla linearità del mezzo, essa deve essere una relazione del tipo

$$\psi^- = \Gamma\,\psi^+ \tag{10.2}$$

dove $\Gamma = \Gamma(z)$ viene detto "coefficiente di riflessione" (all'ascissa z). Da Γ dipende la relazione d'ampiezza e fase fra le due onde.

È importante determinare la legge di variazione di Γ all'interno dello strato. Sia d uno

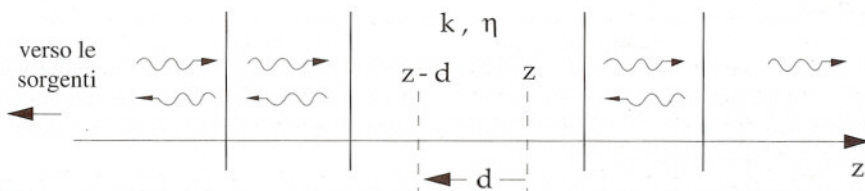



Figura 10.1

spostamento preso a partire da z verso sinistra (cioè verso la regione occupata dalle sorgenti, Figura 10.1); si ha:

$$\Gamma(z-d) = \frac{\psi^-(z-d)}{\psi^+(z-d)} = \frac{\psi^-(z)e^{-\gamma d}}{\psi^+(z)e^{\gamma d}} = \Gamma(z)e^{-2\gamma d}$$

ovvero:

$$\Gamma(z-d) = \Gamma(z)\, e^{-2\alpha d}\, e^{-j\,4\pi d/\lambda} \tag{10.3}$$

La Figura 10.2 illustra l'andamento del coefficiente di riflessione al variare della posizione. La Figura 10.2*a* si riferisce al caso di uno strato senza perdite, la Figura 10.2*b* al caso di uno strato dissipativo. In uno strato senza perdite si ha

$$\Gamma(z-d) = \Gamma(z)\, e^{-j\,4\pi d/\lambda} \qquad \textit{(strato senza perdite)} \tag{10.4}$$

Pertanto, al variare di d, il coefficiente di riflessione descrive una circonferenza, perché lo spostamento determina solo una variazione dell'argomento. Lo spostamento che fa percorrere a Γ l'intera circonferenza è pari a $\lambda/2$. Dunque, *in uno strato senza perdite il coefficiente di riflessione è una funzione periodica con periodo di mezza lunghezza d'onda.* Invece, in uno strato dissipativo, il coefficiente di riflessione è aperiodico (sul piano complesso esso descrive una spirale logaritmica, perché $|\Gamma|$ è proporzionale a $e^{-2\alpha d}$).

DIAGRAMMA D'ONDA STAZIONARIA Il campo elettrico e il campo magnetico possono essere espressi come segue:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\,\mathcal{E} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\,\mathcal{H}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \psi^+ + \psi^- = (1+\Gamma)\psi^+ && [\text{V/m}] \\ \mathcal{H} &= (\psi^+ - \psi^-)/\eta = (1-\Gamma)\psi^+/\eta && [\text{A/m}] \end{aligned} \tag{10.5}$$

I moduli di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{H}$ rappresentano le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico. Pertanto le variazioni d'ampiezza dovute all'interferenza fra le due onde dipendono dall'andamento delle funzioni $|1+\Gamma|$ e $|1-\Gamma|$. È opportuno esaminare separatamente i due casi possibili:

CASO 1: STRATO SENZA PERDITE In questo caso il modulo di ψ^+ è costante ($|\psi^+| = |A|$), così che l'ampiezza del campo elettrico varia come $|1+\Gamma|$ mentre l'ampiezza del campo magnetico varia come $|1-\Gamma|$. I due moduli sono rappresentati dalle lunghezze delle linee tratteggiate nella Figura 10.3.
Al variare di d il loro andamento tipico è quello rappresentato nella Figura 10.4*a*. A parte un fattore di scala, la curva a tratto spesso rappresenta l'ampiezza del campo elettrico, quella a tratto sottile l'ampiezza del campo magnetico. Le due curve rappresentano i cosiddetti

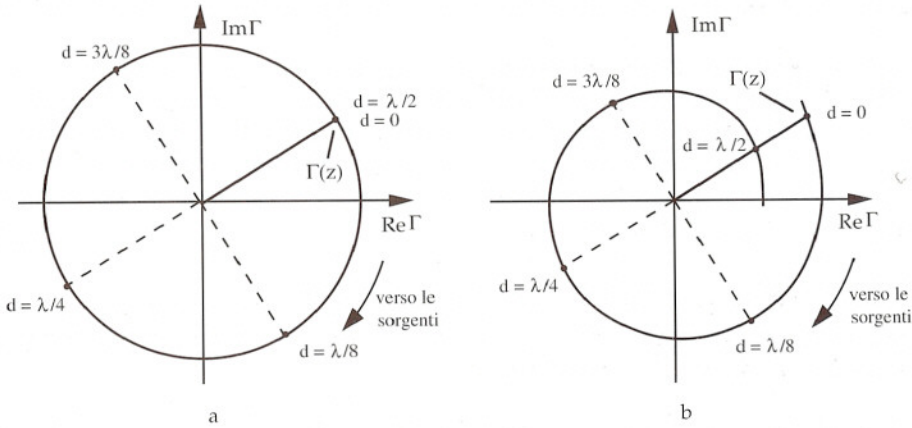



Figura 10.2

"diagrammi d'onda stazionaria", per il campo elettrico e per il campo magnetico rispettivamente.

In un mezzo senza perdite i diagrammi d'onda stazionaria sono periodici, con periodo di mezza lunghezza d'onda. Nel caso di riflessione totale ($|\Gamma| = 1$) si hanno onde stazionarie "pure", come quelle considerate nel Paragrafo 9. In questo caso i minimi dei diagrammi d'onda stazionaria sono punti di annullamento di **E** (o di **H**) e il diagramma d'onda stazionaria assume la forma di una sequenza di mezze sinusoidi (Figura 10.4*b*).

Il rapporto fra il massimo e il minimo nei diagrammi d'onda stazionaria prende il nome di "rapporto d'onda stazionaria" (ROS). Esso è dato da

$$\mathcal{R} = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{H_{max}}{H_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{10.6}$$

Il ROS è compreso fra 1 e ∞. Esso è unitario quando i massimi e i minimi coincidono, cioè

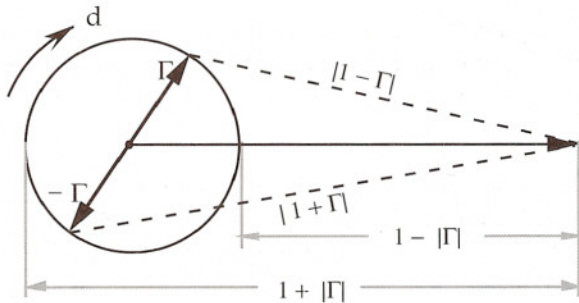



Figura 10.3

quando il diagramma d'onda stazionaria si riduce a una retta: ciò avviene quando l'onda riflessa è assente ($\Gamma = 0$). Il ROS diverge nel caso delle onde stazionarie pure (Figura 10.4*b*).

CASO 2: MEZZO DISSIPATIVO In questo caso i diagrammi d'onda stazionaria non sono più periodici, sia perché le funzioni $|1 + \Gamma|$ e $|1 - \Gamma|$ non sono periodiche, sia perché $|\psi^+|$ non è costante. L'andamento del diagramma d'onda stazionaria assume la forma indicata nella Figura 10.5. Le oscillazioni del diagramma divengono sempre meno pronunciate man mano che ci si sposta verso le sorgenti, perché il coefficiente di riflessione diviene sempre più piccolo.

IMPEDENZA D'ONDA Introducendo la "impedenza d'onda":

$$Z = \mathcal{E}/\mathcal{H} \quad [\Omega]$$

si ha:

$$\mathbf{H} \times \mathbf{u}_z = (\mathbf{u}_z \times \mathbf{p})\mathcal{H} \times \mathbf{u}_z = \mathbf{p}\,\mathcal{H} = \mathbf{p}\,\mathcal{E}/Z = \mathbf{E}/Z$$

Dunque:

$$\mathbf{E} = Z\,\mathbf{H} \times \mathbf{u}_z \tag{10.7}$$

Questa relazione è analoga a quella che vale per una singola onda che si propaga nel verso di $\mathbf{u}_z$ (vedi Equazione 1.8) e differisce da essa solo perché l'impedenza caratteristica del mezzo è rimpiazzata dall'impedenza d'onda.

Esiste una corrispondenza biunivoca fra il coefficiente di riflessione e l'impedenza d'onda. Infatti, esprimendo il rapporto $\mathcal{E}/\mathcal{H}$ mediante le (10.5) risulta:

$$Z = \eta \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{10.8}$$

da cui:

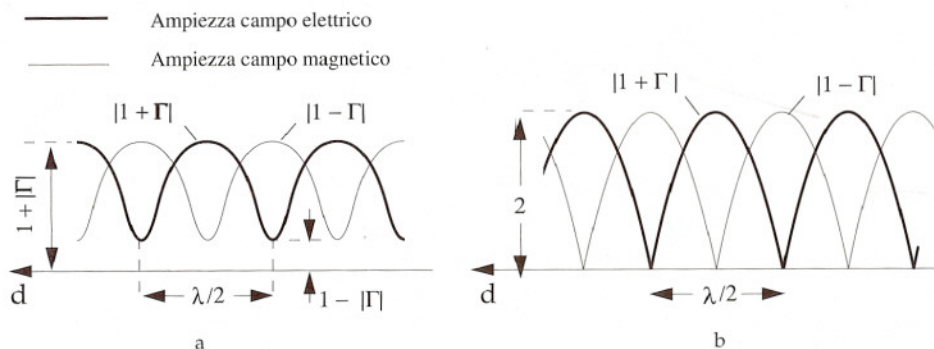



Figura 10.4

$$\Gamma = \frac{Z - \eta}{Z + \eta} \tag{10.9}$$

A differenza dell'impedenza caratteristica, l'impedenza d'onda varia con la posizione. La legge di variazione dell'impedenza d'onda può essere dedotta dalla (10.3). I calcoli, lasciati al lettore, portano alla seguente espressione:[1]

$$Z(z-d) = \eta \frac{Z(z) + \eta \, \mathrm{tgh}\, \gamma d}{\eta + Z(z)\, \mathrm{tgh}\, \gamma d} \tag{10.10}$$

Se lo strato è senza perdite si ha $\gamma d = j2\pi d/\lambda$ e la precedente espressione diviene:

$$Z(z-d) = \eta \frac{Z(z) + j\eta \, \mathrm{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}}{\eta + jZ(z)\, \mathrm{tg} \frac{2\pi d}{\lambda}} \qquad (\textit{strato senza perdite}) \tag{10.11}$$

In un mezzo senza perdite l'impedenza d'onda varia periodicamente con periodo $\lambda/2$, come il coefficiente di riflessione e come i diagrammi d'onda stazionaria. L'impedenza è reale solo in corrispondenza dei massimi e dei minimi del diagramma d'onda stazionaria; ciò si comprende immediatamente considerando la (10.8) e osservando che Γ è reale, positivo o negativo, solo nelle posizioni di massimo o di minimo rispettivamente. Il lettore può facilmente verificare che in uno strato senza perdite l'impedenza nelle posizioni di massimo e di minimo campo elettrico (Figura 10.6) è semplicemente collegata al rapporto d'onda stazionaria dalle seguenti espressioni:

$$Z_{max} = \eta \, \mathcal{R} \qquad Z_{min} = \eta/\mathcal{R} \tag{10.12}$$

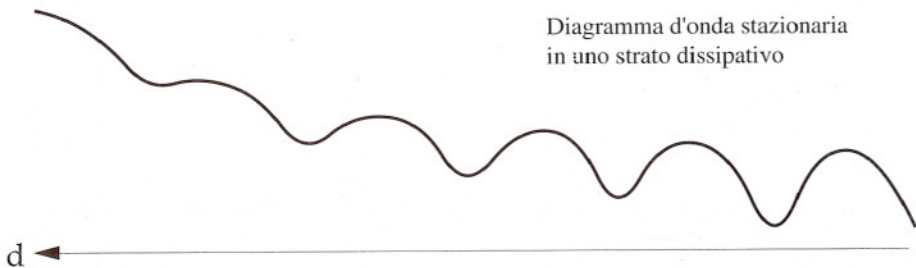



Figura 10.5

1 Si ha:

$$\mathrm{tgh}\gamma d = \mathrm{tgh}(\alpha + j\beta)d = \frac{\mathrm{tgh}\alpha d + j\mathrm{tg}\beta d}{1 + j\mathrm{tgh}\alpha d \; \mathrm{tg}\beta d} = \frac{\sinh 2\alpha d + j\sin 2\beta d}{\cosh 2\alpha d + \cos 2\beta d}$$

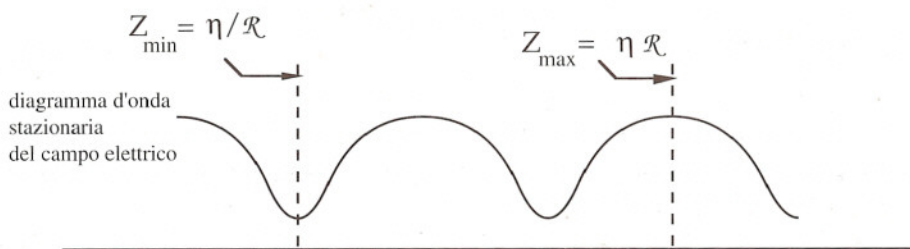



Figura 10.6

In un mezzo senza perdite e in presenza di riflessione totale, l'impedenza è nulla nei nodi del campo elettrico (nei nodi si ha $E = 0$). Quindi, indicando con z_0 l'ascissa di un nodo (Figura 10.7) e applicando la (10.11), si trova:

$$Z(z_0 - d) = j\eta \, tg \frac{2\pi d}{\lambda} \tag{10.13}$$

Quest'espressione mostra che nel caso di riflessione totale l'impedenza d'onda è reattiva. La reattanza ha l'andamento indicato in figura; essa è nulla nei nodi di **E**, infinita nei nodi di **H**.

La densità della potenza netta trasmessa nel verso positivo dell'asse z è data da:

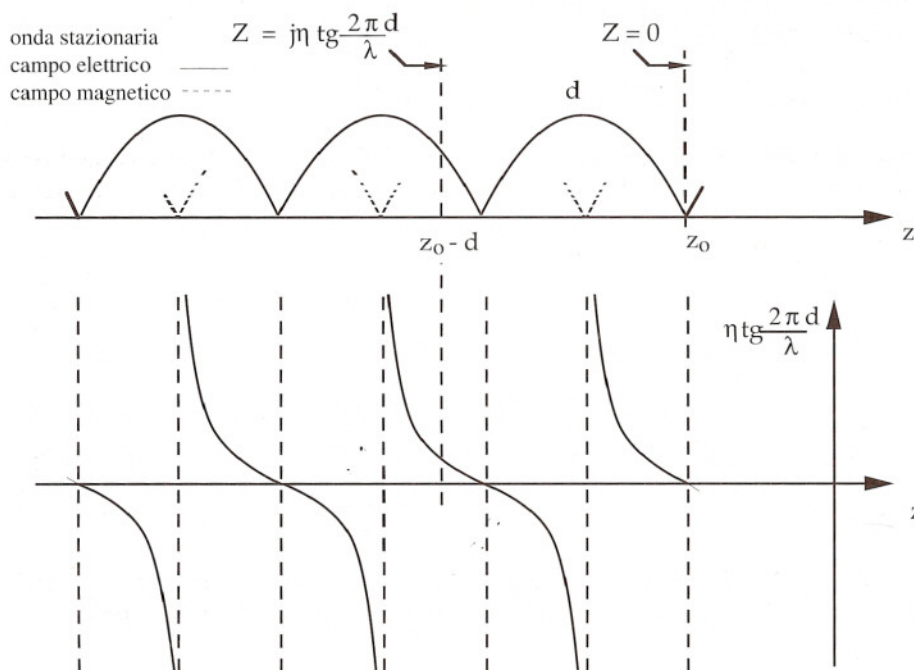



Figura 10.7

$$W = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*}{2}\cdot\mathbf{u}_z\right] = \begin{cases} \mathrm{Re}[Z]\dfrac{|\mathcal{H}|^2}{2} = \mathrm{Re}[Z]\dfrac{|H|^2}{2} \\ \mathrm{Re}[1/Z^*]\dfrac{|\mathcal{E}|^2}{2} = \mathrm{Re}[1/Z^*]\dfrac{|E|^2}{2} \end{cases} \tag{10.14}$$

Si noti che queste espressioni differiscono dalle (1.12) solo perché l'impedenza caratteristica è sostituita dall'impedenza d'onda.

Se la riflessione è totale l'impedenza è reattiva e risulta $W = 0$. Questo risultato era prevedibile, perché, nel caso della riflessione totale, la potenza trasportata dall'onda incidente torna indietro attraverso l'onda riflessa.

Nel paragrafo successivo si vedrà che l'utilità dell'impedenza d'onda nello studio della riflessione e della trasmissione in un mezzo stratificato deriva dal fatto che essa è continua attraverso le superfici di discontinuità del mezzo. La continuità dell'impedenza è conseguenza della continuità di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{H}$, che implica la continuità di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{H}$. È opportuno sottolineare che, al contrario di quanto avviene per l'impedenza, il coefficiente di riflessione è discontinuo attraverso le interfacce fra gli strati.

2.11 Riflessione e trasmissione attraverso uno strato

Nel caso della Figura 11.1 un'onda piana uniforme proveniente dalla regione 1 incide su di uno strato (regione 2) oltre il quale il mezzo è illimitato (regione 3). L'onda incide in direzione perpendicolare allo strato.

Il campo dell'onda incidente è

$$\mathbf{E}_1^+ = \mathbf{p}A_1 e^{-\gamma_1 z} \qquad \mathbf{H}_1^+ = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}(A_1/\eta_1)e^{-\gamma_1 z}$$

dove $\mathbf{p}$ e A_1 sono noti (l'origine dell'asse z è presa sulla superficie d'ingresso dello strato). Poiché la polarizzazione è uguale a quella dell'onda incidente il campo è rappresentato ovunque da espressioni del tipo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\,\mathcal{E} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\,\mathcal{H}$$

dove (vedi Equazioni 10.5 e 10.1):

$$\mathcal{E} = A_1 e^{-\gamma_1 z} + B_1 e^{\gamma_2 z} \qquad \mathcal{H} = (A_1 e^{-\gamma_1 z} - B_1 e^{\gamma_1 z})/\eta_1 \qquad (\textit{regione 1})$$

$$\mathcal{E} = A_2 e^{-\gamma_2 z} + B_2 e^{\gamma_2 z} \qquad \mathcal{H} = (A_2 e^{-\gamma_2 z} - B_2 e^{\gamma_2 z})/\eta_2 \qquad (\textit{regione 2})$$

$$\mathcal{E} = A_3 e^{-\gamma_3 (z-d)} \qquad \mathcal{H} = A_3 e^{-\gamma_3 (z-d)}/\eta_3 \qquad (\textit{regione 3})$$

A_2, A_3, B_1, B_2 sono costanti complesse dipendenti da A_1. Il campo nel mezzo 3 è costituito dalla sola onda che si propaga nel verso positivo perché il mezzo 3 è illimitato.[1]

1 L'espressione dell'onda nel mezzo 3 è stata scritta in maniera tale da avere $\mathcal{E} = A_3$ in $z = d$; così A_3 rappresenta (polarizzazione a parte) il campo elettrico sulla superficie d'uscita dello strato.

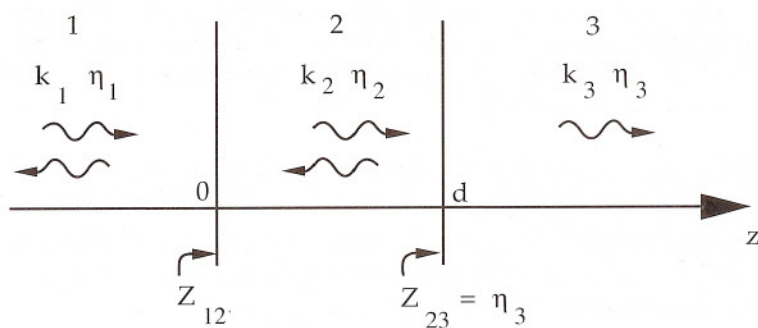



Figura 11.1

Si vogliono determinare i coefficienti B_1 e A_3, da cui dipendono l'onda riflessa nel mezzo 1 e l'onda trasmessa nel mezzo 3.

DETERMINAZIONE DIRETTA DEL COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE La relazione fra B_1 e A_1 è del tipo

$$B_1 = \Gamma_{12} A_1$$

dove Γ_{12} è il coefficiente di riflessione immediatamente prima della faccia d'ingresso dello strato ($z = 0_-$). Si desidera determinare Γ_{12}.

Poiché nella regione 3 si ha una sola onda che si propaga verso l'infinito, l'impedenza d'onda è ovunque uguale all'impedenza caratteristica η_3. Quindi, a causa della continuità delle impedenze, l'impedenza Z_{23} sulla faccia di uscita è uguale a η_3. Nella regione 2 l'impedenza varia secondo la (10.10); pertanto, indicato con d lo spessore dello strato, l'impedenza d'ingresso è data da:

$$Z_{12} = \eta_2 \frac{Z_{23} + \eta_2 \operatorname{tgh} \gamma_2 d}{\eta_2 + Z_{23} \operatorname{tgh} \gamma_2 d} = \eta_2 \frac{\eta_3 + \eta_2 \operatorname{tgh} \gamma_2 d}{\eta_2 + \eta_3 \operatorname{tgh} \gamma_2 d} \tag{11.1}$$

Dopo aver determinato Z_{12}, usando la (10.9) si trova:

$$\Gamma_{12} = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1} \tag{11.2}$$

Se lo strato è *senza perdite*, la potenza trasmessa nella regione 3 è pari alla potenza incidente diminuita della potenza riflessa. Si ha quindi

$$W_r = |\Gamma_{12}|^2 W_i \qquad W_t = (1 - |\Gamma_{12}|^2) W_i$$

dove W_i è la densità della potenza incidente, W_r quella della potenza riflessa nella regione 1 e W_t quella della potenza trasmessa nella regione 3.

Se si vuole, da W_t si può dedurre *l'ampiezza* dei campi dell'onda trasmessa mediante le

(1.12). Però il procedimento basato sulle potenze non consente di determinare la fase di quest'onda (argomento di A_3) e, inoltre, non è applicabile se lo strato è dissipativo (in questo caso il valore di W_t è inferiore a quello precedentemente trovato). Il metodo in seguito descritto è esente da tali limitazioni.

METODO DELLA MATRICE DI TRASMISSIONE Siano $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{H}_2$ i valori di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{H}$ all'ingresso e all'uscita dello strato. Dalle espressioni di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{H}$ nel mezzo 2 si deduce:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = A_2 + B_2 \\ \mathcal{H}_1 = (A_2 - B_2)/\eta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{E}_2 = A_2 e^{-\gamma_2 d} + B_2 e^{\gamma_2 d} \\ \mathcal{H}_2 = (A_2 e^{-\gamma_2 d} - B_2 e^{\gamma_2 d})/\eta_2 \end{cases}$$

Eliminando A_2 e B_2, si ottiene:

$$\mathcal{E}_1 = a_{11}\, \mathcal{E}_2 + a_{12}\, \mathcal{H}_2 \qquad \mathcal{H}_1 = a_{21}\, \mathcal{E}_2 + a_{22}\, \mathcal{H}_2 \tag{11.3}$$

dove:[1]

$$a_{11} = a_{22} = \cosh \gamma_2 d \qquad a_{12} = \eta_2 \sinh \gamma_2 d \qquad a_{21} = \frac{\sinh \gamma_2 d}{\eta_2} \tag{11.4}$$

D'altro canto, considerando le espressioni di E e di H nel mezzo 1 e nel mezzo 3, si ha:

$$\mathcal{E}_1 = A_1 + B_1 \qquad \mathcal{H}_1 = (A_1 - B_1)/\eta_1 \qquad \mathcal{E}_2 = A_3 \qquad \mathcal{H}_2 = (A_3/\eta_3)$$

Sostituendo nelle (11.3) e ricavando B_1 e A_3 si ottiene:

$$A_1 + B_1 = (a_{11} + a_{12}/\eta_3)\, A_3$$
$$A_1 - B_1 = \eta_1 (a_{21} + a_{22}/\eta_3)\, A_3$$

Da queste relazioni si deduce:

$$\frac{B_1}{A_1} = \Gamma_{12} = \frac{a_{11}\eta_3 + a_{12} - \eta_1(\eta_3 a_{21} + a_{22})}{a_{11}\eta_3 + a_{12} + \eta_1(\eta_3 a_{21} + a_{22})} \tag{11.5a}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2\eta_3}{a_{11}\eta_3 + a_{12} + \eta_1(\eta_3 a_{21} + a_{22})} \tag{11.5b}$$

È facile verificare che la (11.5*a*) fornisce per Γ_{12} lo stesso risultato che si ottiene dalla (11.2).

---

1 Si ricorda che:

$\sinh(\gamma d) = \sinh(\alpha d + j\beta d) = \sinh\alpha d \cos\beta d + j\cosh\alpha d \sin\beta d$

$\cosh(\gamma d) = \cosh(\alpha d + j\beta d) = \cosh\alpha d \cos\beta d + j\sinh\alpha d \sin\beta d$

Più interessante è la seconda relazione, che permette di ricavare il rapporto A_3/A_1, che rappresenta il coefficiente di trasmissione fra l'ingresso e l'uscita dello strato.

Le relazioni (11.5) possono essere scritte come segue:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{H}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{H}_2 \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

La matrice [a], detta "matrice di trasmissione", caratterizza il comportamento dello strato per quanto riguarda la relazione ingresso/uscita fra i campi. Essa è analoga alle matrici che mettono in relazione le tensioni e le correnti all'ingresso e all'uscita dei quadripoli.[1]

Nel caso di uno strato senza perdite la matrice di trasmissione ha la forma:

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi d}{\lambda_2} & j\eta_2 \sin\frac{2\pi d}{\lambda_2} \\ j\frac{1}{\eta_2}\sin\frac{2\pi d}{\lambda_2} & \cos\frac{2\pi d}{\lambda_2} \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

2.12 Strati di particolare interesse applicativo

STRATI IN MEZZA ONDA Se lo strato è costituito da un dielettrico senza perdite e se il suo spessore è $d = \lambda_2/2$, si ha:

$$\gamma_2 d = j\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{2} = j\pi \qquad \text{tgh}\,\gamma_2 d = 0 \qquad Z_{12} = \eta_3$$

Dunque l'impedenza all'ingresso dello strato è uguale all'impedenza vista all'uscita (η_3). Questa è una proprietà caratteristica degli strati in mezza onda o, più in generale, degli strati spessi un numero intero di mezze lunghezze d'onda. A causa di questa proprietà si ha:

$$\Gamma_{12} = \frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 + \eta_1}$$

Questo risultato è identico a quello che si avrebbe se le regioni 1 e 3 fossero confinanti. Dunque *la presenza di uno strato senza perdite di spessore uguale ad un multiplo di mezze lunghezze d'onda non ha alcuna influenza sulla riflessione*. Se il mezzo ha la stessa impedenza caratteristica nelle regioni 1 e 3 (esempio aria/vuoto), la presenza dello strato non dà luogo a riflessione.[2]

1 La matrice di trasmissione è analoga a quella di un quadripolo (vedi Capitolo 5, Paragrafo 8). Nel caso dello strato i campi elettrici e magnetici sostituiscono le tensioni e la correnti.

2 All'interno dello strato, però, sono presenti sia l'onda incidente che quella riflessa.

STRATI IN QUARTO D'ONDA Se lo strato è senza perdite e se $d = \lambda_2/4$ si ha:

$$\gamma_2 d = j\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{4} = j\frac{\pi}{2} \qquad \text{cotgh}\,\gamma_2 d = 0$$

Pertanto risulta:

$$Z_{12} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3}$$

Gli strati in quarto d'onda hanno la proprietà di trasformare l'impedenza all'uscita nel suo inverso (a parte la costante di proporzionalità η_2^2).[1] Lo stesso risultato si trova se lo spessore dello strato è uguale ad un multiplo dispari di quarti d'onda.

Se nelle regioni 1 e 3 il mezzo è a basse perdite, con opportuna scelta del materiale che costituisce lo strato è possibile ottenere:

$$Z_{12} = \eta_1 \qquad \Gamma_{12} = 0 \qquad \textit{(condizione di "adattamento" del mezzo 1)}$$

Infatti dall'espressione di Z_{12} si deduce immediatamente che per ottenere l'adattamento basta usare un materiale d'impedenza caratteristica pari a:

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3} \tag{12.1}$$

Interponendo fra le regioni 1 e 3 uno strato in quarto d'onda con questo valore di impedenza caratteristica, viene eliminata la riflessione che si avrebbe se le due regioni fossero confinanti.[2] Si noti che l'adattamento è rigorosamente ottenuto solo alla frequenza per cui lo spessore dello strato è multiplo dispari di $\lambda_2/4$.

SCHERMI Se lo strato è dissipativo e se il suo spessore è tale da avere $2\alpha d >> 1$ si ha:

$$\sinh 2\alpha d \approx \cosh 2\alpha d \approx e^{2\alpha d}/2 >> 1.$$

Pertanto risulta (vedi nota all'Equazione 10.10):

$$\text{tgh}\,\gamma_2 d \approx 1 \qquad Z_{12} \approx \eta_2 \qquad \Gamma_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Il coefficiente di riflessione è uguale a quello che si avrebbe se lo strato fosse infinitamente esteso; in altri termini la riflessione nella regione 1 non risente della presenza della regione 3. La ragione fisica è chiara: l'attenuazione subita dall'onda trasmessa nella regione 2 e riflessa dalla seconda interfaccia è talmente elevata da poter ignorare la presenza dell'onda

---

1 Per questo si dice che gli strati "in quarto d'onda" si comportano come "invertitori di impedenza".

2 Anche in questo caso, all'interno dello strato sono presenti sia l'onda incidente che quella riflessa.

di ritorno sulla prima interfaccia. È evidente che in questo caso l'onda trasmessa nella regione 3 è praticamente nulla; quindi lo strato 2 funge da schermo, perché impedisce il passaggio delle onde nella regione 3.

In particolare lo schermo può essere metallico. In questo caso, per non avere trasmissione apprezzabile nel mezzo 3, basta che il suo spessore sia maggiore di 5δ. In presenza di uno schermo metallico la trasmissione nel mezzo 3 è del tutto trascurabile, non solo per l'attenuazione, ma anche per la riflessione quasi totale sulla superficie metallica.

STRATI SOTTILI Se lo spessore dello strato è tanto piccolo da poter assumere $|\gamma_2|d \ll 1$, dalle (11.4) risulta:

$$a_{11} = a_{22} \approx 1 \qquad a_{12} \approx \eta_2\gamma_2 d \qquad a_{21} \approx \gamma_2 d/\eta_2$$

Dalle (11.5) si ottiene:

$$\frac{B_1}{A_1} = \Gamma_{12} \approx \frac{\eta_3 - \eta_1 + \gamma_2 d(\eta_2 - \eta_1\eta_3/\eta_2)}{\eta_3 + \eta_1 + \gamma_2 d(\eta_2 + \eta_1\eta_3/\eta_2)} \qquad (12.2a)$$

$$\frac{A_3}{A_1} \approx \frac{2\eta_3}{\eta_3 + \eta_1 + \gamma_2 d(\eta_2 + \eta_1\eta_3/\eta_2)} \qquad (12.2b)$$

Come è prevedibile, quando $\gamma_2 d$ tende a zero le precedenti quantità tendono ai valori del coefficiente di riflessione e del coefficiente di trasmissione che si avrebbero in assenza dello strato (vedi Equazioni 8.4, 8.5).

2.13 Riflessione e trasmissione nel caso di più strati

I procedimenti illustrati nel paragrafo precedente possono essere utilizzati nello studio della propagazione delle onde piane attraverso un numero qualsiasi di strati (Figura 13.1). Un'onda piana uniforme proveniente dalla regione 1 e propagantesi in direzione perpendicolare ai piani di discontinuità genera in tutti gli strati onde che hanno la stesso tipo di polarizzazione e che si propagano nei due versi dell'asse z. Al di là dell'ultimo strato il mezzo

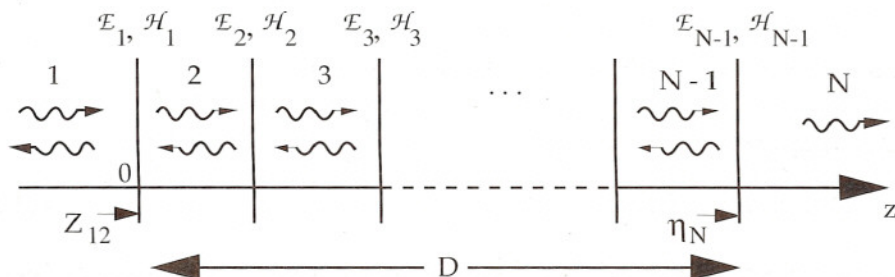



Figura 13.1

è illimitato e si ha una sola onda che si propaga verso l'infinito; nella regione 1 si ha in genere un'onda riflessa.

Nelle varie regioni siano note le impedenze caratteristiche η_n e le costanti $\gamma_n = \alpha_n + j\beta_n$ ($n = 1, 2, 3, ..., N-1, N$); siano inoltre assegnati gli spessori degli strati $d_2, d_3, .. d_{N-1}$. Il coefficiente di riflessione immediatamente a sinistra della prima interfaccia può essere determinato usando la (11.2), dopo aver trovato l'impedenza d'onda Z_{12}. A questo scopo si può seguire un procedimento analogo a quello visto all'inizio del Paragrafo 11: data l'impedenza d'onda sull'ultima interfaccia (che è uguale a η_N) e applicando ripetutamente la (10.10) si trovano le impedenze sulle interfacce precedenti, fino ad ottenere quella sulla prima interfaccia. Se gli strati non sono dissipativi la densità della potenza trasmessa nell'ultimo mezzo può essere ottenuta sottraendo la densità della potenza riflessa da quella della potenza incidente. Dalla densità della potenza trasmessa si può dedurre l'ampiezza del campo trasmesso nell'ultimo mezzo.

Un altro metodo consiste nel ricavare la matrice di trasmissione complessiva dell'insieme di strati. Questo metodo permette di valutare sia l'onda riflessa nella regione 1, sia l'ampiezza e la fase dell'onda trasmessa al di là degli strati, anche quando essi sono dissipativi.

Il campo ha la solita forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}\,\mathcal{E} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{p}\,\mathcal{H}$$

dove $\mathbf{p}$ è determinato dall'onda incidente sulla prima interfaccia e le funzioni d'onda $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$ sono definite da espressioni analoghe a quelle viste nel Paragrafo 11. Indicando con $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{H}_n$ i valori di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{H}$ sulla n-esima interfaccia (vedi Figura 13.1) si ha:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{n-1} \\ \mathcal{H}_{n-1} \end{bmatrix} = [a]_n \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{H}_n \end{bmatrix} \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1)$$

dove $[a]_n$ indica la matrice di trasmissione dello strato n-esimo, che è data da:

$$[a]_n = \begin{bmatrix} \cosh\gamma_n d_n & \eta_n \sinh\gamma_n d_n \\ \dfrac{\sinh\gamma_n d_n}{\eta_n} & \cosh\gamma_n d_n \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{H}_1 \end{bmatrix} = [a]_2 \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{H}_2 \end{bmatrix} = [a]_2 [a]_3 \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{H}_3 \end{bmatrix} = \ldots [a]_2 [a]_3 .. [a]_{N-1} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{N-1} \\ \mathcal{H}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Pertanto, ponendo

$$[a]_{tot} = [a]_2\ [a]_3\ ..\ [a]_{N-1} \tag{13.1}$$

risulta che i valori di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{H}$ sulle interfacce d'ingresso e d'uscita sono legati dalla relazione

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{H}_1 \end{bmatrix} = [\mathrm{a}]_{tot} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{N-1} \\ \mathcal{H}_{N-1} \end{bmatrix} \tag{13.2}$$

$[a]_{tot}$ è la matrice di trasmissione dell'insieme di strati. Essa è ottenuta moltiplicando le matrici dei singoli strati nel loro stesso ordine di successione.

Ponendo l'origine dell'asse z sulla prima interfaccia e indicando con D lo spessore totale della zona stratificata (Figura 13.1), si ha

$$\mathcal{E} = A_1 e^{-\gamma_1 z} + B_1 e^{\gamma_1 z} \qquad \mathcal{H} = (A_1 e^{-\gamma_1 z} - B_1 e^{\gamma_1 z}) / \eta_1 \qquad (\textit{mezzo 1})$$

$$\mathcal{E} = A_N e^{-\gamma_N (z-D)} \qquad \mathcal{H} = A_N e^{-\gamma_N (z-D)} / \eta_N \qquad (\textit{mezzo N})$$

dove: A_1 e B_1 rappresentano (a parte la polarizzazione) il campo elettrico dell'onda incidente e dell'onda riflessa, immediatamente a sinistra della prima interfaccia; A_N rappresenta il campo elettrico dell'onda trasmessa nel mezzo N immediatamente a destra dell'ultima interfaccia. Il coefficiente di riflessione B_1/A_1 e il coefficiente di trasmissione A_N/A_1 vengono determinati seguendo un procedimento identico a quello visto nel Paragrafo 11. Così si trova che i due coefficienti sono dati da espressioni analoghe alle (11.5), dove a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} devono essere intesi come gli elementi di $[a]_{tot}$. Si trova:

$$\frac{B_1}{A_1} = \Gamma_{12} = \frac{a_{11}\eta_N + a_{12} - \eta_1(\eta_N a_{21} + a_{22})}{a_{11}\eta_N + a_{12} + \eta_1(\eta_N a_{21} + a_{22})} \tag{13.3a}$$

$$\frac{A_N}{A_1} = \frac{2\eta_N}{a_{11}\eta_N + a_{12} + \eta_1(\eta_N a_{21} + a_{22})} \tag{13.3b}$$

2.14 Riflessione e rifrazione nel caso dell'incidenza obliqua

Quando l'onda incidente si propaga in direzione obliqua rispetto all'asse z lo studio della riflessione e della trasmissione si complica perché l'onda riflessa e l'onda trasmessa hanno direzioni di propagazione e polarizzazioni diverse da quelle dell'onda incidente. Questo paragrafo e i successivi affrontano questo studio, limitatamente al caso di una sola interfaccia e nell'ipotesi che il mezzo nella regione 1 sia senza perdite.

L'onda incidente è un'onda piana uniforme del tipo

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{p}_i A_1 e^{-j\beta_1 \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{r}} \qquad \mathbf{H}_i = \mathbf{u}_i \times \mathbf{p}_i (A_1 n_1 / \eta_0) e^{-j\beta_1 \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{r}} \tag{14.1}$$

dove $\mathbf{p}_i$ è il vettore di polarizzazione e $\beta_1 = 2\pi/\lambda_1$. L'onda si propaga nella la direzione $\mathbf{u}_i$ che forma l'angolo θ_1 con la normale all'interfaccia (Figura 14.1). Il piano definito da $\mathbf{u}_i$ e dalla normale viene detto "piano d'incidenza", l'angolo θ_1 "angolo d'incidenza".

È conveniente adottare un sistema di riferimento in cui il piano x, y coincide con l'interfaccia e il piano y, z con il piano d'incidenza. In questo sistema di riferimento si ha evidentemente:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_y \sin\theta_1 + \mathbf{u}_z \cos\theta_1 \tag{14.2}$$

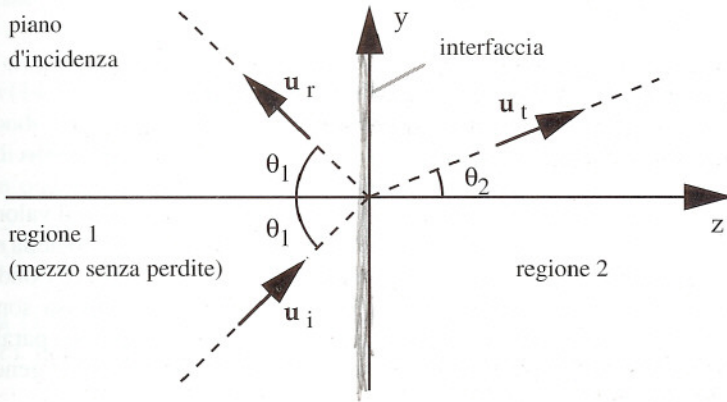



Figura 14.1

Affinché sia soddisfatta la condizione di continuità delle componenti tangenziali di **E** e di **H** è necessario che, sul piano z = 0, l'andamento dell'ampiezza e della fase dei campi riflesso e trasmesso siano identici a quelli del campo incidente. Per questa ragione l'ampiezza deve essere costante su tutto il piano, la fase deve dipendere solo da y e la velocità di fase v_y deve essere uguale a quella dell'onda incidente. Ne consegue, in primo luogo, che le onde riflessa e trasmessa devono propagarsi in direzione parallela al piano d'incidenza.

La velocità di fase dell'onda incidente nella direzione y dipende dall'indice di rifrazione nella regione 1 e dall'angolo d'incidenza. Si ha infatti:

$$v_y = \frac{v_1}{\cos(\pi/2 - \theta_1)} = \frac{c}{n_1 \sin\theta_1} \tag{14.3}$$

Nel caso dell'onda riflessa, tutte le condizioni precedentemente citate vengono soddisfatte se si considera un'onda piana uniforme che si propaga in una direzione che forma con l'asse z un angolo pari a quello di incidenza (legge della riflessione, vedi Figura 14.1). I campi dell'onda riflessa sono quindi del tipo:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{p}_r B_1 e^{-j\beta_1 \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}} \qquad \mathbf{H}_r = \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}_r (B_1 n_1 / \eta_0) e^{-j\beta_1 \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}} \tag{14.4}$$

dove $\mathbf{p}_r$ è il vettore di polarizzazione e $\mathbf{u}_r$ è dato da :

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_y \sin\theta_1 - \mathbf{u}_z \cos\theta_1 \tag{14.5}$$

Detto θ_2 l'angolo formato dalla direzione di propagazione dell'onda trasmessa con l'asse z ("angolo di rifrazione", Figura 14.1) e indicata con v_t la velocità di fase dell'onda, per l'uguaglianza delle velocità di fase nella direzione y deve aversi:

$$\frac{c}{n_1 \sin\theta_1} = \frac{v_t}{\sin\theta_2} \qquad \textit{(legge di Snell)} \tag{14.6}$$

ovvero, introducendo le costanti di fase $\beta_1 = \omega n_1/c$, $\beta_t = \omega/v_t$:

$$\beta_1 \sin\theta_1 = \beta_t \sin\theta_2 \tag{14.7}$$

Questa espressione permetterebbe di ricavare l'angolo θ_2 se fosse noto il valore di β_t. Però questo valore non è noto fino a quando non è definita la natura del mezzo nella regione 2 (su cui non è stata fatta alcuna ipotesi) e fino a quando non è noto di che tipo è l'onda trasmessa. In effetti, le condizioni sull'ampiezza e sulla fase dell'onda trasmessa sono verificate dall'onda studiata nel Paragrafo 7, purchè la direzione di attenuazione sia parallela all'asse z (se così non fosse l'ampiezza varierebbe sul piano z = 0). Pertanto, in generale, l'onda trasmessa è del tipo

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{p}_t A_2 e^{-\alpha_t z} e^{-j\beta_t \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{r}} \qquad \mathbf{H}_t = \frac{\alpha_t \mathbf{u}_z + j\beta_t \mathbf{u}_t}{j\omega\mu_2} \times \mathbf{p}_t A_2 e^{-\alpha_t z} e^{-j\beta_t \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{r}} \tag{14.8}$$

dove $\mathbf{p}_t$ è il versore di polarizzazione e $\mathbf{u}_t$ è il versore che indica la direzione di propagazione:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_y \sin\theta_2 + \mathbf{u}_z \cos\theta_2 \tag{14.9}$$

Per le (7.5) deve aversi:

$$\beta_t^2 - \alpha_t^2 = \mathrm{Re}\, k_2^2 \tag{14.10a}$$

$$2\alpha_t \beta_t \cos\theta_2 = -\,\mathrm{Im}\, k_2^2 \tag{14.10b}$$

Risolvendo queste equazioni assieme alla (14.7), si determinano i valori di α_t, β_t e dell'angolo di rifrazione, in funzione dell'angolo d'incidenza.

Il caso più semplice è quello in cui anche nella regione 2 il mezzo è senza perdite. Infatti in questo caso esistono solo due possibilità (vedi Paragrafo 7): o l'onda trasmessa è un'onda piana uniforme senza attenuazione, ovvero essa è un'onda evanescente che si attenua nella direzione dell'asse z e si propaga nella direzione perpendicolare (asse y).

Se l'onda è uniforme, si ha $v_t = c/n_2$ e, quindi, per la legge di Snell risulta:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1 \tag{14.11}$$

Questa espressione permette di determinare l'angolo di rifrazione, purchè il secondo membro non superi 1. Questa condizione è sempre verificata se il primo mezzo è meno denso del secondo ($n_1 < n_2$); se, invece, il primo mezzo è più denso, la condizione è verificata solo se θ_1 non supera l'*angolo limite*:

$$\theta_L = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \qquad (n_2 < n_1) \tag{14.12}$$

Quando la (14.11) ammette soluzione l'onda trasmessa è un'onda piana uniforme che si propaga secondo un angolo θ_2 minore o maggiore dell'angolo d'incidenza, secondo i valori degli indici di rifrazione (Figura 14.2*a*, *b*). In questo caso le espressioni (14.8) si riducono a quelle di un'onda piana uniforme ($\alpha_t = 0$, $\beta_t = \beta_2 = \omega n_2/c$, $\omega\mu_2/\beta_t = \eta_2$):

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{p}_t\, A_2\, e^{-j\beta_2 \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{r}} \qquad \mathbf{H}_t = \mathbf{u}_t \times \mathbf{p}_t\, (A_2\, n_2 / \eta_0)\, e^{-j\beta_2 \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{r}} \tag{14.13}$$

Quando la (14.11) non ammette soluzione l'onda trasmessa è un'onda evanescente (Figura 14.2*c*). Poiché in questo caso si ha $\theta_2 = \pi/2$, per le (14.7) e (14.10*a*) risulta:

$$\beta_t = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin\theta_1 \tag{14.14}$$

$$\alpha_t = \sqrt{\beta_t^2 - k_2^2}$$

Si verifica facilmente che l'attenuazione può anche essere espressa come segue:

$$\alpha_t = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sqrt{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_L} \tag{14.15}$$

In questo caso l'onda trasmessa ha la forma:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{p}_t A_2 e^{-\alpha_t z}\, e^{-j\beta_t y} \qquad \mathbf{H}_t = \frac{\alpha_t \mathbf{u}_z + j\beta_t \mathbf{u}_y}{j\omega\mu_2} \times \mathbf{p}_t A_2 e^{-\alpha_t z}\, e^{-j\beta_t y} \tag{14.16}$$

Se ci si sposta nel secondo mezzo perpendicolarmente al piano di discontinuità, la decrescita

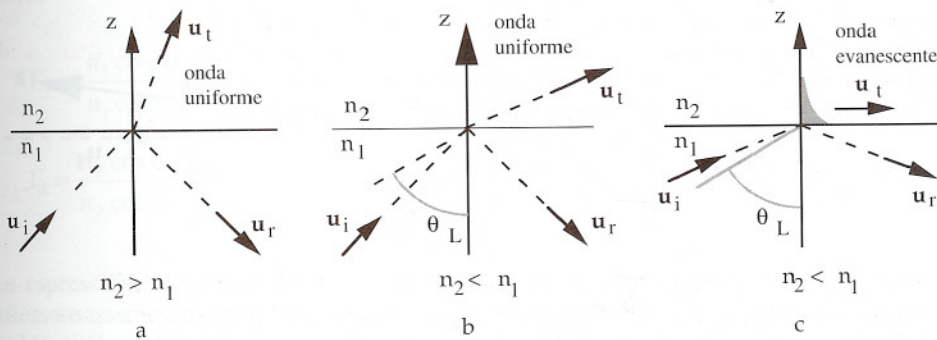



Figura 14.2

dell'ampiezza del campo trasmesso è tanto più rapida quanto più l'angolo d'incidenza si discosta dall'angolo limite. Quando lo scostamento è sensibile, l'ampiezza dell'onda trasmessa scende a valori trascurabili a distanze dell'ordine di λ_1 dal piano di discontinuità. Onde di questo genere (che si presentano anche in varie altre situazioni, più complesse di quella qui considerata) prendono il nome di "*onde superficiali*", perché sono localizzate in prossimità di una superficie, lungo la quale si propagano.

2.15 Coefficienti di riflessione e di trasmissione nel caso di mezzi senza perdite

I vettori di polarizzazione delle onde riflessa e trasmessa e i valori delle costanti B_1 e A_2, vengono determinati imponendo le condizioni di continuità alle componenti tangenziali di **E** e di **H**. I calcoli sono più complicati di quelli fatti nel caso dell'incidenza normale perché i vettori di polarizzazione delle tre onde in gioco giacciono su piani diversi. Per questa ragione bisogna imporre le condizioni di continuità sia per le componenti secondo x che per quelle secondo y. Basta imporre le condizioni ai campi presi nell'origine; infatti le relazioni trovate nel paragrafo precedente garantiscono che le condizioni sono verificate su tutta l'interfaccia, se esse sono verificate in un punto qualsiasi. Questo paragrafo tratta questo problema limitatamente al caso in cui i due mezzi sono senza perdite.

CASO IN CUI L'ONDA TRASMESSA È UNIFORME In questo caso tutte le onde sono di tipo TEM, così che i vettori di polarizzazione sono ortogonali alle direzioni di propagazione. Pertanto, introdotti i versori (vedi Figura 15.1)

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_x = -\mathbf{u}_z \sin\theta_1 + \mathbf{u}_y \cos\theta_1 \qquad (15.1a)$$

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_x = -\mathbf{u}_z \sin\theta_1 - \mathbf{u}_y \cos\theta_1 \qquad (15.1b)$$

$$\mathbf{b}_t = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_x = -\mathbf{u}_z \sin\theta_2 + \mathbf{u}_y \cos\theta_2 \qquad (15.1c)$$

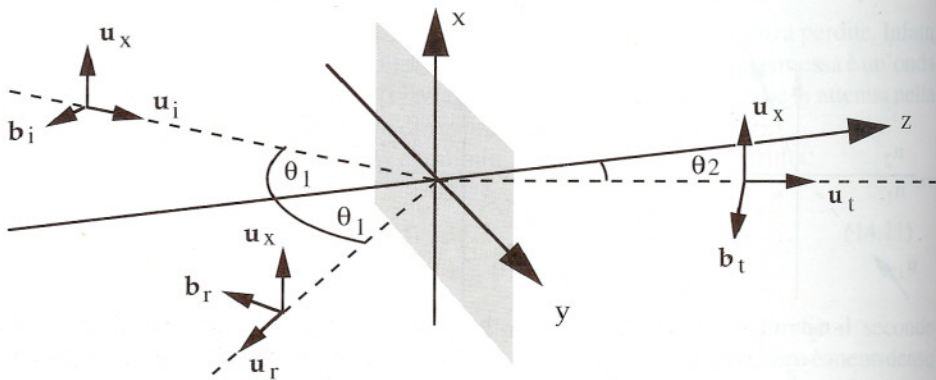



Figura 15.1

si può scrivere:

$$\mathbf{p}_i = p_{i\perp}\mathbf{u}_x + p_{i\parallel}\mathbf{b}_i \qquad (|p_{i\perp}|^2 + |p_{i\parallel}|^2 = 1) \tag{15.2a}$$

$$\mathbf{p}_r = p_{r\perp}\mathbf{u}_x + p_{r\parallel}\mathbf{b}_r \qquad (|p_{r\perp}|^2 + |p_{r\parallel}|^2 = 1) \tag{15.2b}$$

$$\mathbf{p}_t = p_{t\perp}\mathbf{u}_x + p_{t\parallel}\mathbf{b}_t \qquad (|p_{t\perp}|^2 + |p_{t\parallel}|^2 = 1) \tag{15.2c}$$

dove i simboli $\perp$ e $\parallel$ indicano le componenti dei vettori nelle direzioni perpendicolare e parallela al piano d'incidenza.

In base alle (14.1), (14.4) e (14.13) i campi presi sull'origine, immediatamente alla sinistra e alla destra dell'interfaccia sono :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_{sup} &= (p_{i\perp}\mathbf{u}_x + p_{i\parallel}\mathbf{b}_i)A_1 + (p_{r\perp}\mathbf{u}_x + p_{r\parallel}\mathbf{b}_r)B_1 \\ \mathbf{H}_{sup} &= [(-p_{i\parallel}\mathbf{u}_x + p_{i\perp}\mathbf{b}_i)A_1 + (-p_{r\parallel}\mathbf{u}_x + p_{r\perp}\mathbf{b}_r)B_1]n_1/\eta_0 \end{aligned}\right\} \quad (z = 0_-) \tag{15.3a}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_{sup} &= (p_{t\perp}\mathbf{u}_x + p_{t\parallel}\mathbf{b}_t)A_2 \\ \mathbf{H}_{sup} &= [(-p_{t\parallel}\mathbf{u}_x + p_{t\perp}\mathbf{b}_t)A_2\, n_2/\eta_0 \end{aligned}\right\} \quad (z = 0_+) \tag{15.3b}$$

Introducendo le (15.1) e imponendo l'uguaglianza delle componenti tangenziali si ottengono le seguenti equazioni:

$$p_{i\perp}A_1 + p_{r\perp}B_1 = p_{t\perp}A_2 \qquad n_1\cos\theta_1\,(p_{i\perp}A_1 - p_{r\perp}B_1) = n_2\cos\theta_2\, p_{t\perp}A_2$$

$$n_1\,(p_{i\parallel}A_1 + p_{r\parallel}B_1) = n_2\, p_{t\parallel}A_2 \qquad \cos\theta_1\,(p_{i\parallel}A_1 - p_{r\parallel}B_1) = \cos\theta_2\, p_{t\parallel}A_2$$

La prima e la seconda coppia di equazioni possono essere risolte indipendentemente ottenendo:

$$p_{r\perp}B_1 = \Gamma_\perp\, p_{i\perp}A_1 \qquad p_{t\perp}A_2 = T_\perp\, p_{i\perp}A_1 \tag{15.4a}$$

$$p_{r\parallel}B_1 = \Gamma_\parallel\, p_{i\parallel}A_1 \qquad p_{t\parallel}A_2 = T_\parallel\, p_{i\parallel}A_1 \tag{15.4b}$$

dove:

$$\Gamma_\perp = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} \qquad T_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} \tag{15.5a}$$

$$\Gamma_\parallel = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \qquad T_\parallel = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \tag{15.5b}$$

Le espressioni (15.4*a*) indicano che le componenti perpendicolari del campo elettrico riflesso e trasmesso dipendono solo dalla componente perpendicolare del campo elettrico incidente. Le (15.4*b*) indicano l'esistenza di un analogo collegamento fra le componenti parallele. Pertanto, se l'onda incidente ha il campo elettrico polarizzato linearmente nella

direzione *perpendicolare* al piano d'incidenza, anche le onde riflessa e trasmessa hanno lo stesso tipo di polarizzazione. I coefficenti $\Gamma_\perp$ e $T_\perp$ hanno evidentemente il significato di coefficienti di riflessione e di trasmissione per questo tipo di polarizzazione. Analogamente, se l'onda incidente ha il campo elettrico polarizzato linearmente nella direzione *parallela* al piano d'incidenza, anche le onde riflessa e trasmessa hanno lo stesso tipo di polarizzazione. In questo caso i coefficienti di riflessione e di trasmissione sono $\Gamma_\parallel$ e $T_\parallel$.

Le espressioni (15.5) che forniscono i valori dei coefficienti di riflessione e di trasmissione per i suddetti tipi "fondamentali" di polarizzazione sono note come "formule di Fresnel". Si nota che i coefficienti dipendono dall'angolo d'incidenza (sia direttamente che indirettamente, attraverso θ_2) e che i valori sono diversi per i due tipi di polarizzazione.

Nel caso generale, in cui l'onda incidente è polarizzata in un modo qualsiasi si ha:

$$\mathbf{p}_r B_1 = p_{r\perp} B_1\, \mathbf{u}_x + p_{r\parallel} B_1 \mathbf{b}_r = (p_{i\perp}\Gamma_\perp\, \mathbf{u}_x + p_{i\parallel}\Gamma_\parallel\, \mathbf{b}_r) A_1$$

Questa espressione collega $\mathbf{p}_r$ e B_1 a $\mathbf{p}_i$ e A_1. Poiché la fase di $\mathbf{p}_r$ può essere scelta arbitrariamente, le relazioni intercorrenti fra i vettori di polarizzazione e fra B_1 e A_1 non sono definite univocamente. Conviene scegliere la fase in modo che, nel caso limite dell'incidenza normale, i vettori di polarizzazione dell'onda incidente e dell'onda riflessa siano uguali, come si è assunto nello studio dell'incidenza normale. Ponendo

$$B_1 = \tilde{\Gamma}_{12} A_1$$

e scegliendo opportunamente la fase di $\mathbf{p}_r$ si trova:

$$\mathbf{p}_r = \frac{\Gamma_\perp p_{i\perp} \mathbf{u}_x + \Gamma_\parallel p_{i\parallel} \mathbf{b}_r}{\sqrt{|\Gamma_\perp|^2 |p_{i\perp}|^2 + |\Gamma_\parallel|^2 |p_{r\parallel}|^2}}\, e^{-j\mathrm{Arg}[\Gamma_\perp - \Gamma_\parallel]} \tag{15.6}$$

$$\tilde{\Gamma}_{12} = \sqrt{|\Gamma_\perp|^2 |p_{i\perp}|^2 + |\Gamma_\parallel|^2 |p_{i\parallel}|^2}\, e^{j\mathrm{Arg}[\Gamma_\perp - \Gamma_\parallel]} \tag{15.7}$$

Si verifica facilmente che

$$\lim_{\theta_1 \to 0} \tilde{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12} \qquad\qquad \lim_{\theta_1 \to 0} \mathbf{p}_r = \mathbf{p}_i$$

La (15.7) fornisce il coefficiente di riflessione dell'interfaccia per qualsiasi valore dell'angolo d'incidenza. La (15.6) permette di passare direttamente dal vettore di polarizzazione dell'onda incidente a quello dell'onda riflessa.

Analogamente, esprimendo $\mathbf{p}_t A_2$ in funzione di $p_{r\perp}$, di $p_{r\parallel}$ e di A_1 e ponendo

$$A_2 = \tilde{T}_{12} A_1$$

si trova:

$$\mathbf{p}_t = \frac{T_\perp p_{i\perp} \mathbf{u}_x + T_\parallel p_{i\parallel} \mathbf{b}_t}{\sqrt{|T_\perp|^2 |p_{i\perp}|^2 + |T_\parallel|^2 |p_{t\parallel}|^2}}\, e^{-j\mathrm{Arg}[T_\perp + T_\parallel]} \tag{15.8}$$

$$\tilde{T}_{12} = \sqrt{|T_\perp|^2 |p_{i\perp}|^2 + |T_\parallel|^2 |p_{t\parallel}|^2}\, e^{jArg[T_\perp + T_\parallel]}$$

Anche in questo caso si ha:

$$\lim_{\theta_1 \to 0} \tilde{T}_{12} = T_{12} \qquad \lim_{\theta_1 \to 0} \mathbf{p}_t = \mathbf{p}_i$$

(la verifica è lasciata al lettore). $\tilde{T}_{12}$ rappresenta il coefficiente di trasmissione dell'interfaccia, per qualsiasi valore dell'angolo d'incidenza. La (15.8) permette di ottenere direttamente il vettore di polarizzazione dell'onda trasmessa, noto quello dell'onda incidente.[1]

Nel caso dell'incidenza obliqua, i vettori di polarizzazione delle varie onde sono in genere differenti, non solo perché sono ortogonali a direzioni diverse, ma anche perché in ciascuno di essi si ha un diverso rapporto fra le componenti perpendicolari e parallele (a causa della diversità fra $\Gamma_\perp$ e $\Gamma_\parallel$). Pertanto, *se si escludono i casi in cui l'onda incidente è polarizzata linearmente in direzione perpendicolare o parallela al piano d'incidenza, risulta che le polarizzazioni dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa differiscono da quella dell'onda incidente.*

Le densità di potenza per l'onda incidente, per l'onda riflessa e per l'onda trasmessa sono rispettivamente:

$$\mathbf{S}_i = W_i\,\mathbf{u}_i \qquad \mathbf{S}_r = W_r\,\mathbf{u}_r \qquad \mathbf{S}_t = W_t\,\mathbf{u}_t$$

dove

$$W_i = |A_1|^2 n_1/2\eta_0 \qquad W_r = |B_1|^2 n_1/2\eta_0 \qquad W_t = |A_2|^2 n_2/2\eta_0$$

Pertanto i coefficienti di riflessione e di trasmissione per la potenza sono:

$$\frac{W_r}{W_i} = |\tilde{\Gamma}_{12}|^2 \tag{15.10a}$$

$$\frac{W_t}{W_i} = \frac{n_2}{n_1}|\tilde{T}_{12}|^2 = (1 - |\tilde{\Gamma}_{12}|^2)\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \tag{15.10b}$$

(l'equivalenza fra le due forme del coefficiente di trasmissione può essere facilmente verificata usando la (15.7), la (15.9) e le formule di Fresnel).

---

1 Nei casi particolari in cui l'onda incidente è polarizzata linearmente, con il campo elettrico perpendicolare o parallelo al piano d'incidenza, si ottiene:

$$\tilde{\Gamma}_{12} = \Gamma_\perp \qquad \tilde{T}_{12} = T_\perp \qquad \mathbf{p}_r = \mathbf{p}_t = \mathbf{u}_x \qquad (\text{caso } \mathbf{p}_i = \mathbf{u}_x)$$

$$\tilde{\Gamma}_{12} = -\Gamma_\parallel \qquad \tilde{T}_{12} = T_\parallel \qquad \mathbf{p}_r = -\mathbf{b}_r \qquad \mathbf{p}_t = \mathbf{b}_t \qquad (\text{caso } \mathbf{p}_i = \mathbf{b}_i)$$

■ Il coefficiente di trasmissione della potenza non è uguale a $1 - |\Gamma_{12}|^2$, come nel caso dell'incidenza normale. Si nota inoltre che, in base alla seconda forma del coefficiente di trasmissione, si ha:

$$W_i \cos\theta_1 - W_r \cos\theta_1 = W_t \cos\theta_2 \tag{15.11}$$

ovvero:

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{u}_z - \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{u}_z$$

Evidentemente la relazione rappresenta il bilancio fra le potenze nette che entrano ed escono attraverso un elemento di interfaccia di area unitaria. ■

È interessante osservare che $\Gamma_\parallel$ si annulla quando l'angolo di incidenza è pari a

$$\theta_B = \mathrm{arctg}\frac{n_2}{n_1} \qquad \textit{(angolo di Brewster)} \tag{15.12}$$

mentre $\Gamma_\perp$ non si annulla per alcun valore dell'angolo di incidenza (la verifica è lasciata al lettore). Quando l'angolo di incidenza è uguale a θ_B si ha:

$$\tilde{\Gamma}_{12} = |p_{i\perp}|\Gamma_\perp \qquad \mathbf{p}_r = \frac{p_{i\perp}}{|p_{i\perp}|}\mathbf{u}_x \tag{15.13}$$

Se l'onda incidente è polarizzata linearmente in direzione parallela al piano d'incidenza ($p_{i\perp} = 0$) non si ha onda riflessa e tutta la potenza incidente viene trasmessa nel secondo mezzo ("trasmissione totale"). Se invece l'onda incidente è polarizzata in un altro modo, si ha in ogni caso un'onda riflessa polarizzata linearmente in direzione perpendicolare al piano d'incidenza. Questo effetto può essere sfruttato per produrre, attraverso la riflessione, un'onda polarizzata linearmente, partendo da un'onda di diversa polarizzazione. Per questa ragione, l'angolo di Brewster viene anche detto "angolo di polarizzazione".

Un altro caso di notevole interesse pratico è quello in cui il primo mezzo è meno denso del secondo e l'angolo d'incidenza è molto prossimo a 90° ("incidenza radente"). Questo caso interessa, ad esempio, nel caso di un'onda proveniente dall'aria che incide in direzione pressoché orizzontale su un terreno a bassa perdita. In questo caso la riflessione è pressoché totale; infatti risulta

$$\cos\theta_1 \approx 0 \qquad \sin\theta_1 \approx 1 \qquad \sin\theta_2 \approx n_1/n_2 \qquad \cos\theta_2 \approx \sqrt{1-(n_1/n_2)^2} \neq 0$$

e per le formule di Fresnel si ha: $\Gamma_\perp \approx \Gamma_\parallel \approx -1$.

CASO IN CUI L'ONDA TRASMESSA È EVANESCENTE Quando l'angolo d'incidenza supera l'angolo limite, le formule di Fresnel non sono valide. In questo caso il campo immediatamente alla destra dell'origine ha la forma (vedi Equazione 14.16):

$$\mathbf{E}_{sup} = \mathbf{p}_t A_2 \qquad \mathbf{H}_{sup} = \frac{\alpha_t \mathbf{u}_z + j\beta_t \mathbf{u}_y}{j\omega\mu_2} \times \mathbf{p}_t A_2 \qquad (z = 0_+)$$

I valori di β_t e di α_t sono dati dalle (14.14) e (14.15). Inoltre, a causa della condizione (7.2), le componenti p_{ty} e p_{tz} soddisfano la relazione:

$$p_{tz} = -\frac{j\beta_t}{\alpha_t} p_{ty} \tag{15.14}$$

Utilizzando le (15.3*a*) e imponendo la continuità delle componenti tangenziali di $\mathbf{E}_{sup}$ e di $\mathbf{H}_{sup}$, si ottiene un sistema di equazioni che permette di determinare le componenti secondo x e y del campo elettrico, per l'onda riflessa e per l'onda trasmessa. La (15.14) permette di determinare la componente secondo z, nell'onda trasmessa. I calcoli vengono omessi per brevità. Anche in questo caso si trova che, quando l'onda incidente è polarizzata linearmente con il campo elettrico perpendicolare o parallelo al piano d'incidenza, l'onda riflessa ha lo stesso tipo di polarizzazione.[1] Si trova inoltre:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos\theta_1 + j\sqrt{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_L}}{\cos\theta_1 - j\sqrt{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_L}} \tag{15.15a}$$

$$(\theta_1 > \theta_L)$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_2^2\cos\theta_1 + jn_1^2\sqrt{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_L}}{n_2^2\cos\theta_1 - jn_1^2\sqrt{\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_L}} \tag{15.15b}$$

È interessante osservare che:

$$|\Gamma_{\perp}| = |\Gamma_{\parallel}| = 1 \qquad |\tilde{\Gamma}_{12}| = 1$$

Dunque, *al disopra dell'angolo limite il coefficiente di riflessione della potenza è unitario*. Poiché la potenza riflessa è uguale a quella incidente, la potenza trasmessa dalla regione 1 alla regione 2 è nulla. Questo è il ben noto fenomeno della "riflessione totale" (o "trasmissione frustrata") che ha moltissime applicazioni in Ottica.[2]

2.16 Incidenza obliqua sulla superficie di un buon conduttore

Se il mezzo 2 è un buon conduttore i coefficienti di riflessione $\Gamma_{\perp}$ e $\Gamma_{\parallel}$ possono essere ricavati in maniera semplice imponendo la condizione di Leontovic ai campi nel mezzo 1, a ridosso

---

1 Quando l'onda incidente è polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza, l'onda trasmessa è un'onda TE con il campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza. Nell'altro caso essa è un'onda TM, con il campo magnetico polarizzato perpendicolarmente al piano d'incidenza.

2 Questo risultato non contrasta con la presenza del campo al di là dell'interfaccia; infatti l'onda superficiale trasmette energia in direzione parallela all'interfaccia ma non in direzione perpendicolare; pertanto la potenza che essa trasporta non proviene dalla regione 1. Naturalmente ciò è rigorosamente vero solo nella situazione ideale trattatata in questo capitolo (interfaccia infinitamente estesa, onda incidente piana e uniforme).

della superficie del conduttore. Poichè sulla superficie l'andamento della fase è lo stesso per l'onda incidente e per l'onda riflessa, la condizione è verificata su tutta la superficie se essa è verificata nell'origine. Dunque è sufficiente imporre la condizione Leontovic ai campi (15.3*a*). Si ottiene:

$$p_{i\perp}A_1 + p_{r\perp}B_1 = \frac{n_1 R_s (1+j)}{\eta_0}\cos\theta_1 (p_{i\perp}A_1 + p_{r\perp}B_1)$$

$$\cos\theta_1 (p_{i\parallel}A_1 - p_{r\parallel}B_1) = \frac{n_1 R_s (1+j)}{\eta_0}(p_{i\parallel}A_1 + p_{r\parallel}B_1)$$

Risolvendo si trova

$$p_{r\perp}B_1 = \Gamma_\perp p_{i\perp}A_1 \qquad p_{r\parallel}B_1 = \Gamma_\parallel p_{i\parallel}A_1$$

dove:

$$\Gamma_\perp = -\frac{\eta_0 - n_1 R_s (1+j)\cos\theta_1}{\eta_0 + n_1 R_s (1+j)\cos\theta_1} \tag{16.1a}$$

$$\Gamma_\parallel = \frac{\eta_0 \cos\theta_1 - n_1 R_s (1+j)}{\eta_0 \cos\theta_1 + n_1 R_s (1+j)} \tag{16.1b}$$

A causa della piccolezza di R_s/η_1 i coefficienti di riflessione sono circa uguali a -1 e $+1$ rispettivamente (tranne che per $\Gamma_\parallel$, quando l'angolo d'incidenza è tanto vicino a 90° da rendere $\eta_0 \cos\theta_1$ paragonabile a $n_1 R_s$).

Se si assume che il conduttore sia perfetto, per qualsiasi angolo d'incidenza risulta esattamente

$$\Gamma_\perp = -1 \quad \Gamma_\parallel = 1 \tag{16.2}$$

e quindi, per le (15.6) e (15.7) (che possono essere scritte anche in questo caso) si ha:

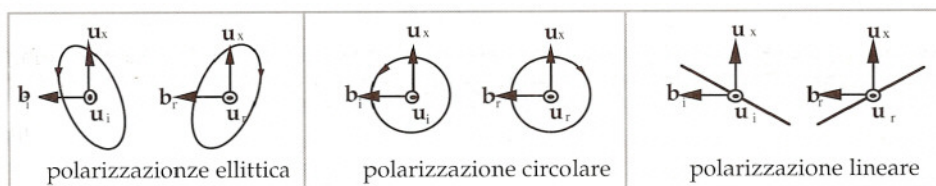



Figura 16.1

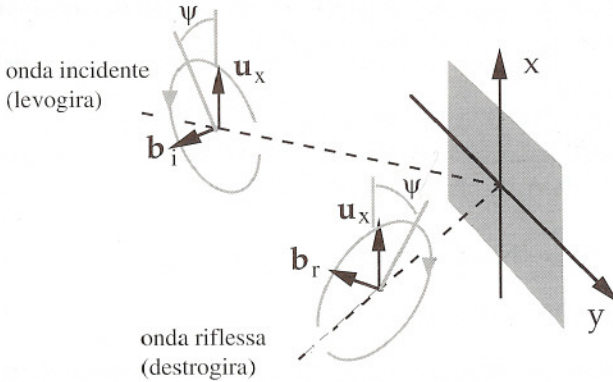



Figura 16.2

$$\tilde{\Gamma}_{12} = -1 \qquad (\textit{ossia}\ B_1 = -A_1)$$

$$\mathbf{p}_r = p_{i\perp}\,\mathbf{u}_x - p_{i\parallel}\,\mathbf{b}_r \qquad (\textit{ossia}\ p_{r\perp} = p_{i\perp},\ p_{r\parallel} = -p_{i\parallel}) \tag{16.3}$$

Poiché $|\tilde{\Gamma}_{12}| = 1$ tutta la potenza incidente sul piano conduttore viene riflessa.

La relazione esistente fra la polarizzazione dell'onda incidente e dell'onda riflessa è illustrata dalla Figura 16.1 (il verso di propagazione è quello uscente dal foglio per entrambe le onde). Poiché i vettori di polarizzazione delle due onde differiscono solo per il segno della componente parallela al piano d'incidenza, le ellissi di polarizzazione sono identiche anche se, viste nei riferimenti di Figura 16.1, hanno l'asse maggiore inclinato in verso opposto rispetto all'asse x. Inoltre i versi di rotazione sono opposti, così che un'onda incidente levogira dà luogo ad un'onda riflessa destrogira e viceversa. La posizione relativa delle due ellissi è meglio evidenziata dalla Figura 16.2. Le ellissi e i loro versi di percorrenza tendono a coincidere quando l'angolo d'incidenza tende a zero.[1]

Dai precedenti risultati si possono dedurre le seguenti espressioni che torneranno utili nel capitolo dedicato alle "Approssimazioni Ottiche", quando si tratterà la riflessione su corpi conduttori di forma arbitraria:

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{p}_i - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_i)\mathbf{n} \tag{16.4}$$

$$\mathbf{J}_s = 2\,\mathbf{H}_i \times \mathbf{n} \tag{16.5}$$

dove $\mathbf{n}$ rappresenta la normale entrante nel conduttore (nella presente trattazione $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$) e $\mathbf{J}_s$ è la densità della corrente sulla superficie del conduttore.

1 L'inversione della rotazione delle onde non è una peculiarità della riflessione nel caso dell'incidenza obliqua. Anzi l'inversione è sempre presente nel caso dell'incidenza normale, perchè i vettori di polarizzazione $\mathbf{p}_i$ e $\mathbf{p}_r$ sono uguali, mentre le direzioni di propagazione sono opposte.

■ Infatti, per le (15.1*a*, *b*) si ha $\mathbf{b}_r = -\mathbf{b}_i + 2(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{b}_i)\mathbf{u}_z$; pertanto la (16.3) può anche essere scritta nella forma: $\mathbf{p}_r = \mathbf{p}_i - 2(\mathbf{u}_z \cdot p_{i\|}\mathbf{b}_i)\mathbf{u}_z$. Questa espressione viene trasformata nella (16.4) osservando che $\mathbf{u}_z \cdot p_{i\|}\mathbf{b}_i = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_i$.

Inoltre, per la (15.3*a*), la densità della corrente indotta sulla superficie del conduttore in corrispondenza dell'origine è:

$$\mathbf{J}_s = [(-p_{i\|}\,\mathbf{u}_x + p_{i\perp}\,\mathbf{b}_i)A_1 + (-\Gamma_\|\,p_{i\|}\,\mathbf{u}_x + \Gamma_\perp\,p_{i\perp}\,\mathbf{b}_r)A_1]n_1/\eta_0 \times \mathbf{u}_z =$$
$$= [(-p_{i\|}\,\mathbf{u}_x + p_{i\perp}\,\mathbf{b}_i)A_1 + (-p_{i\|}\,\mathbf{u}_x - p_{i\perp}\,\mathbf{b}_r)A_1]n_1/\eta_0 \times \mathbf{u}_z$$

D'altro canto si ha: $\mathbf{b}_r \times \mathbf{u}_z = -\,\mathbf{b}_i \times \mathbf{u}_z$. Pertanto:

$$\mathbf{J}_s = 2\,(-p_{i\|}\,\mathbf{u}_x + p_{i\perp}\,\mathbf{b}_i)A_1\;\; n_1/\eta_0 \times \mathbf{u}_z = 2\,\mathbf{H}_i \times \mathbf{u}_z$$

Poiché la posizione dell'origine può essere scelta arbitrariamente sulla superficie del conduttore, questa relazione è valida in tutti i punti della superficie stessa. Ponendo $\mathbf{u}_z = \mathbf{n}$ si ottiene la (16.5). ■

3

Guide d'onda e linee di trasmissione

A bassa frequenza l'energia elettromagnetica viene trasmessa mediante i convenzionali circuiti elettrici, costituiti da fili metallici che connettono le sorgenti ai carichi. La trasmissione avviene attraverso lo spazio esterno ai fili che, con la loro presenza, conformano il campo e il vettore di Poynting in modo da convogliare sui carichi l'energia erogata dalle sorgenti. Poiché le dimensioni dei circuiti sono trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda, le variazioni di fase connesse alla propagazione delle onde possono essere ignorate. Grazie a questa approssimazione l'analisi della trasmissione viene semplificata moltissimo, essendo possibile limitarla allo studio delle tensioni e delle correnti, che soddisfano leggi molto più semplici delle equazioni del campo.[1]

Ad alta frequenza, quando le dimensioni dei circuiti divengono paragonabili alla lunghezza d'onda, la presenza delle onde non può essere trascurata e le leggi dei circuiti perdono significato. Inoltre diviene sensibile il fenomeno dell'irraggiamento (vedi Capitolo 7), per il quale le onde sfuggono del circuito, trasportando parte dell'energia prodotta dalle sorgenti lontano dai carichi. A causa dell'irraggiamento i circuiti convenzionali perdono ogni utilità, non solo per la diminuzione dell'efficienza della trasmissione energetica, ma anche perché l'irraggiamento crea interferenze indesiderate fra apparati diversi. Inoltre, a livelli elevati di potenza, l'irraggiamento può costituire un grave pericolo per le persone e le cose prossime alla zona di emissione della radiazione. Per queste ragioni gli apparati elettronici funzionanti ad alta frequenza (tipicamente dalle microonde fino alle frequenze ottiche) utilizzano strutture trasmissive in cui le onde rimangono confinate nell'intorno di un percorso prefissato. Tali strutture vengono genericamente dette "guide d'onda".

Il modo più ovvio per eliminare l'irraggiamento consiste nel confinare le onde all'interno di un tubo metallico che funge da schermo (guide schermate), ma sono possibili altri meccanismi di guida che utilizzano la propagazione di onde superficiali intorno a strutture dielettriche e/o metalliche non schermate (guide ad onde di superficie). Nella banda delle microonde vengono spesso usate guide costituite da tubi metallici, normalmente dette "guide d'onda", senza ulteriori specificazioni. Come si vedrà, le guide di questo tipo permettono la trasmissione purché le dimensioni trasversali siano dell'ordine (o più grandi) della lunghezza d'onda. Per questa ragione il loro uso non è pratico a frequenze minori di qualche

---

1 Per una trattazione dei circuiti basata sui concetti generali della teoria dell'elettromagnetismo si veda S.Ramo, J.R. Whinnery, T.Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 2nd edition, J. Wiley & Sons, Capitolo 4.

gigahertz (lunghezze d'onda maggiori del decimetro). La limitazione nell'utilizzo a frequenze più basse non esiste se all'interno del tubo corrono uno o più conduttori aggiuntivi (linee di trasmissione schermate); infatti, in questo caso la trasmissione è sempre possibile, indipendentemente dalle dimensioni trasversali della struttura considerata. Le guide ad onde di superficie sono prevalentemente usate a frequenze molto alte, dalla banda millimetrica a quella ottica. Le "fibre ottiche", costituite da fili dielettrici a bassa perdita, sono esempi di guide di questo tipo.

Questo capitolo è dedicato allo studio della propagazione nelle guide d'onda tubolari e nelle linee schermate. Nel primo paragrafo vengono introdotti i cosiddetti "potenziali di Hertz-Debye", che rendono più semplice lo studio della propagazione guidata. Nei successivi sei paragrafi viene svolta la teoria generale della propagazione nelle guide tubolari e vengono considerate in dettaglio le guide a sezione rettangolare e circolare, che sono quelle più usate. Lo studio generale delle linee di trasmissione viene svolto nel Paragrafo 8, limitatamente al caso di un solo conduttore interno. La linea più comune - il cavo coassiale - viene studiata in dettaglio nel Paragrafo 9. Nel Paragrafo 10 si accenna brevemente alle linee contenenti più di un conduttore interno.

La teoria generale, sia delle guide che delle linee, è basata sull'ipotesi semplificativa di avere conduttori perfetti. Questa ipotesi viene rimossa nel Paragrafo 11, dedicato allo studio dell'attenuazione nelle guide reali. Infine il Paragrafo 12 mostra come sia possibile determinare univocamente i campi in una guida, quando siano assegnate opportune condizioni al contorno.

La teoria delle guide d'onda è basata sul concetto di "sviluppo in autofunzioni" di una funzione a quadrato sommabile, concetto trattato nei corsi di "Metodi Matematici" per la Fisica e l'Ingegneria. Le autofunzioni che intervengono nello studio delle guide sono quelle dell'operatore di Laplace (∇^2) con condizioni al contorno di Dirichelet o di Neumann. Per comodità del lettore, le proprietà di queste autofunzioni e dei corrispondenti autovalori sono riassunte nell'Appendice D.

3.1 Potenziali di Hertz-Debye

Lo studio del campo nelle guide d'onda cilindriche è facilitato dal fatto che, in assenza di sorgenti ($\mathbf{J}_0 = 0$), il campo in un mezzo isotropo e omogeneo può essere dedotto da due potenziali scalari. Per vedere come ciò sia possibile è necessario premettere che un generico vettore solenoidale $\mathbf{V}$, trasversale rispetto ad una direzione fissa (asse z), può sempre essere espresso mediante una relazione del tipo

$$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{u}_z \varphi$$

dove φ è un opportuno potenziale scalare.

■ DIMOSTRAZIONE È ben noto che un campo solenoidale può sempre essere rappresentato mediante un'espressione del tipo

$$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$$

dove $\mathbf{A}$ è un opportuno potenziale vettoriale. Se $\mathbf{V}$ è trasversale a z, le componenti A_x e A_y soddisfano la condizione:

$$V_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

In particolare può aversi $A_x = A_y = 0$ (**A** diretto secondo z) e può quindi scrivere $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{u}_z\varphi$. Però la precedente condizione può essere verificata anche se le componenti trasversali di **A** non sono nulle, e quindi può nascere il dubbio che porre $\mathbf{A} = \mathbf{u}_z\varphi$ sia lecito solo in casi particolari. Si osserva però che il potenziale vettoriale è definito a meno di un gradiente; infatti introducendo una qualsiasi funzione continua χ e ponendo $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\chi$ si ha pure

$$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}'$$

Grazie a questa proprietà si vede che, anche se A_x e A_y non sono nulli, è sempre possibile rappresentare **V** mediante un altro potenziale **A'** con $A'_x = A'_y = 0$. Basta trasformare il potenziale utilizzando un funzione χ che soddisfa le relazioni

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = A_x \qquad \frac{\partial \chi}{\partial y} = A_y$$

(le due equazioni sono compatibili, perché sostituendo nella relazione che collega A_x e A_y si ottiene un'identità). Con la suddetta scelta di χ il potenziale **A'** è diretto secondo z e quindi si può sempre porre $\mathbf{A}' = \mathbf{u}_z\varphi$, $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{u}_z\varphi$. ■

Ciò premesso si consideri un generico campo in cui **E** è trasversale rispetto all'asse z. Poiché in un mezzo omogeneo isotropo privo di sorgenti si ha $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, è possibile esprimere il campo mediante relazioni del tipo

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{u}_z\Phi \qquad \mathbf{H} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{j\omega\mu} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_z\Phi}{j\omega\mu} \tag{1.1}$$

dove Φ è un opportuno potenziale scalare. Analogamente, poiché $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, un generico campo in cui **H** è trasversale rispetto all'asse z, può sempre essere espresso mediante relazioni del tipo:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{u}_z\Psi \qquad \mathbf{E} = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{j\omega\varepsilon} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_z\Psi}{j\omega\varepsilon} \tag{1.2}$$

dove Ψ è un altro potenziale scalare. Sovrapponendo campi del tipo (1.1) e (1.2) si ottiene un campo del tutto generico, in cui **E** e **H** sono solenoidali, ma non necessariamente trasversali rispetto all'asse z. Pertanto, *in assenza di sorgenti, il campo elettromagnetico in un mezzo omogeneo e isotropo può sempre essere espresso come segue*:

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_z\Psi}{j\omega\varepsilon} - \nabla \times \mathbf{u}_z\Phi \tag{1.3a}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_z\Phi}{j\omega\mu} + \nabla \times \mathbf{u}_z\Psi \tag{1.3b}$$

Il campo dipende dai due potenziali scalari Φ e Ψ, detti potenziali di Hertz-Debye. Bisogna precisare quali sono le equazioni che governano i potenziali. Nella (1.1), per esprimere H in funzione di Φ, si è usata una sola equazione di Maxwell. Usando anche l'equazione $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\, \varepsilon \mathbf{E}$ si ottiene:

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_z \Phi = k^2\, \nabla \times \mathbf{u}_z \Phi \tag{1.4}$$

dove k ha il solito significato (Equazione 1.5, Capitolo 2). D'altro canto, per le identità (A.34), (A.31), (A.55) si ha:

$$\nabla \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_z \Phi) = \nabla \times (\nabla\, \nabla \cdot \mathbf{u}_z \Phi - \mathbf{u}_z \nabla^2 \Phi) = -\, \nabla \times \mathbf{u}_z \nabla^2 \Phi$$

Quindi la (1.4) diviene:

$$\nabla \times \mathbf{u}_z\, (\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi) = 0 \tag{1.5}$$

Analogamente, dalle (1.2) e dall'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\, \mu \mathbf{H}$ si ricava:

$$\nabla \times \mathbf{u}_z\, (\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi) = 0 \tag{1.6}$$

Perché le (1.5) e (1.6) siano verificate è sufficiente che le espressioni in parentesi siano nulle. Si può quindi assumere che i potenziali debbano soddisfare le equazioni:[1]

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \qquad \nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \tag{1.7}$$

Qualsiasi coppia di soluzioni delle (1.7), sostituita nelle (1.3) fornisce una coppia di vettori **E**, **H** che soddisfano le equazioni di Maxwell.

Le (1.3) possono essere scritte in forma diversa, utilizzando le identità (A.34) (A.26) (A.29). Osservando che $\omega\varepsilon = k/\eta$ e che $\omega\mu = k\eta$ si ottiene:

$$\mathbf{E} = j\frac{\eta}{k}\left(\mathbf{u}_z \nabla^2 \Psi - \frac{\partial}{\partial z} \nabla \Psi\right) + \mathbf{u}_z \times \nabla \Phi$$

$$\mathbf{H} = j\frac{1}{\eta k}\left(\mathbf{u}_z \nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial z} \nabla \Phi\right) - \mathbf{u}_z \times \nabla \Psi$$

Conviene considerare separatamente i campi trasversali all'asse z (in seguito indicati con $\mathbf{E}_T$ e $\mathbf{H}_T$) e le componenti longitudinali E_z, H_z. A questo scopo conviene porre:

---

1 Equazioni differenziali della forma (1.7) si incontrano frequentemente nello studio delle onde, anche in acustica. Esse prendono il nome di "equazioni di Helmoltz" omogenee. Si può dimostrare che qualsiasi soluzione delle (1.7) è infinitamente differenziabile all'interno del suo dominio di definizione (C. Müller, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer Verlag, 1969, p. 117).

$$\nabla^2\Psi = \nabla_T^2\Psi + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \qquad \nabla^2\Phi = \nabla_T^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla\Psi = \nabla_T\Psi + \mathbf{u}_z \frac{\partial\Psi}{\partial z} \qquad \nabla\Phi = \nabla_T\Phi + \mathbf{u}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

dove sono stati introdotti gli operatori

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \nabla_T = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

Così le (1.7) assumono la forma:

$$\nabla_T^2\Psi + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + k^2\Psi = 0 \tag{1.8a}$$

$$\nabla_T^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + k^2\Phi = 0 \tag{1.8b}$$

e le espressioni del campo divengono:

$$\mathbf{E}_T = -j\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial z}\nabla_T\Psi + \mathbf{u}_z \times \nabla_T\Phi \tag{1.9a}$$

$$\mathbf{H}_T = -j\frac{1}{\eta k}\frac{\partial}{\partial z}\nabla_T\Phi - \mathbf{u}_z \times \nabla_T\Psi \tag{1.9b}$$

$$E_z = j\frac{1}{k}\nabla_T^2\Psi \tag{1.9c}$$

$$H_z = j\frac{1}{\eta k}\nabla_T^2\Phi \tag{1.9d}$$

È interessante notare che E_z e H_z dipendono solo da Ψ e da Φ rispettivamente.

Nei problemi specifici il campo deve essere determinato sotto certe condizioni al contorno, consistenti in certi vincoli sulle componenti di **E** e/o di **H** (esempio la condizione di parete elettrica, la condizione di Leontovic, la condizione di continuità dei campi tangenziali sulle superfici di discontinuità del mezzo). Se le superfici di contorno sono piane o cilindriche, parallele all'asse z, ovvero piane perpendicolari allo stesso asse, attraverso le (1.9) le condizioni sui campi si traducono in semplici condizioni sui potenziali (il procedimento diverrà più chiaro nel successivo paragrafo). I potenziali vengono determinati risolvendo le (1.8) sotto queste condizioni al contorno e, successivamente, il campo viene dedotto mediante le (1.9). Questo modo di procedere è utile perché il problema della

soluzione delle equazioni di Maxwell è ricondotto alla soluzione delle due equazioni scalari che governano i potenziali. Come si vedrà nel paragrafo successivo, la semplificazione è notevole quando le condizioni al contorno sono indipendenti per i due potenziali, perché in questo caso le (1.8) possono essere risolte separatamente.

3.2 Teoria delle guide d'onda

La Figura 2.1 rappresenta una guida d'onda costituita da un mezzo omogeneo e isotropo delimitato da un conduttore tubolare di sezione arbitraria S. Il conduttore viene considerato perfetto. Lo studio viene svolto introducendo un sistema di coordinate con l'asse z parallelo alla parete metallica. Esso è basato sull'uso dei potenziali di Hertz-Debye e delle equazioni (1.8) e (1.9).

CONDIZIONI AL CONTORNO Poiché il campo elettrico è perpendicolare alla parete conduttrice, sul contorno C di una generica sezione trasversale S deve aversi:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_T = 0 \qquad E_z = 0$$

Pertanto, in base alle (1.9*a*, *c*) deve risultare:

$$\left.\begin{aligned} & -j\frac{\eta}{k}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{n}\times\nabla_T\Psi + \mathbf{n}\times(\mathbf{u}_z\times\nabla_T\Phi) = 0 \qquad (2.1a) \\ & \nabla_T^2\Psi = 0 \qquad (2.1b) \end{aligned}\right\} \text{ su C}$$

Il vettore $\nabla_T\Psi$ è perpendicolare all'asse z e quindi, sul contorno, ha una componente nella direzione di $\mathbf{n}$ e una nella direzione del versore $\mathbf{c} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_z$ (Figura 2.1). Si ha evidentemente:

$$\mathbf{n} \times \nabla_T\Psi = \mathbf{n} \times \mathbf{c}\frac{\partial\Psi}{\partial c} = -\frac{\partial\Psi}{\partial c}\mathbf{u}_z$$

dove è stata introdotta la derivata nella direzione tangente al contorno. Si ha inoltre:

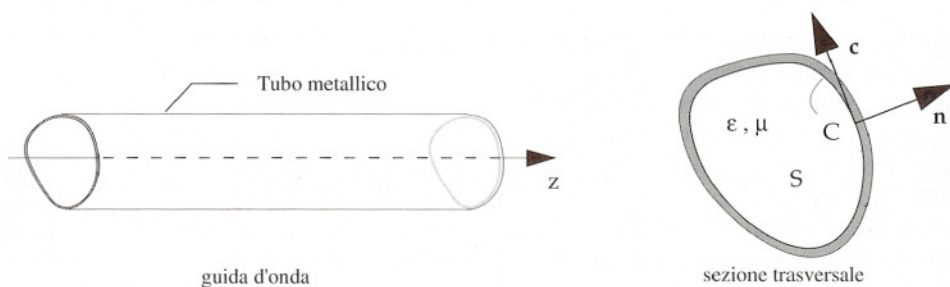



Figura 2.1

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_z \times \nabla_T \Phi) = (\mathbf{n} \cdot \nabla_T \Phi)\mathbf{u}_z - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_z)\nabla_T \Phi = (\mathbf{n} \cdot \nabla_T \Phi)\mathbf{u}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\mathbf{u}_z$$

dove è stata introdotta la derivata nella direzione della normale al contorno. Tenendo conto delle due ultime relazioni e della (1.8*a*) le condizioni (2.1) possono essere poste nella forma:

$$\left.\begin{aligned} & j\frac{\eta}{k}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{su C}$$

Queste condizioni sono verificate se:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial c} = 0 \qquad (2.2a) \\ & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi = 0 \qquad (2.2b) \end{aligned}\right\} \quad \text{su C}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{su C} \qquad (2.3)$$

Per la (2.2*a*) Ψ è costante sul contorno di ciascuna sezione trasversale. In particolare, se si assume che Ψ sia nullo sul contorno le (2.2) sono entrambe verificate. La successive considerazioni mostrano che, imponendo questa particolare condizione, lo studio del campo può essere svolto senza perdere in generalità.

■ Il potenziale Ψ è definito a meno di una qualsiasi funzione $\Psi^0 = \Psi^0(z)$, indipendente dalle coordinate trasversali, che soddisfa:

$$\frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial z^2} + k^2 \Psi^0 = 0$$

Infatti, detta Ψ' una soluzione della (1.8*a*) che soddisfa le condizioni (2.2), risulta che anche $\Psi'' = \Psi' + \Psi^0$ soddisfa la stessa equazione e le stesse condizioni. D'altro canto si ha evidentemente

$$\nabla_T \Psi'' = \nabla_T \Psi' \qquad\qquad \nabla_T^2 \Psi'' = \nabla_T^2 \Psi'$$

e quindi, attraverso le (1.9), Ψ' e Ψ'' danno luogo allo stesso campo. In particolare la funzione Ψ^0 può essere scelta in maniera da annullare il valore al contorno di Ψ''. Dunque, senza perdere in generalità, si può restringere la ricerca delle soluzioni della (1.8*a*) alle sole funzioni che si annullano sul contorno. ■

Riassumendo, in una guida d'onda delimitata da un conduttore perfetto i potenziali Ψ e Φ sono soluzioni dei seguenti problemi:

$$\nabla_T^2\Psi + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + k^2\Psi = 0 \qquad (2.4a)$$

$\Psi = 0$ su C (cond. di *Dirichelet*)

$$\nabla_T^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + k^2\Phi = 0 \qquad (2.4b)$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ su C (cond. di *Neumann*)

I problemi (2.4) sono distinti e ciascuno di essi ammette come soluzione particolare un potenziale nullo; pertanto possono esistere campi per i quali $\Psi = 0$, $\Phi \neq 0$ e campi per i quali $\Psi \neq 0$, $\Phi = 0$. In generale il campo nella guida può essere considerato come risultante dalla sovrapposizione di campi dei due tipi.

FORMA GENERALE DEI POTENZIALI Grazie alla loro continuità i potenziali appartengono allo spazio L^2 (S) costituito dalle funzioni di x, y, a quadrato sommabile, definite su S (la coordinata z è considerata come un parametro). Ciò permette di applicare i concetti richiamati nell'Appendice D, in particolare di rappresentare i potenziali sotto forma di serie di autofunzioni dell'operatore ∇_T^2. Si può quindi porre

$$\Psi = \sum_{1}^{\infty}{}_i\, \zeta'_i(z)\psi_i(x, y) \qquad \Phi = \sum_{1}^{\infty}{}_i\, \zeta''_i(z)\varphi_i(x, y) \qquad (2.5)$$

dove ψ_i, φ_i sono le autofunzioni che risultano dalla soluzione dei seguenti problemi agli autovalori:

$$\nabla_T^2\psi_i + \kappa'^2_i\psi_i = 0 \text{ su S} \qquad \psi_i = 0 \text{ su C} \qquad \int_S \psi_i^2\, dS = 1 \qquad (2.6a)$$

$$\nabla_T^2\varphi_i + \kappa''^2_i\varphi_i = 0 \text{ su S} \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = 0 \text{ su C} \qquad \int_S \varphi_i^2\, dS = 1 \qquad (2.6b)$$

L'indice i = 1, 2, ... indica la posizione degli autovalori (κ'^2_i e κ''^2_i), ordinati in due successioni non decrescenti. Gli autovalori vengono rappresentati sotto la forma di quadrati delle quantità *reali positive* κ'_i e κ''_i, perché essi sono reali positivi (fa eccezione κ''_1, corrispondente all'autofunzione costante $\varphi_1 = S^{-1/2}$, che ha autovalore nullo). Le autofunzioni possono essere considerate reali e sono normalizzate dalle condizioni sugli integrali. In linea di principio le autofunzioni e gli autovalori possono essere determinati risolvendo i problemi (2.6), o per via analitica (vedi Paragrafo 4, 6, 9) ovvero - quando ciò è impossibile - per via numerica, mediante calcolatore. In ogni caso *le autofunzioni e gli autovalori dipendono solo dalla geometria della sezione trasversale e non dalle caratteristiche del mezzo.*

Le funzioni ζ'_i e ζ''_i devono essere determinate in modo che le serie di autofunzioni soddisfino i problemi (2.4). Poiché Ψ e Φ soddisfano le stesse condizioni al contorno delle autofunzioni utilizzate nei rispettivi sviluppi, si ha (vedi Equazione D.4 e D.7):

$$\nabla_T^2 \Psi = -\sum_{1}^{\infty} {}_i\, \kappa_i'^2\, \zeta_i'\, \psi_i \qquad \nabla_T^2 \Phi = -\sum_{2}^{\infty} {}_i\, \kappa_i''^2\, \zeta_i''\, \varphi_i \tag{2.7}$$

(si noti che l'autofunzione φ_1 non appare nella seconda espressione perché il suo autovalore è nullo). Inoltre, per le (D.9) risulta:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \sum_{1}^{\infty} {}_i\, \frac{d^2 \zeta_i'}{dz^2} \psi_i \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \sum_{1}^{\infty} {}_i\, \frac{d^2 \zeta_i''}{dz^2} \varphi_i \tag{2.8}$$

Sostituendo gli sviluppi (2.5), (2.6), (2.7) nelle (2.4) si ottiene:

$$\sum_{1}^{\infty} {}_i \left(\frac{d^2 \zeta_i'}{dz^2} - \gamma_i'^2\, \zeta_i' \right) \psi_i = 0 \qquad \sum_{1}^{\infty} {}_i \left(\frac{d^2 \zeta_i''}{dz^2} - \gamma_i''^2\, \zeta_i'' \right) \varphi_i = 0 \tag{2.9}$$

dove

$$\gamma_i'^2 = \kappa_i'^2 - k^2 \qquad \gamma_i''^2 = \kappa_i''^2 - k^2 \tag{2.10}$$

Le autofunzioni sono linearmente indipendenti, così che le (2.9) sono verificate solo se:

$$\frac{d^2 \zeta_i'}{dz^2} - \gamma_i'^2\, \zeta_i' = 0 \qquad \frac{d^2 \zeta_i''}{dz^2} - \gamma_i''^2\, \zeta_i'' = 0$$

Le soluzioni generali di queste equazioni sono del tipo

$$\zeta_i' = A_i'\, e^{-\gamma_i' z} + B_i'\, e^{\gamma_i' z} \qquad \zeta_i'' = A_i''\, e^{-\gamma_i'' z} + B_i''\, e^{\gamma_i'' z} \tag{2.11}$$

dove A_i', B_i', A_i'', B_i'' sono costanti arbitrarie e γ_i', γ_i'' sono le radici delle (2.10). Poiché $\operatorname{Im} k^2 \leq 0$ (vedi Capitolo 2, Equazione 1.5) gli argomenti di $\gamma_i'^2$ e di $\gamma_i''^2$ sono compresi fra 0 e π; pertanto, scegliendo opportunamente il segno delle radici si ha:

$$\gamma_i' = \sqrt{\kappa_i'^2 - k^2} \qquad (\operatorname{Re} \gamma_i' \geq 0,\ \operatorname{Im} \gamma_i' \geq 0) \tag{2.12a}$$

$$\gamma_i'' = \sqrt{\kappa_i''^2 - k^2} \qquad (\operatorname{Re} \gamma_i'' \geq 0,\ \operatorname{Im} \gamma_i'' \geq 0) \tag{2.12b}$$

Sostituendo le (2.11) nelle (2.5) si ottengono le forme generali dei potenziali di Hertz-Debye in una guida d'onda.

FORMA GENERALE DEL CAMPO Per i teoremi I e II citati nell'Appendice D, si ha:

$$\nabla_T \Psi = \sum_{1}^{\infty} {}_i\, \zeta_i'\, \nabla_T \psi_i \qquad \nabla_T \Phi = \sum_{2}^{\infty} {}_i\, \zeta_i''\, \nabla_T \varphi_i \tag{2.13a}$$

$$\nabla_T \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{\partial \zeta'_i}{\partial z} \nabla_T \psi_i \qquad \nabla_T \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{2}^{\infty}{}_i \frac{\partial \zeta''_i}{\partial z} \nabla_T \varphi_i \tag{2.13b}$$

(l'autofunzione φ_1 non appare nelle precedenti espressioni perché il suo gradiente è nullo). Sostituendo le (2.5), (2.13), (2.11) nelle (1.9) si ottengono le seguenti espressioni generali del campo dentro una guida d'onda:

$$\mathbf{E}_T = \sum_{1}^{\infty}{}_i V'_i \, \mathbf{e}'_i + \sum_{2}^{\infty}{}_i V''_i \, \mathbf{e}''_i \tag{2.14a}$$

$$\mathbf{H}_T = \sum_{1}^{\infty}{}_i I'_i \, \mathbf{h}'_i + \sum_{2}^{\infty}{}_i I''_i \, \mathbf{h}''_i \tag{2.14b}$$

$$E_z = \sum_{1}^{\infty}{}_i j \frac{\eta \kappa'_i}{k} I'_i \, \psi_i \tag{2.14c}$$

$$H_z = \sum_{2}^{\infty}{}_i j \frac{\kappa''_i}{\eta k} V''_i \, \varphi_i \tag{2.14d}$$

dove:

$$\mathbf{e}'_i = -\frac{\nabla_T \psi_i}{\kappa'_i} \tag{2.15a}$$

$$\mathbf{h}'_i = \mathbf{u}_z \times \mathbf{e}'_i \tag{2.16a}$$

$$V'_i = V'^{+}_i \, e^{-\gamma'_i z} + V'^{-}_i \, e^{\gamma'_i z} \tag{2.17a}$$

$$I'_i = \frac{V'^{+}_i}{Z'_i} e^{-\gamma'_i z} - \frac{V'^{-}_i}{Z'_i} e^{\gamma'_i z} \tag{2.18a}$$

$$Z'_i = \frac{\eta \gamma'_i}{jk} \tag{2.19a}$$

$$\mathbf{h}''_i = -\frac{\nabla_T \varphi_i}{\kappa''_i} \tag{2.15b}$$

$$\mathbf{e}''_i = \mathbf{h}''_i \times \mathbf{u}_z \tag{2.16b}$$

$$V''_i = V''^{+}_i \, e^{-\gamma''_i z} + V''^{-}_i \, e^{\gamma''_i z} \tag{2.17b}$$

$$I''_i = \frac{V''^{+}_i}{Z''_i} e^{-\gamma''_i z} - \frac{V''^{-}_i}{Z''_i} e^{\gamma''_i z} \tag{2.18b}$$

$$Z''_i = \frac{j\eta k}{\gamma''_i} \tag{2.19b}$$

I simboli $V'^{\pm}_i$ e $V''^{\pm}_i$ indicano costanti complesse arbitrarie, proporzionali alle originarie costanti A'_1, B'_1, ecc.

MODI Secondo le (2.14) il campo in una guida d'onda è costituito dalla sovrapposizione di campi parziali ("modi") di due tipi:

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_i = V'_i\,\mathbf{e}'_i + j\dfrac{\eta\kappa'_i}{k} I'_i\,\psi_i\,\mathbf{u}_z \\ \mathbf{H}'_i = I'_i\,\mathbf{h}'_i \end{cases} \qquad \text{(modi TM)} \qquad (2.20a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}''_i = V''_i\,\mathbf{e}''_i \\ \mathbf{H}''_i = I''_i\,\mathbf{h}''_i + j\dfrac{\kappa''_i}{\eta k} V''_i\,\varphi_i\,\mathbf{u}_z \end{cases} \qquad \text{(modi TE)} \qquad (2.20b)$$

Ciascun modo è una soluzione particolare delle equazioni di Maxwell e soddisfa le condizioni al contorno imposte dalla presenza della parete metallica. Nei modi TM si ha $E_z \neq 0$, $H_z = 0$; nei modi TE si ha invece $H_z \neq 0$, $E_z = 0$.

I vettori trasversali **e**, **h** sono reali (come le autofunzioni) e dipendono solo dalle coordinate x, y; essi prendono il nome di "vettori modali". Le quantità complesse V, I (che hanno le dimensioni di tensioni e di correnti) dipendono solo da z e prendono il nome di "tensioni e correnti modali". Le tensioni e le correnti sono legate fra di loro da relazioni formalmente identiche per i modi dei due tipi, attraverso le quantità Z'_i e Z''_i, che prendono il nome di "impedenze caratteristiche" dei modi TM e TE rispettivamente.

Poiché in ciascun modo le componenti di **E** e di **H** hanno la forma di prodotti fra una funzione di x,y e una funzione di z, la dipendenza del campo dalle coordinate trasversali è identica in tutta la guida. Essa è determinata dalla forma delle autofunzioni ψ_i (per i modi TM) e φ_i (per i modi TE). Poiché le autofunzioni sono reali la fase non dipende dalle coordinate trasversali. Dunque le variazioni di fase possono aversi solo nella direzione di z e dipendono dall'andamento delle tensioni e delle correnti modali. Se la fase varia, i modi si propagano secondo onde piane nella direzione di z.

Queste considerazioni valgono per i singoli modi, ma non per i campi (2.14), ottenuti per sovrapposizione di più modi. Infatti, a causa della diversità delle costanti γ_i, le tensioni e le correnti dei vari modi hanno una diversa dipendenza da z, cosicché nelle (2.6) i vettori modali e le autofunzioni si combinano in maniera mutevole al variare di z, dando luogo a campi di andamento variabile da sezione a sezione. L'immutabilità dell'andamento del campo nelle varie sezioni trasversali contraddistingue i modi da tutti gli altri campi che possono esistere nella guida.

3.3 Considerazioni generali sulla propagazione dei modi

La tensione e la corrente di un modo generico hanno la forma:

$$V = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \qquad I = \frac{V^+}{Z_c} e^{-\gamma z} - \frac{V^-}{Z_c} e^{\gamma z} \qquad (3.1)$$

dove Z_c indica l'impedenza caratteristica (Z' o Z"); inoltre

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - k^2} \qquad (3.2)$$

dove γ e κ indicano genericamente γ'_i, γ''_i, κ'_i, κ''_i.

Poiché nelle guide il mezzo è sempre un dielettrico con angolo di perdita bassissimo (tipicamente l'aria), è spesso lecito supporre che il mezzo sia senza perdite. In questa ipotesi k è reale e si può scrivere

$$k = 2\pi/\lambda = \omega/v$$

dove λ e v indicano la lunghezza d'onda e la velocità di fase delle onde piane uniformi nel mezzo considerato. Ponendo

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\kappa} \tag{3.3}$$

e introducendo λ e λ_c nella (3.2) si ottiene:

$$\gamma = \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_c}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2} \qquad \text{se } \lambda > \lambda_c \tag{3.4a}$$

$$\gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \qquad \text{se } \lambda < \lambda_c \tag{3.4b}$$

La quantità indicata con λ_c dipende dall'autovalore e quindi dalla geometria della guida e dal modo considerato. Dunque, per una data guida e un dato modo, il verificarsi dell'una o dell'altra fra le condizioni (3.4) dipende da λ, cioè dalla frequenza. Quando la frequenza è tanto alta da avere $\lambda < \lambda_c$ risulta:

$$V = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \qquad I = \frac{V^+}{Z_c} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_c} e^{j\beta z} \tag{3.5}$$

In queste condizioni la tensione e la corrente sono costituite dalla somma di due onde che si propagano senza attenuazione nei due versi di z, con costante di fase data dalla (3.4*b*). Invece, quando la frequenza è tanto bassa da avere $\lambda > \lambda_c$ risulta:

$$V = V^+ e^{-\alpha z} + V^- e^{\alpha z} \qquad I = \frac{V^+}{Z_c} e^{-\alpha z} - \frac{V^-}{Z_c} e^{\alpha z}$$

In questo caso V e I sono dati dalla somma di due termini evanescenti la cui fase non dipende dalle coordinate. In questo caso il modo non si propaga.

La frequenza a partire dalla quale si ha propagazione prende il nome di "frequenza di taglio" del modo. Essa è data da:[1]

1 La (3.6) fornisce esplicitamente il valore della frequenza di taglio purché v sia indipendente dalla frequenza (mezzo non dispersivo). Normalmente v è praticamente costante nelle bande di frequenza in cui operano le guide.

$$f_c = v/\lambda_c \tag{3.6}$$

Analogamente λ_c prende il nome di "lunghezza d'onda di taglio" del modo. Introducendo la pulsazione di taglio

$$\omega_c = 2\pi f_c = \kappa v$$

e osservando che $\lambda/\lambda_c = f_c/f = \omega_c/\omega$, la (3.4*b*) diviene:

$$\beta = \frac{\omega}{v}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

da cui si ottiene la relazione di dispersione:

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 + (v\beta)^2} \tag{3.7}$$

Il diagramma di dispersione del modo è rappresentato nella Figura 3.1.

Per evitare confusione con i simboli v e λ, la velocità di fase e la lunghezza d'onda di un modo che si propaga vengono indicate con v_f e λ_g. Si ha:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \tag{3.8}$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \tag{3.9}$$

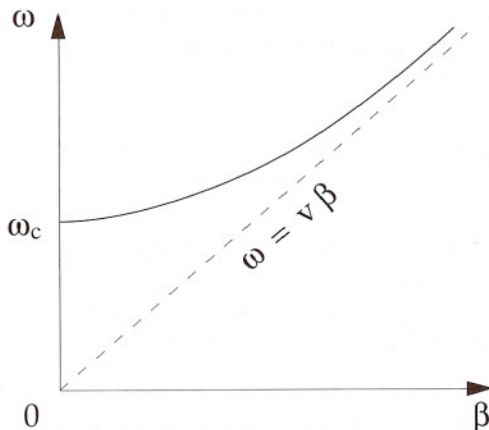



Figura 3.1

Gli andamenti caratteristici della velocità di fase e della lunghezza d'onda sono indicati in Figura 3.2. La velocità di fase è sempre più elevata di quelle delle onde piane uniformi, sicché i modi delle guide si propagano come onde "veloci".

Le impedenza caratteristiche dei modi TM e TE hanno espressioni diverse. Introducendo le (3.4) nelle (2.19). Si trova:

$$Z' = \begin{cases} \eta\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \eta\dfrac{\lambda}{\lambda_g} & \text{per } \lambda < \lambda_c \qquad (3.9a) \\ -j\eta\sqrt{\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1} & \text{per } \lambda > \lambda_c \qquad (3.9b) \end{cases}$$

$$Z'' = \begin{cases} \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \eta\dfrac{\lambda_g}{\lambda} & \text{per } \lambda < \lambda_c \qquad (3.10a) \\ \dfrac{j\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1}} & \text{per } \lambda > \lambda_c \qquad (3.10b) \end{cases}$$

L'impedenza caratteristica dei modi è reale se il modo si propaga, immaginaria in caso contrario. Alla frequenza f la guida permette la propagazione dei soli modi che hanno la frequenza di taglio minore di f. Tutti gli altri modi possono esistere nella guida solo sotto forma di campi evanescenti. Pertanto, nelle rappresentazioni generali (2.14), solo un numero finito di termini rappresenta onde che si propagano, mentre tutti gli altri termini rappresentano campi evanescenti.

Il modo con la più piccola frequenza di taglio prende il nome di "modo dominante"[1],

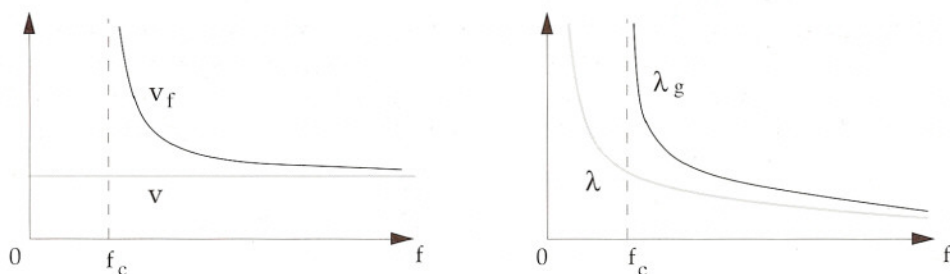



Figura 3.2

1 La frequenza del modo dominate è proporzionale al più piccolo fra gli autovalori relativi ai problemi (2.6) (a parte l'autovalore nullo del problema (2.6*b*) che, come si è detto, non corrisponde ad alcun modo). Si può mostrare che il modo dominante delle guide è sempre il primo modo TE.

mentre gli altri vengono detti "modi superiori". La frequenza di taglio del modo dominante viene detta "frequenza di taglio della guida", perché al disotto di essa la guida non permette la propagazione di alcun modo. Comunemente le guide vengono utilizzate nelle banda di frequenza in cui è possibile la propagazione del solo modo dominante (funzionamento unimodale). Tale banda si estende nominalmente dalla frequenza di taglio della guida alla frequenza di taglio del primo modo superiore.[1]

Se si tiene conto delle perdite dielettriche si ha (vedi Paragrafo 3, Capitolo 2):

$$k \approx \frac{\omega}{v}\left(1 - j\frac{\theta_e}{2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 - j\frac{\theta_e}{2}\right) \qquad (\theta_e << 1)$$

Sostituendo nella (3.2), introducendo la lunghezza d'onda di taglio e trascurando un termine dell'ordine di θ_e^2, si ottiene:

$$\gamma = \alpha + j\beta \approx \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + j\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \theta_e} \tag{3.11}$$

La radice è complessa per qualsiasi valore di λ, cosicché sia α che β differiscono da zero sempre. Quando la frequenza non è troppo prossima a quella di taglio (precisamente se $|f - f_c| >> \theta_e f_c$) valgono le seguenti espressioni approssimate:

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_c}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2} \qquad \beta \approx \frac{\theta_e / 2}{(\lambda / \lambda_c)^2 - 1}\alpha \qquad (\lambda > \lambda_c) \tag{3.12a}$$

$$\beta \approx \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \qquad \alpha \approx \frac{\theta_e / 2}{1 - (\lambda / \lambda_c)^2}\beta \qquad (\lambda < \lambda_c) \tag{3.12b}$$

Poiché l'angolo di perdita è sempre molto piccolo, l'attenuazione al disopra della frequenza di taglio è molto minore di quella che si ha al disotto della stessa frequenza. Pertanto, in pratica, il concetto di frequenza di taglio rimane valido anche quando si considerano le perdite. Si lascia al lettore di verificare che, proprio alla frequenza di taglio, si ha:

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{\theta_e}}\, v \qquad \lambda_g = \sqrt{\frac{2}{\theta_e}}\, \lambda_c \qquad \alpha = \frac{\sqrt{2\theta_e \pi}}{\lambda_c} \qquad (\lambda = \lambda_c)$$

A causa della piccolezza dell'angolo di perdita la velocità di fase e la lunghezza d'onda sono molto elevate, ma non infinite come risulterebbe dalla trattazione della guida senza perdite.

---

1 Nelle guide reali si evita di lavorare troppo vicino alla frequenza di taglio per evitare attenuazioni eccessive dovute alle perdite nel dielettrico e nel conduttore (vedi Paragrafo 11).

È opportuno sottolineare che i precedenti risultati non tengono conto delle perdite nel conduttore. In particolare l'attenuazione (3.12*b*) è minore dell'attenuazione effettiva, come si vedrà nel Paragrafo 11.

3.4 Guida d'onda rettangolare

Le (2.4) sono equazioni di Helmoltz omogenee in due dimensioni. Volendo determinare le autofunzioni per via analitica, conviene adottare un sistema di coordinate trasversali che permette di rappresentare il contorno C mediante equazioni le più semplici possibile. Così, conviene utilizzare le coordinate cartesiane quando C è costituito da segmenti perpendicolari fra loro, coordinate polari quando C è costituito da archi di cerchio e segmenti radiali, ecc. La forma del laplaciano dipende dal tipo di coordinate utilizzate. In certi sistemi di coordinate la forma è tale da permettere di trovare la soluzione utilizzando il "metodo di separazione delle variabili", che permette di ricondurre la soluzione dell'equazione di Helmoltz alla soluzione di equazioni differenziali ordinarie. In coordinate cartesiane il metodo di separazione delle variabili si presta a trattare molto semplicemente la guida a sezione rettangolare (Figura 4.1), che è la guida più usata nella tecnica delle microonde. Si assume che l'asse x sia preso nella direzione del lato maggiore. Pertanto con i simboli indicati in figura si ha $a \geq b$.

Lo studio dei modi TM richiede la soluzione del problema:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \kappa'^2 \psi = 0 \qquad (4.1a)$$

$$\psi(x, 0) = \psi(0, y) = 0 \qquad (4.1b)$$

$$\psi(x, b) = \psi(a, y) = 0 \qquad (4.1c)$$

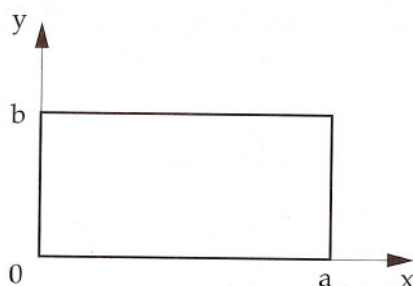



Figura 4.1

Procedendo con il metodo di separazione delle variabili si pone:

$$\psi = F_x(x) F_y(y) \qquad (4.2)$$

Sostituendo la (4.2) nella (4.1*a*) si ha:

$$F_y \frac{d^2 F_x}{dx^2} + F_x \frac{d^2 F_y}{dy^2} + \kappa'^2 F_x F_y = 0$$

Dividendo per $F_x F_y$ si ottiene:

$$\frac{1}{F_x} \frac{d^2 F_x}{dx^2} + \frac{1}{F_y} \frac{d^2 F_y}{dy^2} + \kappa'^2 = 0$$

Poiché x e y sono variabili indipendenti, questa equazione può essere verificata solo se i due termini contenenti le derivate sono entrambi costanti. Pertanto, indicando con $-\kappa_x'^2$ e $-\kappa_y'^2$ le due costanti (per ora ignote) si ha:

$$\frac{d^2F_x}{dx^2} + \kappa_x'^2 F_x = 0 \qquad \frac{d^2F_y}{dy^2} + \kappa_y'^2 F_y = 0$$

$$\kappa'^2 = \kappa_x'^2 + \kappa_y'^2 \tag{4.3}$$

Le due equazioni differenziali hanno le seguenti soluzioni generali:

$$F_x = A\cos\kappa'_x x + B\sin\kappa'_x x \qquad F_y = C\cos\kappa_y y + D\sin\kappa_y y$$

dove A, B, C, D sono costanti arbitrarie. Pertanto la (4.1*a*) è soddisfatta da funzioni del tipo:

$$\psi = (A\cos\kappa'_x x + B\sin\kappa'_x x)\,(C\cos\kappa'_y y + D\sin\kappa'_y y) \tag{4.4}$$

Affinché siano verificate le condizioni al contorno (4.1*b*) le costanti A e C devono essere nulle, in maniera da eliminare i termini cosinusoidali, che non si annullano in x = 0 o in y = 0. Introducendo una nuova costante M = BD si ha quindi:

$$\psi = M\sin\kappa'_x x\ \sin\kappa'_y y \tag{4.5}$$

Per le (4.1*c*) deve aversi

$$\sin\kappa'_y b = 0 \qquad \sin\kappa'_x a = 0$$

da cui

$$\kappa'_x a = n\pi \qquad \kappa'_y b = p\pi \qquad (n,\ p = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Si noti che nessuno dei due indici può essere nullo, perché l'annullamento di una delle due costanti κ'_x, κ'_y provocherebbe l'annullamento di ψ. Si noti inoltre che considerare gli interi negativi porterebbe alle stesse autofunzioni con il segno cambiato, differenza irrilevante a causa della arbitrarietà di M. Sostituendo nella (4.3) e marcando gli autovalori e le autofunzioni con la coppia di indici (n, p) invece che con l'unico indice i, si ha:

$$\kappa'_{np} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2} \qquad (n, p = 1, 2, \ldots)$$

$$\psi_{np} = M\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{b}$$

La costante M viene determinata normalizzando le autofunzioni. Deve aversi:

$$1 = M^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx \int_0^b \sin^2 \frac{p\pi y}{b} dy = \frac{ab}{4} M^2$$

e quindi $M = 2/\sqrt{ab}$.

Non resta altro da fare che determinare le espressioni dei campi modali e della lunghezza d'onda di taglio λ'_{np}, cosa che non presenta alcuna difficoltà. I risultati sono riassunti nella Tabella 4.1.

Lo studio dei modi TE richiede la soluzione del problema:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \kappa''^2 \varphi = 0 \tag{4.6a}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{x,\,0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{0,\,y} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{x,\,b} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{a,\,y} = 0 \tag{4.6b}$$

Il calcolo delle autofunzioni e degli autovalori segue le stesse linee di prima. Le uniche differenze si hanno nell'imposizione delle condizioni al contorno, che in questo caso riguardano le derivate di ψ. Si trova:

$$\kappa''_{np} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2}$$

$$\varphi_{np} = M \cos\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{p\pi y}{b} \qquad (n, p = 0, 1, 2, ...; \text{ escluso } n = p = 0)$$

L'espressione degli autovalori è uguale a quella trovata per i modi TM. Nel caso dei modi TE, però, uno degli indici n, p può essere nullo.[1] Le espressioni delle lunghezze d'onda di taglio e dei vettori modali sono riassunte nella Tabella 4.1.

I modi della guida d'onda rettangolare vengono indicati con le sigle TM_{np}, TE_{np}, di ovvio significato. Si noti che i modi TE_{n0} sono indipendenti da y, mentre i modi TE_{0p} sono indipendenti da x.

L'andamento dei campi trasversali di alcuni modi è schizzato nella Figura 4.2. Le linee di forza del campo elettrico sono indicate a tratto pieno, quelle del campo magnetico a tratto meno marcato. Nella guida rettangolare l'ordine di successione dei modi dipende dal rapporto a/b. In ogni caso però il modo dominante è il modo TE_{10}.

---

1 La coppia n = p = 0 corrisponde all'autovalore nullo (designato con κ''_1 nella trattazione generale). Questo autovalore e la corrispondente autofunzione (costante) non intervengono nello sviluppo modale del campo.

Tabella 4.1 Autofunzioni normalizzate, vettori modali e lunghezze d'onda di taglio per la guida rettangolare

Modi TM_{np} (n, p = 1, 2, ...)

$$\lambda'_{np} = \frac{2}{\sqrt{(n/a)^2 + (p/b)^2}} \qquad \psi_{np} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{p\pi y}{b}$$

$$\mathbf{e}'_{np} = 2\sqrt{\frac{ab}{(nb)^2 + (pa)^2}}\left(-\mathbf{u}_x \frac{n}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{b} - \mathbf{u}_y \frac{p}{b}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{p\pi y}{b}\right)$$

$$\mathbf{h}'_{np} = 2\sqrt{\frac{ab}{(nb)^2 + (pa)^2}}\left(\mathbf{u}_x \frac{p}{b}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{p\pi y}{b} - \mathbf{u}_y \frac{n}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{b}\right)$$

Modi TE_{np} (n, p = 0, 1, 2, ... esclusa la coppia 0,0)

$$\lambda''_{np} = \frac{2}{\sqrt{(n/a)^2 + (p/b)^2}} \qquad \varphi_{np} = \sqrt{\frac{\chi_{np}}{ab}} \cos\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{p\pi y}{b}$$

$$\mathbf{e}''_{np} = \sqrt{\frac{\chi_{np}\, ab}{(nb)^2 + (pa)^2}}\left(\mathbf{u}_x \frac{p}{b}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{b} - \mathbf{u}_y \frac{n}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{p\pi y}{b}\right)$$

$$\mathbf{h}''_{np} = \sqrt{\frac{\chi_{np}\, ab}{(nb)^2 + (pa)^2}}\left(\mathbf{u}_x \frac{n}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{p\pi y}{b} + \mathbf{u}_y \frac{p}{b}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{b}\right)$$

$$\chi_{np} = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0 \quad \text{o} \quad p = 0 \\ 4 & \text{se } n \neq 0 \quad \text{e} \quad p \neq 0 \end{cases}$$

Modo dominante (TE_{10})

$$\lambda''_{10} = 2a \qquad \varphi_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\frac{\pi x}{a}$$

$$\mathbf{e}''_{10} = -\mathbf{u}_y \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\frac{\pi x}{a} \qquad \mathbf{h}''_{10} = \mathbf{u}_x \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\frac{\pi x}{a}$$

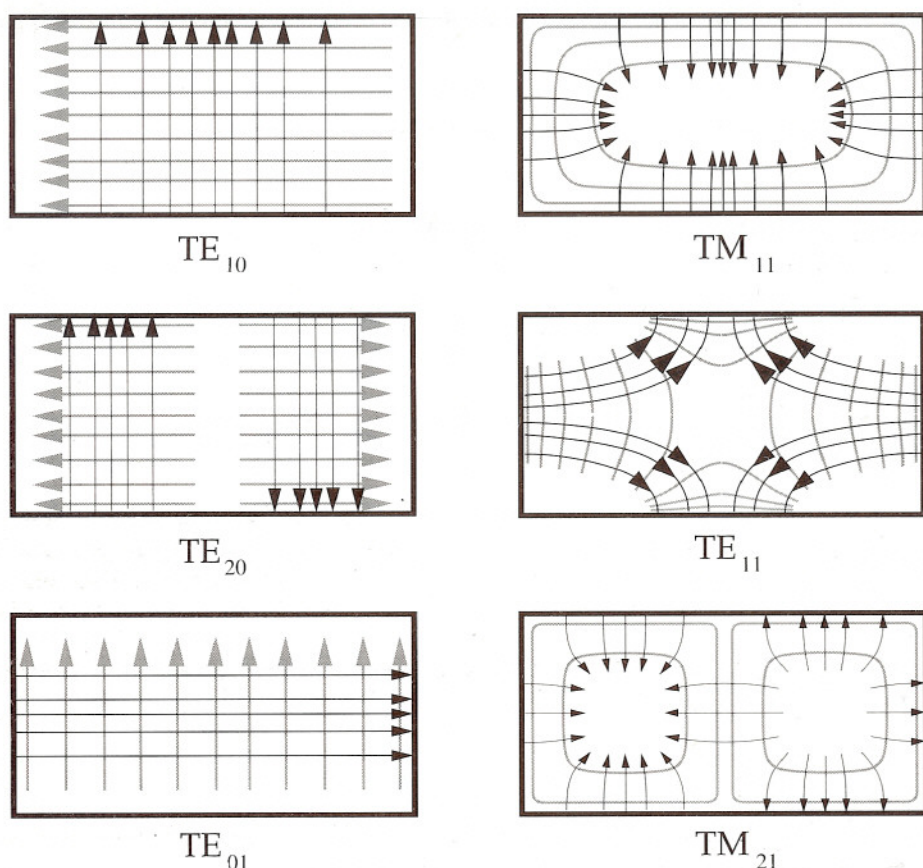



Figura 4.2

3.5 Il modo dominante della guida rettangolare

Comunemente la guida rettangolare viene usata a frequenze in cui è possibile la propagazione del solo modo TE_{10}. La lunghezza d'onda di taglio di questo modo è

$$\lambda_{10} = 2a$$

Se il mezzo è l'aria, come avviene quasi sempre, la frequenza di taglio della guida rettangolare è

$$f_{10} = c/2a \qquad \text{(in aria)}$$

Ad esempio, una guida con a = 10 cm permette la propagazione solo a frequenze maggiori di f_{10} = 1.5 GHz. Si comprende quindi che le guide di dimensioni praticamente accettabili possono essere usate solo a frequenze molto alte, tipicamente nella banda delle microonde o delle onde millimetriche.

L'impedenza caratteristica, la velocità di fase e la lunghezza d'onda del modo TE_{10} sono date da:

$$Z''_{10} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} \qquad v_f = \frac{v}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} \qquad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}$$

I campi modali sono:

$$E_x = 0 \qquad E_y = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\frac{\pi x}{a} V(z) \qquad E_z = 0$$

$$H_x = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\frac{\pi x}{a} I(z) \qquad H_y = 0 \qquad H_z = j\frac{\lambda}{2a}\sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\frac{\pi x}{a}\frac{V(z)}{\eta}$$

I campi sono indipendenti da y. Il campo elettrico è diretto parallelamente al lato corto della guida e assume il valore massimo al centro della parete larga ($x = a/2$); il campo magnetico trasversale è diretto parallelamente alla parete larga, è massimo al centro e si annulla sulle pareti strette; il campo magnetico longitudinale è invece massimo sulle pareti strette e nullo al centro.

Al disopra della frequenza di taglio, supponendo di avere una sola onda che si propaga nel verso positivo di z, risulta

$$V = V^+ e^{-j\beta z} \qquad I = V(z) / Z''_{10}$$

In questo caso l'andamento dei campi istantanei è quello schizzato in Figura 5.1, dove le linee di forza più marcate sono quelle del campo elettrico.

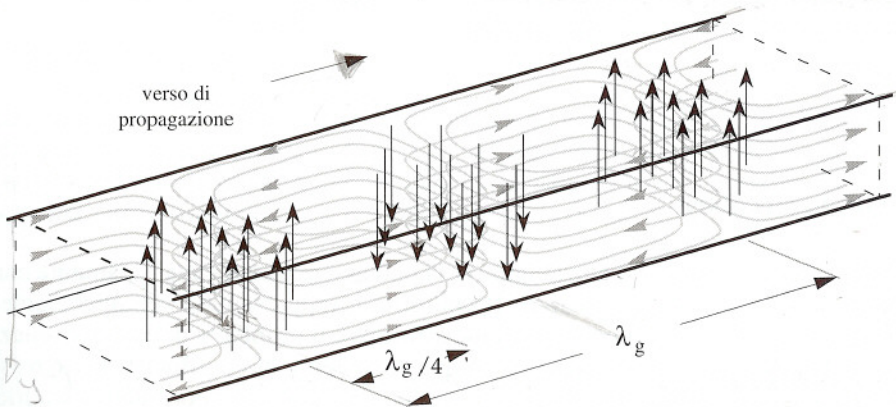



Figura 5.1

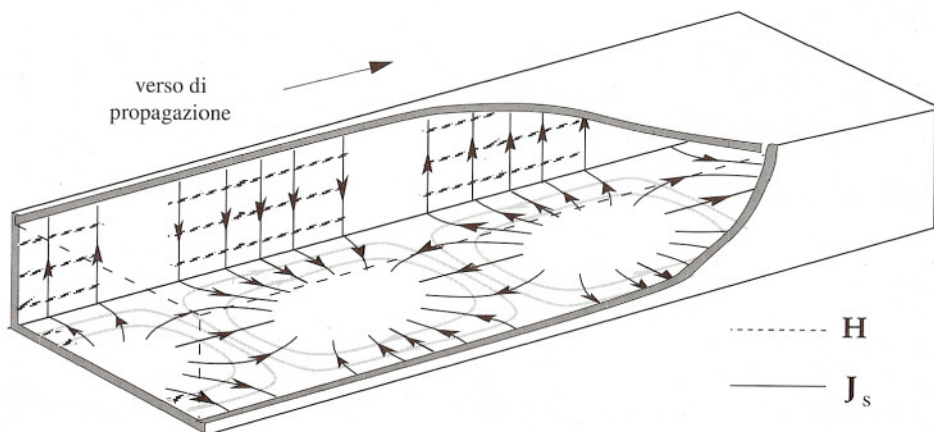



Figura 5.2

Le linee di flusso della densità della corrente superficiale sulle pareti interne della guida sono perpendicolari a quelle del campo magnetico. Il loro andamento in un istante generico è schizzato in Figura 5.2.

Le correnti sono dirette parallelamente all'asse z solo sulla mezzeria delle pareti larghe. Per questa ragione esse non vengono perturbate se in corrispondenza della mezzeria viene praticata una stretta fenditura (Figura 5.3), così che il modo dominante si propaga come se la fenditura non esistesse.

La fenditura può essere utilizzata per inserire nella guida una sonda che permette di prelevare un segnale proporzionale all'intensità del campo elettrico. Spostando la sonda lungo la fenditura si può registrare un tracciato proporzionale a $|V(z)|$ (diagramma d'onda stazionaria).

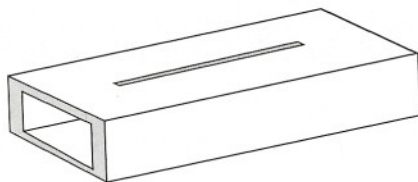



Figura 5.3

3.6 Guida circolare

Anche la guida a sezione circolare (Figura 6.1) può essere trattata analiticamente con il metodo di separazione delle variabili. Il contorno è rappresentato semplicemente in coordinate polari ($R = a$), cosicchè conviene affrontare il problema della determinazione degli autovalori e delle autofunzioni in questo sistema di coordinate. L'espressione del laplaciano in coordinate polari si ottiene da quella in coordinate cilindriche (A.68) eliminando il termine che contiene la derivata rispetto a z. La (2.6*a*) assume la forma:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\kappa'^2\,\psi=0 \qquad (6.1a)$$

$$\psi(a,\ \phi)=0 \qquad (-\pi\le\phi\le\pi) \qquad (6.1b)$$

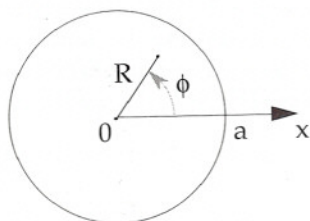



Figura 6.1

Si pone

$$\psi = F_R(R)\ F_\phi(\phi)$$

Introducendo la precedente espressione nella (6.1a) e moltiplicando per $R^2/F_R F_\phi$ si ottiene:

$$\frac{R}{F_R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial F_R}{\partial R}\right)+\kappa'^2 R^2=-\frac{1}{F_\phi}\frac{\partial^2 F_\phi}{\partial\phi^2}$$

Le variabili R e ϕ appaiono solo al primo e al secondo membro rispettivamente. Poiché le due variabili sono indipendenti, l'equazione può essere verificata solo se i due membri sono uguali ad una stessa costante. Indicando la costante con n^2 si ottiene:

$$\frac{d^2F_\phi}{d\phi^2}+n^2\,F_\phi=0 \qquad (6.2a)$$

$$R\frac{d}{dR}\left(R\frac{dF_R}{dR}\right)+(\kappa'^2 R^2-n^2)\,F_R=0 \qquad (6.2b)$$

La soluzione generale della (6.2*a*) può essere scritta come segue:

$$F_\phi = A\cos n\phi + B\sin n\phi$$

L'autofunzione ψ deve essere continua attraverso il semiasse negativo delle x e quindi i limiti di F per $\phi\to\pm\pi$ devono coincidere. Ciò richiede che n sia un numero intero. Grazie all'arbitrarietà delle costanti A e B si possono escludere i numeri negativi. Operando la trasformazione di variabile $r = \kappa' R$ la (6.2*b*) assume la forma:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF_R}{dr}\right)+(r^2-n^2)\,F_R=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

Questa è l'equazione di *Bessel* di ordine n (vedi Appendice E). Poiché n è intero la soluzione generale è del tipo:

$$F_R = C\,J_n(r) + D\,N_n(r) = C\,J_n(\kappa' R) + D\,N_n(\kappa' R)$$

dove J_n e N_n rappresentano le funzioni di Bessel di ordine n, del primo e del secondo genere rispettivamente. Le funzioni N_n divergono in R = 0, e quindi sono incompatibili con il requisito di continuità delle autofunzioni ψ. Per eliminare questo tipo di soluzione bisogna porre D = 0. In definitiva, introducendo le nuove costanti P = AC e Q = BC, risulta:

$$\psi = J_n(\kappa' R)\,(P \cos n\phi + Q \sin n\phi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.3}$$

La condizione al contorno (6.1*b*) richiede

$$J_n(\kappa' a) = 0$$

Dunque deve aversi

$$\kappa' a = x_{np} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

dove si è indicato con x_{np} il p-esimo zero (non nullo) della funzione J_n. A causa dell'andamento oscillante delle funzioni di Bessel esistono infiniti zeri e quindi l'indice p si estende all'infinito. Per ogni coppia di indici n,p si ha un autovalore, dato da

$$\kappa'_{np} = \frac{x_{np}}{a} \tag{6.4}$$

La corrispondente lunghezza d'onda di taglio è

$$\lambda'_{np} = \frac{2\pi a}{x_{np}} \tag{6.5}$$

Nel caso n = 0 si ha

$$\psi_{0p} = P\, J_0\,(x_{0p} R/a)$$

così che l'autofunzione risulta simmetrica rispetto all'asse della guida. Quando invece n differisce da zero l'autofunzione dipende da ϕ. Si nota che in questo caso la forma della (6.3) dipende dalla scelta delle costanti P, Q e che quindi l'andamento dell'autofunzione non è perfettamente definito. Questo dipende dal fatto che, in effetti, la (6.3) rappresenta la combinazione di due autofunzioni degeneri, una dipendente dal coseno l'altra dal seno.

In conclusione le autofunzioni vengono rappresentate come segue:[1]

$$\psi_{np} = J_n\left(\frac{x_{np} R}{a}\right)\begin{cases} P \cos n\phi \\ Q \sin n\phi \end{cases} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ p = 1,\ 2,\ \ldots)$$

1 È immediato verificare che le autofunzioni così definite sono ortogonali.

Le autofunzioni simmetriche, che non sono degeneri, rientrano in quest'espressione (in questo caso l'autofunzione dipendente dal seno è identicamente nulla). Le costanti P e Q vengono determinate imponendo la condizione di normalizzazione. Il calcolo richiede l'uso dell'integrale (E.20). Le espressioni delle autofunzioni normalizzate e dei vettori modali sono elencate nella Tabella 6.1.

Lo studio dei modi TE viene svolto seguendo un procedimento analogo. In questo caso si perviene all'espressione

$$\varphi = J_n(\kappa'' R)(P \cos n\phi + Q \sin n\phi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

La condizione al contorno è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial R}_{(a,\, \phi)} = 0$$

Imponendo questa condizione si trova facilmente:

$$\kappa'' = \frac{x'_{np}}{a}$$

dove x'_{np} rappresenta lo zero p-esimo della derivata prima di J_n. Pertanto la lunghezza d'onda di taglio dei modi TE è

$$\lambda''_{np} = \frac{2\pi a}{x'_{np}} \tag{6.6}$$

Le autofunzioni dei modi TE differiscono da quelle dei modi TM solo perché x_{np} è sostituito da x'_{np}:

$$\varphi_{np} = J_n\left(\frac{x'_{np} R}{a}\right)\begin{cases} P \cos n\phi \\ Q \sin n\phi \end{cases} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ p = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Le autofunzioni normalizzate e le espressioni dei vettori modali per i modi TE_{np} sono riportate nella Tabella 6.1.

Le autofunzioni degeneri differiscono fra di loro solo per una rotazione di $\pi/2n$ intorno all'origine. Combinando due autofunzioni degeneri si ottiene ancora un'autofunzione (con lo stesso autovalore) che differisce dalle precedenti solo per una rotazione dipendente dai coefficienti usati nella combinazione. In definitiva le autofunzioni asimmetriche possono essere ruotate a piacere, come è ovvio se si considera la simmetria rotazionale della guida circolare.

L'ordine di successione dei modi dipende dall'ordine di successione degli zeri x_{np} e x'_{np}. Dalle tabelle riportate nell'Appendice E si vede che i primi zeri sono:

$$x'_{11} = 1.841; \quad x_{01} = 2.505; \quad x'_{21} = 3.054; \quad x_{11} = x'_{01} = 3.832; \quad x'_{31} = 4.201$$

Tabella 6.1 Autofunzioni normalizzate, vettori modali e lunghezze d'onda di taglio per la guida circolare

Modi TM_{np} (n = 0, 1, 2, ...; p = 1, 2, ...)

$$\lambda'_{np} = \frac{2\pi a}{x_{np}} \qquad \psi_{np} = \frac{\sqrt{\xi_n/\pi}}{J_{n+1}(x_{np})}\,\frac{J_n(x_{np}R/a)}{a}\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}'_{np} = \frac{\sqrt{\xi_n/\pi}}{J_{n+1}(x_{np})}\left(-\mathbf{u}_R\frac{J'_n(x_{np}R/a)}{a}\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix} + \mathbf{u}_\phi\frac{n J_n(x_{np}R/a)}{x_{np}R}\begin{Bmatrix}\sin n\phi\\ -\cos n\phi\end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{h}'_{np} = \frac{\sqrt{\xi_n/\pi}}{J_{n+1}(x_{np})}\left(\mathbf{u}_R\frac{\mathbf{n} J_n(x_{np}R/a)}{x_{np}R}\begin{Bmatrix}-\sin n\phi\\ \cos n\phi\end{Bmatrix} - \mathbf{u}_\phi\frac{J'_n(x_{np}R/a)}{a}\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix}\right)$$

x_{np} è la p-esima radice dell'equazione $J_n(x) = 0$ (zero escluso). Inoltre:

$$J'_n(x) = \frac{dJ_n(x)}{dx} \qquad \xi_n = \begin{cases} = 1 \text{ se } n = 0\\ = 2 \text{ se } n \neq 0\end{cases}$$

Modi TE_{np} (n = 0, 1, 2, ...; p = 1, 2, ...)

$$\lambda''_{np}\ \frac{2\pi a}{x'_{np}} \qquad \varphi_{np} = \sqrt{\frac{\xi_n}{\pi(x'^2_{np} - n^2)}}\,\frac{x'_{np} J_n(x'_{np}R/a)}{a J_n(x'_{np})}\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}''_{np} = \frac{1}{J_n(x'_{np})}\sqrt{\frac{\xi_n}{\pi(x'^2_{np} - n^2)}}\left(\mathbf{u}_R\frac{n J_n(x'_{np}R/a)}{R}\begin{Bmatrix}\sin n\phi\\ -\cos n\phi\end{Bmatrix} + \mathbf{u}_\phi\frac{x'_{np} J'_n(x'_{np}R/a)}{a}\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{h}''_{np} = \frac{1}{J_n(x'_{np})}\sqrt{\frac{\xi_n}{\pi(x'^2_{np} - n^2)}}\left(-\mathbf{u}_R\frac{x'_{np} J'_n(x'_{np}R/a)}{a}\begin{Bmatrix}\cos n\phi\\ \sin n\phi\end{Bmatrix} + \mathbf{u}_\phi\frac{n J_n(x'_{np}R/a)}{R}\begin{Bmatrix}\sin n\phi\\ -\cos n\phi\end{Bmatrix}\right)$$

x'_{np} è la p-esima radice dell'equazione $J'_n(x) = 0$ (zero escluso).

Modo dominante (TE_{11})

$$\lambda''_{11}\ \frac{2\pi a}{x'_{11}} = 3.412a \qquad (x'_{11} = 1.841) \qquad \varphi_{11} = \sqrt{\frac{2}{\pi(x'^2_{11} - 1)}}\,\frac{x'_{11} J_1(x'_{11}R/a)}{a J_1(x'_{11})}\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}''_{11} = \frac{1}{J_1(x'_{11})}\sqrt{\frac{2}{\pi(x'^2_{11} - 1)}}\left(\mathbf{u}_R\frac{J_1(x'_{11}R/a)}{R}\begin{Bmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\end{Bmatrix} + \mathbf{u}_\phi\frac{x'_{11} J'_1(x'_{11}R/a)}{a}\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{h}''_{11} = \frac{1}{J_1(x'_{11})}\sqrt{\frac{2}{\pi(x'^2_{11} - 1)}}\left(-\mathbf{u}_R\frac{x'_{11} J'_1(x'_{11}R/a)}{a}\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix} + \mathbf{u}_\phi\frac{J_1(x'_{11}R/a)}{R}\begin{Bmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\end{Bmatrix}\right)$$

Gli andamenti dei vettori modali dei corrispondenti modi sono indicati nella Figura 6.2, assieme al valore della lunghezza d'onda di taglio. I modi asimmetrici sono considerati una sola volta (l'andamento dell'altro modo degenere si ottiene ruotando le figure di $\pi/2n$).

Il modo dominante della guida circolare è il modo TE_{11}, che è costituto da una coppia degenere. La lunghezza d'onda di taglio ($\lambda''_{11} = 3.412$ a) è dell'ordine del diametro della guida. A causa della degenerazione, anche nella banda di frequenza compresa fra la frequenza di taglio della guida e quella del primo modo superiore (TM_{01}), si propagano due modi. La combinazione dei modi TE_{11} degeneri ha forma analoga a quella di un solo modo, ma è ruotata di un angolo che può assumere qualsiasi valore, in dipendenza dal rapporto fra le ampiezze delle tensioni modali. Se le tensioni dei due modi hanno la stessa ampiezza e sono sfasate di $\pi/2$ si ottiene un modo rotante, cosa utile in certe applicazioni. In genere però la degenerazione del modo dominante è un fatto negativo, perché piccole imperfezioni della guida possono provocare rotazioni incontrollabili del campo. Questo può creare inconvenienti, ad esempio nel funzionamento dei dispositivi di accoppiamento con altre guide.[1] Per questa ragione la guida circolare è meno usata di quella rettangolare, nonostante la sua maggiore semplicità costruttiva.

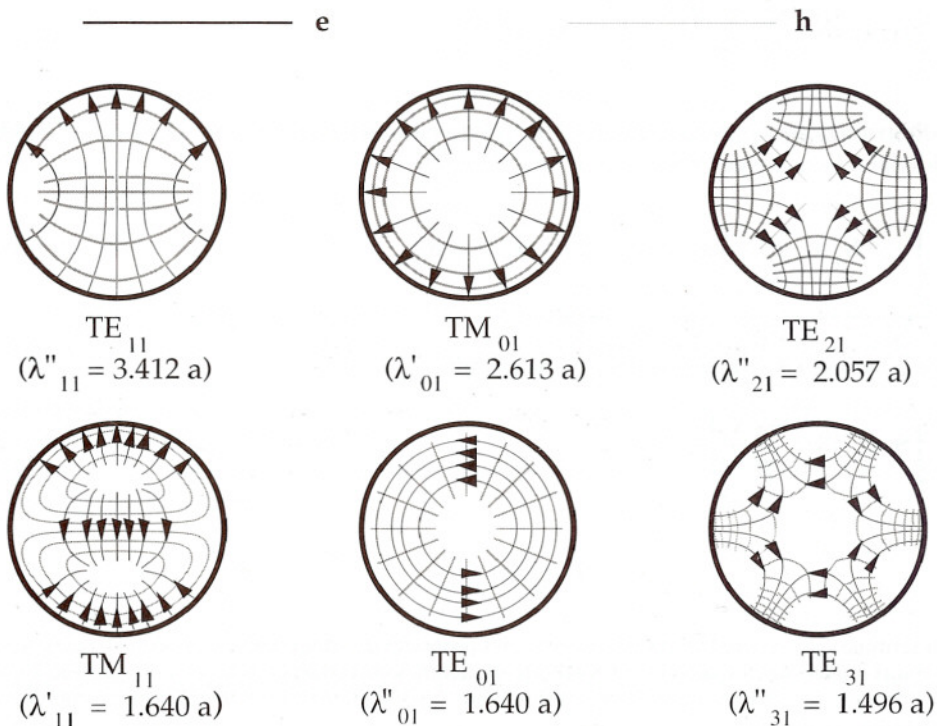



Figura 6.2

1 Come si vedrà nel Paragrafo 6, Capitolo 6, l'accoppiamento dipende dall'andamento dei campi modali sulle aperture di comunicazione.

3.7 Potenza trasmessa e ortonormalità dei vettori modali[1]

Il flusso del vettore di Poynting attraverso una generica sezione trasversale S è dato da:

$$\int_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{u}_z\,dS = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{u}_z\,dS = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{E}_T\times\mathbf{H}_T^*\cdot\mathbf{u}_z\,dS \tag{7.1}$$

Infatti le componenti longitudinali di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{H}$ non danno contributo al prodotto misto. I campi trasversali hanno la forma generale

$$\mathbf{E}_T = \sum_i V_i\,\mathbf{e}_i \qquad \mathbf{H}_T = \sum_j I_j\,\mathbf{h}_j$$

dove si intende che le sommatorie sono estese a tutti i modi della guida, senza distinzione fra modi TE e TM. Pertanto:

$$\int_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{u}_z\,dS = \sum_i\sum_j \frac{V_i I_j^*}{2}\int_S \mathbf{e}_i\times\mathbf{h}_j\cdot\mathbf{u}_z\,dS \tag{7.2}$$

La dimostrazione riportata in fondo al paragrafo permette di affermare che i vettori modali soddisfano la seguente "relazione di ortonormalità":

$$\int_S \mathbf{e}_i\times\mathbf{h}_j\cdot\mathbf{u}_z\,dS = \int_S \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\,dS = \int_S \mathbf{h}_i\cdot\mathbf{h}_j\,dS = \delta_{ij} \tag{7.3}$$

dove $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Si ha quindi:

$$\int_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{u}_z\,dS = \sum_i \frac{V_i I_i^*}{2}$$

1 Il termine "ortonormalità" fa riferimento alla proprietà di ortogonalità e di normalizzazione dei vettori modali nello spazio $L^2(S)$ costituito dalle funzioni vettoriali definite sulla sezione S (vedi Appendice D). In tale spazio il prodotto scalare fra due elementi **a** e **b** e la norma sono definiti rispettivamente da

$$<\mathbf{a},\,\mathbf{b}> = \int_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^*dS \qquad \|\mathbf{a}\| = <\mathbf{a},\,\mathbf{a}>^{1/2} = \left(\int_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^*dS\right)^{1/2}$$

I vettori **a** e **b** sono ortogonali (nello spazio $L^2(S)$) se $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = 0$. I vettori stessi sono normalizzati se hanno norma unitaria. L'ortogonalità nello spazio $L^2(S)$ non ha nulla a che fare con la perpendicolarità fra i vettori.

Pertanto la potenza che attraversa la sezione S nel verso positivo di z è data da:

$$P = \sum_i \operatorname{Re} \frac{V_i I_i^*}{2} \tag{7.4}$$

In presenza del solo modo i-esimo la potenza è data da

$$P_i = \operatorname{Re} \frac{V_i I_i^*}{2}$$

Questa espressione è identica a quella che, nella teoria dei circuiti, fornisce la potenza entrante in un bipolo in funzione della tensione e della corrente. Ciò giustifica il nome di tensione e corrente dato alle quantità V_i e I_i.

Se il modo i-esimo è costituito da una sola onda che si propaga (o si attenua) nel verso positivo di z, la tensione e la corrente sono legate dalla relazione

$$V_i = Z_i \, I_i$$

dove Z_i indica l'impedenza caratteristica del modo considerato (Z_i' o Z_i''). In questo caso risulta:

$$P_i = \operatorname{Re} \frac{|V_i|^2}{2 Z_i^*} = \operatorname{Re} \frac{Z_i |I_i|^2}{2} \tag{7.5}$$

Se il modo è evanescente la potenza è nulla perché l'impedenza caratteristica è immaginaria. Se invece il modo si propaga Z_i è reale e si ha trasporto di potenza. In questo caso, nella (7.5) il simbolo di parte reale può essere omesso. Un discorso analogo vale nel caso di una sola onda che si propaga nel verso negativo, per la quale vale un'espressione analoga alla precedente ma con il segno cambiato.

Se il modo i-esimo consiste di due onde che si propagano in verso opposto la tensione e la corrente hanno la forma

$$V_i = V_i^+ e^{-j\beta_i z} + V_i^- e^{j\beta_i z} \qquad I_i = \frac{V_i^+}{Z_i} e^{-j\beta_i z} - \frac{V_i^-}{Z_i} e^{j\beta_i z}$$

Si vede facilmente che in questo caso la potenza trasmessa nel verso positivo di z è:

$$P_i = \operatorname{Re} \frac{V_i I_i^*}{2} = \frac{|V_i^+|^2}{2 Z_i} - \frac{|V_i^-|^2}{2 Z_i} \tag{7.6}$$

Si nota che i due termini rappresentano le potenze attive che le onde trasmetterebbero se l'una esistesse in assenza dell'altra.

Secondo la (7.4), quando nella guida si propagano più modi, la potenza è data dalla somma delle potenze che ogni modo trasporterebbe in assenza degli altri.[1]

■ ORTONORMALITÀ DEI VETTORI MODALI Nella (7.3) i tre integrali sono uguali perché i vettori modali sono legati dalle relazioni $\mathbf{h} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{e}$, $\mathbf{e} = \mathbf{h} \times \mathbf{u}_z$. Nel caso di due modi TM per la (2.15*a*) risulta:

$$\int_S \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j \, dS = \frac{1}{\kappa'_i \, \kappa'_j} \int_S \nabla_T \psi_i \cdot \nabla_T \psi_j \, dS \tag{7.7}$$

D'altro canto l'analogo bidimensionale della la prima identità di Green (A.102) permette di scrivere:

$$\int_S (\psi_i \nabla_T^2 \psi_j + \nabla_T \psi_i \cdot \nabla_T \psi_j) dS = \int_C \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} dS \tag{7.8}$$

Il secondo membro è nullo perché le autofunzioni ψ sono nulle sul contorno C. Pertanto, tenendo conto della (2.6*a*) e della proprietà di ortonormalità delle autofunzioni (D.3), si ottiene:

$$\int_S \nabla_T \psi_i \cdot \nabla_T \psi_j \, dS = -\int_S \psi_i \nabla_T^2 \psi_j \, dS = \kappa_j'^2 \int_S \psi_i \psi_j \, dS = \kappa_j'^2 \, \delta_{ij}$$

Sostituendo nella (7.7) si ottiene:

$$\int_S \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j \, dS = \delta_{ij}$$

Nel caso di due modi TE la dimostrazione procede in modo analogo, considerando i vettori $\mathbf{h}''$ in luogo di $\mathbf{e}'$ e introducendo le autofunzioni φ mediante la (2.15*b*).

Nel caso di due modi di tipo diverso (uno TM e l'altro TE) bisogna mostrare che gli integrali (7.3) sono nulli. Se il modo i-esimo è di tipo TM mentre il modo j-esimo è di tipo TE, per la (2.15*a*, *b*) si ha:

$$\int_S \mathbf{e}'_i \times \mathbf{h}''_j \cdot \mathbf{u}_z \, dS = \frac{1}{\kappa'_i \, \kappa''_j} \int_S \nabla_T \psi_i \cdot \nabla_T \varphi_j \cdot \mathbf{u}_z \, dS$$

Inoltre, utilizzando la (A.29) risulta:

$$\nabla_T \psi_i \cdot \nabla_T \varphi_j = -\nabla \times (\psi_i \nabla \varphi_j) + \psi_i \nabla \times \nabla \varphi_j = -\nabla \times (\psi_i \nabla \varphi_j)$$

Pertanto, applicando il teorema di Stokes e ricordando che ψ_i è nulla su C, si ottiene:

1 In un generico campo, ottenuto per sovrapposizione di campi parziali, la potenza che attraversa una superficie non è uguale alla somma delle potenze dei singoli campi parziali. In altri termini, la sovrapposizione degli effetti (che è valida per i campi) non è generalmente lecita per le potenze. Nelle guide d'onda la possibilità di sommare le potenze è una proprietà peculiare dei modi, dipendente dall'ortogonalità dei vettori modali.

$$\int_S \mathbf{e}'_i \times \mathbf{h}''_j \cdot \mathbf{u}_z \, dS = \frac{1}{\kappa'_i \, \kappa''_j} \int_S \nabla \times (\psi_i \, \nabla \varphi_j) \cdot \mathbf{u}_z \, dS = \frac{1}{\kappa'_i \, \kappa''_j} \oint_C \psi_i \, \nabla \varphi_j \cdot dc = 0$$

In maniera analoga si dimostra che gli integrali sono nulli quando il modo i-esimo e di tipo TE mentre l'altro è di tipo TM. ■

3.8 Linee di trasmissione schermate

Le linee di trasmissione schermate differiscono dalle guide d'onda per la presenza di almeno un conduttore cilindrico all'interno della zona racchiusa dal conduttore tubolare. Per semplicità la trattazione è limitata al caso in cui si ha un solo conduttore interno (Figura 8.1). Assumendo che i conduttori siano perfetti, il campo è confinato nella zona compresa fra il conduttore tubolare e il conduttore interno. Si suppone che in questa zona il dielettrico sia omogeneo e isotropo.

MODO TEM La teoria delle linee schermate differisce da quella delle guide per il fatto che il contorno della sezione trasversale è costituto dalle linee separate C_0 e C_1 invece che dall'unica linea C. Questo non modifica la forma generale del potenziale Φ, che è ancora del tipo

$$\Phi = \sum_{1}^{\infty}{}_i \, \zeta''_i(z) \; \varphi_i(x, y)$$

dove le funzioni $\zeta''_i(z)$ hanno forma identica a quella vista nel Paragrafo 2 e le φ_i sono le autofunzioni dell'operatore ∇^2_T con le condizioni di Neumann su entrambe le linee C_0, C_1. Invece la forma di Ψ deve essere modificata, perché nel caso di due contorni separati le condizioni (2.2) non possono essere ricondotte alla condizione di Dirichelet su entrambi i contorni. Ripetendo il ragionamento svolto all'inizio del Paragrafo 2, è ancora possibile assumere, senza perdere in generalità, che Ψ sia nullo su C_0; non è però

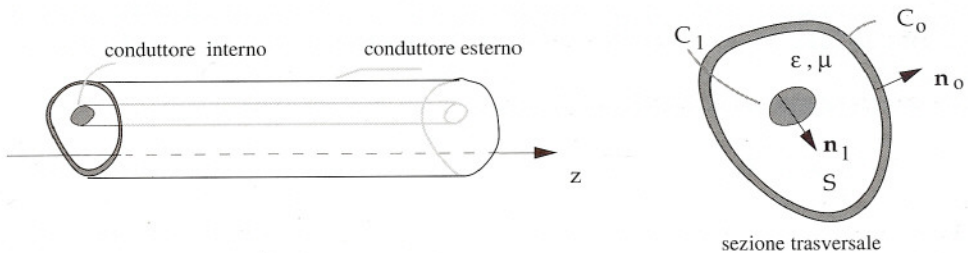



Figura 8.1

possibile assumere che la stessa condizione debba necessariamente valere su C_1, perché le (2.2) risultano verificate anche quando[1]

$$\Psi = Pe^{-jkz} + Q\, e^{jkz} \qquad \text{su } C_1 \qquad \text{(P, Q costanti arbitrarie)}$$

Data una generica soluzione Ψ della (1.8*a*), che si annulla su C_0 e che assume su C_1 la forma suddetta, si consideri la funzione

$$\tilde{\Psi} = \Psi - \Psi^0$$

dove Ψ^0 è una generica soluzione del problema:

$$\nabla_T^2 \Psi^0 = 0 \qquad \text{su S} \qquad (8.1a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial z^2} + k^2 \Psi^0 = 0 \qquad \text{su S} \qquad (8.1b)$$

$$\Psi^0 = 0 \qquad \text{su } C_0 \qquad (8.1c)$$

$$\Psi^0 = P e^{-jkz} + Q e^{jkz} \qquad \text{su } C_1 \qquad (8.1d)$$

La funzione Ψ^0 soddisfa la (1.8*a*) ed è soggetta alle stesse condizioni al contorno di Ψ; pertanto anche la funzione $\tilde{\Psi}$ soddisfa la (1.8*a*) ma le sue condizioni al contorno sono più restrittive, perché essa si annulla su C_1, oltre che su C_0.
Dunque $\tilde{\Psi}$ è soluzione dello stesso problema considerato nel caso delle guide d'onda e ha forma identica a quella considerata nel Paragrafo 2. In conclusione, nel caso di una linea di trasmissione con un solo conduttore interno, la forma più generale del potenziale Ψ è del tipo:

$$\Psi = \tilde{\Psi} + \Psi^0 = \sum_1^{\infty}{}_i\, \zeta_i'(z)\ \psi_i(x, y) + \Psi^0$$

dove ψ_i è la i-esima autofunzione dell'operatore ∇_T^2 con le condizioni di Dirichelet su entrambe le linee C_0, C_1 e le funzioni $\zeta_i'(z)$ hanno forma identica a quella vista nel Paragrafo 2.

La soluzione generale delle (8.1) è del tipo:

$$\Psi^0 = \psi^0(x,y)\ \zeta^0(z) \qquad (8.2)$$

dove

1 La dipendenza da z è la più generale fra quelle che soddisfano l'equazione differenziale (2.2*b*).

$$\nabla_T^2 \psi^0 = 0 \qquad \text{su S} \tag{8.3a}$$

$$\psi^0 = \begin{cases} 1 & \text{su } C_1 \\ 0 & \text{su } C_0 \end{cases} \tag{8.3b}$$

$$\zeta^0 = P e^{-jkz} + Q e^{jkz}$$

Le espressioni dei potenziali per le linee di trasmissione differiscono da quelle per le guide solo per la presenza del termine aggiuntivo Ψ^0 nell'espressione di Ψ. Pertanto le espressioni generali del campo differiscono dalle (2.14) per l'aggiunta di un nuovo termine che, secondo le (1.9), ha la forma:

$$\mathbf{E}^0 = V^0 \mathbf{e}^0 \tag{8.4a}$$

$$\mathbf{H}^0 = \zeta^0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{e}^0 \tag{8.4b}$$

dove:

$$\mathbf{e}^0 = -\nabla_T \psi^0 \tag{8.5a}$$

$$V^0 = V^{0+} e^{-jkz} + V^{0-} e^{jkz} \qquad (V^{0+} = \eta P,\ V^{0-} = -\eta Q) \tag{8.5b}$$

$$\zeta^0 = \frac{V^{0+}}{\eta} e^{-jkz} - \frac{V^{0-}}{\eta} e^{jkz} \tag{8.5c}$$

L'andamento del campo $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ sulle sezioni trasversali è dettato dalla forma di ψ^0, e rimane immutato passando da una sezione all'altra. Tale campo costituisce un nuovo modo, che si aggiunge ai modi TE e TM. Poiché i vettori $\mathbf{e}^0$ e $\mathbf{u}_z \times \mathbf{e}^0$ sono trasversali, tale modo è di tipo TEM. *La presenza del modo TEM è caratteristica delle linee di trasmissione.*

Le (8.3*a*) è identica all'equazione di Laplace che governa il potenziale elettrostatico nei problemi in cui il campo dipende dalle sole coordinate (x, y). Pertanto ψ^0 coincide con il potenziale elettrostatico che si avrebbe nella linea qualora il conduttore esterno fosse a potenziale nullo e quello interno a potenziale unitario. Dunque, per la (8.5*a*) $\mathbf{e}^0$ coincide con il campo elettrostatico che si avrebbe in queste condizioni (Figura 8.2*a*). Poiché $\mathbf{E}^0$ è proporzionale a $\mathbf{e}^0$, si può affermare che, *nell'ambito di ciascuna sezione trasversale, il campo elettrico del modo TEM ha lo stesso andamento del campo elettrostatico che si ha all'interno della linea quando i due conduttori sono portati a potenziali diversi.* Si noti però che, a causa dell'andamento ondulatorio della tensione V^0, la fase e/o l'ampiezza di $\mathbf{E}^0$ variano con z, mentre il campo elettrostatico è uguale in tutte le sezioni trasversali.

TENSIONE E CORRENTE NEL MODO TEM   Sia s una linea qualsiasi che giace su una sezione trasversale (Figura 8.2*b*) e che ha gli estremi A e B sul conduttore interno e su quello esterno rispettivamente. I potenziali agli estremi sono $\psi^0_A = 1$, $\psi^0_B = 0$. Si ha:

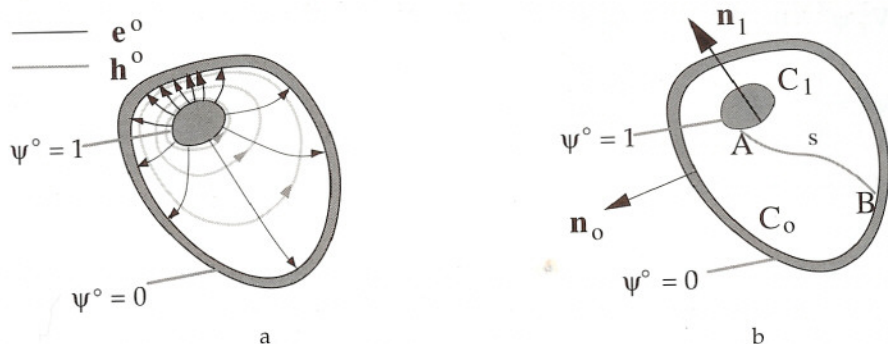



Figura 8.2

$$\int_A^B \mathbf{E}^0 \cdot ds = V^0 \int_A^B \mathbf{e}^0 \cdot ds = -V^0 \int_A^B \nabla_T \psi^0 \cdot ds = -V^0 (\psi_B^0 - \psi_A^0) = V^0$$

Pertanto V^0 rappresenta la tensione fra i due conduttori, secondo la definizione tradizionale adottata nella teoria dei circuiti, con l'unica differenza che la linea s non è del tutto arbitraria, ma giace sulla sezione trasversale considerata. Secondo la (8.5*b*) la tensione è costituita dalla sovrapposizione di due onde che si propagano in verso opposto. Poiché le esponenziali dipendono da k, *le onde di tensione si propagano e si attenuano come le onde piane uniformi nel mezzo contenuto nella linea.*[1] Normalmente il mezzo è un dielettrico a bassa perdita; pertanto, se i conduttori sono perfetti, le espressioni della velocità di fase, della lunghezza d'onda e della costante di attenuazione sono le (3.1) del Capitolo 2. Come le onde piane uniformi, il modo TEM si propaga a qualsiasi frequenza, contrariamente a quanto avviene per i modi TM e TE. Dunque *il modo TEM è il modo dominante delle linee di trasmissione.*

La densità di corrente $\mathbf{J}_s^0$ sul conduttore interno è:

$$\mathbf{J}_s^0 = \mathbf{H}^0 \times \mathbf{n}_1 = \zeta^0 (\mathbf{u}_z \times \mathbf{e}^0) \times \mathbf{n}_1 = -\zeta^0 (\mathbf{u}_z \times \nabla_T \psi^0) \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_z \zeta^0 \frac{\partial \psi^0}{\partial n_1}$$

dove $\mathbf{n}_1$ indica la normale al conduttore interno. Analogamente la densità di corrente $\mathbf{J}_s^{0'}$ sul conduttore esterno è:

$$\mathbf{J}_s^{0'} = \mathbf{H}^0 \times \mathbf{n}_0 = -\zeta^0 (\mathbf{u}_z \times \nabla_T \psi^0) \times \mathbf{n}_0 = \mathbf{u}_z \zeta^0 \frac{\partial \psi^0}{\partial n_0}$$

dove $\mathbf{n}_0$ indica la normale al conduttore esterno. Si nota che nel modo TEM le correnti

1 Per ora i conduttori sono considerati perfetti. Come si vedrà i conduttori reali provocano un'attenuazione aggiuntiva.

fluiscono in direzione assiale. L'intensità della corrente I^0 che attraversa nel verso positivo di z una generica sezione del conduttore interno è data da:

$$I^0 = \int_{C_1} \mathbf{J}_s^0 \cdot \mathbf{u}_z \, dC_1 = \zeta^0 \int_{C_1} \frac{\partial \psi^0}{\partial n_1} dC_1 \tag{8.6}$$

Analogamente, la corrente che attraversa il conduttore esterno, nella stessa sezione e nella direzione di − z è data da:

$$I^{0'} = \int_{C_0} \mathbf{J}_s^{0'} \cdot (-\mathbf{u}_z) dC_0 = -\zeta^0 \int_{C_0} \frac{\partial \psi^0}{\partial n_0} dC_0$$

Le successive considerazioni mostrano che $I^{0'} = I^0$. Dunque, in ogni sezione trasversale le correnti nei due conduttori sono opposte, proprio come si sarebbe portati ad immaginare applicando in maniera acritica i concetti circuitali. Questo risultato è illustrato nella Figura 8.3, dove la linea è rappresentata da uno schema bifilare, nel quale i fili superiore e inferiore rappresentano rispettivamente il conduttore interno e quello esterno.

■ Osservando che per la (8.3*a*) si ha $0 = \nabla_T^2 \psi^0 = \nabla_T \cdot \nabla_T \psi^0$, applicando il teorema della divergenza in due dimensioni risulta:

$$0 = \int_S \nabla_T \cdot \nabla_T \psi^0 dS = \int_{C_1 \cup C_0} \nabla_T \psi^0 \cdot \mathbf{n} \, dC = \int_{C_1} \frac{\partial \psi^0}{\partial n_1} dC_1 + \int_{C_1} \frac{\partial \psi^0}{\partial n_0} dC_0 = (I^0 - I)/\zeta^0$$

Pertanto si ha $I^{0'} = I^0$. ■

Sostituendo la (8.5*c*) nella (8.6) si ottiene la seguente espressione della corrente in una linea di trasmissione:

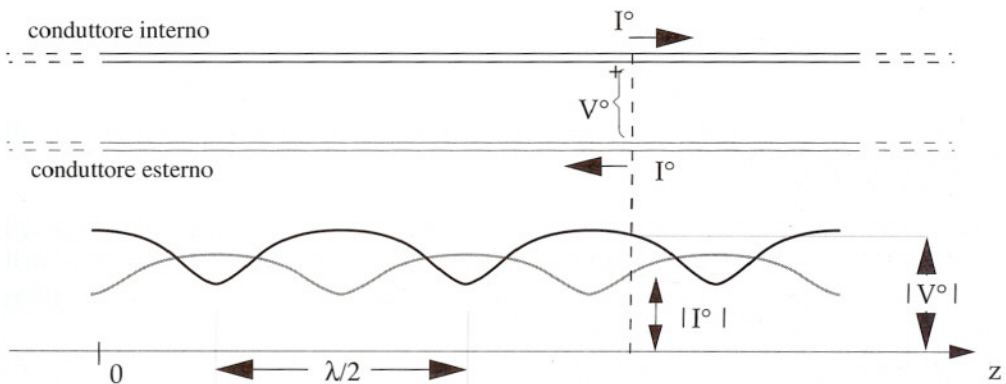



Figura 8.3

$$I^0 = \frac{V^{0+}}{Z^0} e^{-jkz} - \frac{V^{0-}}{Z^0} e^{jkz} \tag{8.7}$$

dove

$$Z^0 = \eta \left(\int_{C_1} \frac{\partial \psi^0}{\partial n_1} dC_1 \right)^{-1} \qquad \textit{(impedenza caratteristica della linea)} \tag{8.8}$$

Anche la corrente è costituita da due onde, proporzionali alle onde di tensione attraverso l'impedenza caratteristica (più precisamente attraverso Z^0 e - Z^0). Si noti che le espressioni della tensione e della corrente sono identiche a quelle dei modi TE e TM, a parte la sostituzione di γ con jk. Nel caso del modo TEM però V^0 e I^0 hanno lo stesso significato fisico delle tensioni e delle correnti nei circuiti convenzionali.

In presenza delle due onde le ampiezze delle tensioni e delle correnti lungo la linea hanno l'andamento dei diagrammi d'onda stazionaria incontrati nel capitolo precedente (Figura 8.3). Le variazioni di V^0 e di I^0 possono essere trascurate, almeno in prima approssimazione, quando la lunghezza della linea è molto minore della lunghezza d'onda. Ciò avviene quasi sempre nelle linee di trasporto dell'energia elettrica (f = 50Hz, λ_0 = 6000 km).

Come nel caso dei modi TE e TM conviene esprimere il campo magnetico in funzione della corrente. Poiché per la (8.6) e la (8.8) risulta

$$I^0 = \frac{\eta \zeta^0}{Z^0}$$

la (8.2b) può essere trasformata nella seguente espressione:

$$\mathbf{H}^0 = I^0 \, \mathbf{h}^0 \tag{8.9}$$

dove si è introdotto il vettore modale:

$$\mathbf{h}^0 = \frac{Z^0}{\eta} \mathbf{u}_z \times \mathbf{e}^0 \tag{8.10}$$

Si noti che le linee di forza $\mathbf{h}^0$ (e di $\mathbf{H}^0$) sono perpendicolari a quelle del campo elettrico (vedi Figura 8.2*a*).

ORTONORMALITÀ DEI VETTORI MODALI E POTENZA TRASMESSA La (8.9) e la (8.2*a*) sono identiche alle espressioni che danno i campi trasversi di tutti gli altri modi. Pertanto il campi trasversi in una linea schermata possono in generale essere rappresentati da espressioni analoghe a quelle viste a proposito delle guide:

$$\mathbf{E}_T = \sum_i V_i \, \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{H}_T = \sum_j I_j \, \mathbf{h}_j$$

Nel caso delle linee, però, le sommatorie includono anche il termine relativo al modo TEM.

Mediante un procedimento analogo a quello seguito nel paragrafo precedente si può mostrare che la relazione (7.3) si applica anche quando si considerano i vettori modali del modo TEM. Pertanto tutte le considerazioni sulla potenza trasmessa in una guida si applicano anche al caso delle linee schermate. Così la potenza trasportata dal modo TEM è data da $\mathrm{Re}(V^0 I^{0*}/2)$. Inoltre, se le onde si propagano senza attenuazione, la potenza attiva trasmessa nella linea attraverso il modo TEM è:

$$P = \frac{|V^{0+}|^2}{2Z^0} - \frac{|V^{0-}|^2}{2Z^0}$$

La potenza differisce da zero a qualsiasi frequenza, al limite anche in continua. Pertanto le linee di trasmissione, a differenza delle guide d'onda, sono adatte a trasmettere energia anche a bassa frequenza. Questo risultato era da attendersi alla luce dei comuni concetti circuitali, visto che i due conduttori permettono la chiusura del circuito che collega il generatore al carico.

RELAZIONE FRA L'IMPEDENZA CARATTERISTICA E LA CAPACITÀ PER UNITÀ DI LUNGHEZZA Nel campo di frequenze di utilizzo delle linee di trasmissione il dielettrico può solitamente essere considerato non dispersivo; pertanto si ha $\varepsilon' \approx \varepsilon_r$. Tenendo conto di questo fatto l'impedenza caratteristica può essere collegata alla capacità C di un tronco di linea di lunghezza unitaria attraverso la formula

$$Z^0 = \frac{1}{vC} \tag{8.11}$$

dove $v = c/\sqrt{\varepsilon_r}$ è la velocità di fase del modo TEM.

■ Si consideri un tronco di linea di lunghezza unitaria e si supponga di applicare la differenza di potenziale (statica) $V_{st} = 1$ V fra i due conduttori. In queste condizioni, l'energia elettrostatica accumulata nel tronco di linea è data da $CV_{st}^2/2 = C/2$. D'altro canto, nelle condizioni suddette il campo elettrostatico coincide con $-\nabla_T \Psi^0$ e quindi, esprimendo l'energia elettrostatica attraverso il campo si ha:

$$\frac{C}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \int_S \nabla_T \Psi^0 \cdot \nabla_T \Psi^0 \, dS \tag{8.12}$$

Per l'analogo bidimensionale della prima identità di Green (A.102) si ha:

$$\int_S (\Psi^0 \nabla_T^2 \Psi^0 + \nabla_T \Psi^0 \cdot \nabla_T \Psi^0) \, dS = \int_{C_1 \cup C_0} \Psi^0 \frac{\partial \Psi^0}{\partial n} dC$$

Osservando che $\nabla_T^2 \Psi^0 = 0$ in S, $\Psi^0 = 1$ su C_1 e $\Psi^0 = 0$ su C_0 e ricordando la (9.8) risulta:

$$\int_S \nabla_T \Psi^0 \cdot \nabla_T \Psi^0 \, dS = \int_{C_1} \frac{\partial \Psi^0}{\partial n_1} dC_1 = \frac{\eta}{Z^0} = \frac{\sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0 \varepsilon_r}}{Z^0} = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r Z^0} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r v Z^0}$$

Sostituendo nella (8.12) si ottiene la (8.11). ■

3.9 Cavo coassiale

Il cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico a sezione circolare coassiale ad un conduttore esterno, pure circolare (Figura 9.1*a*). I raggi dei conduttori interno ed esterno sono indicati con R_i e R_e. È evidente la convenienza di studiare i modi adottando un sistema di coordinate cilindriche.

MODO TEM A causa della simmetria della sezione e della condizione al contorno (8.3b) il potenziale ψ^0 dipende solo da R; pertanto la (8.3*a*) si riduce all'equazione:

$$\frac{d}{dR} R \frac{d\psi^0}{dR} = 0$$

Integrando due volte e imponendo le condizioni $\psi^0(R_e) = 0$, $\psi^0(R_i) = 1$ si ottiene:

$$\psi^0 = \frac{\ln(R_e/R)}{\ln(R_e/R_i)}$$

In base alla (8.8), ricordando che $\eta = 120\pi/\sqrt{\varepsilon'}$ [Ω] si ottiene:

$$Z^0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln\frac{R_e}{R_i} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon'}} \ln\frac{R_e}{R_i} \qquad [\Omega] \tag{9.1}$$

L'impedenza caratteristica dipende dal rapporto R_e/R_i, così che cavi di dimensioni diverse possono avere la stessa impedenza caratteristica.
Sostituendo nelle (8.5*a*) e nella (8.10) si trova:

$$\mathbf{e}^0 = \frac{1}{R\ln(R_e/R_i)} \mathbf{u}_R \qquad \mathbf{h}^0 = \frac{1}{2\pi R} \mathbf{u}_\phi \tag{9.2}$$

Se nel cavo è presente il solo modo TEM il campo è dato da:

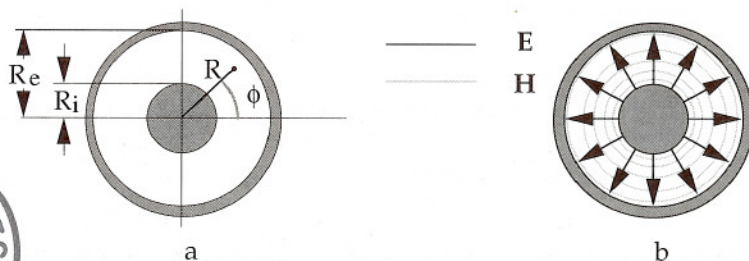



Figura 9.1

$$\mathbf{E} = \frac{V^0(z)}{R \ln(R_e / R_i)} \mathbf{u}_R \tag{9.2a}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I^0(z)}{2\pi R} \mathbf{u}_\phi \tag{9.2b}$$

In una generica sezione trasversale le linee di forza del campo elettrico e del campo magnetico hanno l'andamento indicato nella Figura 9.1*b*. Nell'ambito di una sezione trasversale, l'andamento di **H** è identico a quello che si avrebbe se i due conduttori fossero attraversati da corrente continua. Se si ha solo l'onda che si propaga nel verso positivo di z l'andamento del campo in un generico istante è quello rappresentato nella Figura 9.2.

MODI TM Lo studio dei modi TM procede all'inizio come nel caso della guida circolare. Così si perviene all'espressione:

$$\psi = F_R\, F_\phi = [C\, J_n(\kappa' R) + D\, N_n(\kappa' R)] \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ p = 1,\ 2,\ \ldots)$$

A differenza di quanto avveniva nella guida, il punto R = 0 non fa parte della sezione trasversale; pertanto la singolarità di N_n sull'origine non entra in gioco e non porta a porre D = 0. Le condizioni al contorno sono:

$$\psi(R_i, \phi) = \psi(R_e, \phi) = 0$$

Le condizioni sono verificate se C e D sono soluzioni del sistema omogeneo:

$$C\, J_n(\kappa' R_i) + D\, N_n(\kappa' R_i) = 0$$

$$C\, J_n(\kappa' R_e) + D\, N_n(\kappa' R_e) = 0$$

C e D possono differire da zero solo se il determinate del sistema è nullo:

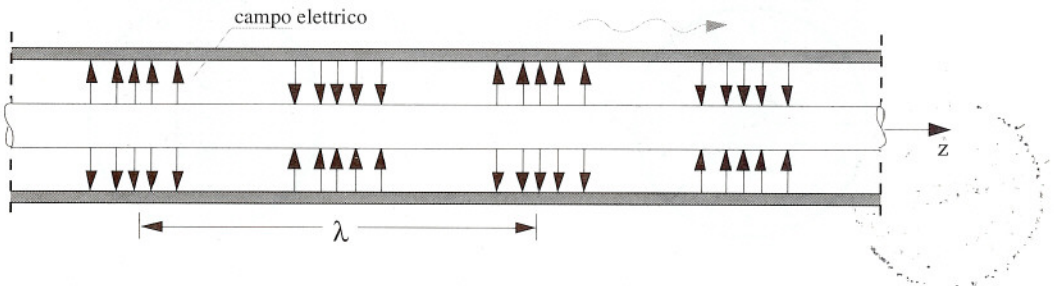



Figura 9.2

$$J_n(\kappa' R_i)\, N_n(\kappa' R_e) - J_n(\kappa' R_e)\, N_n(\kappa' R_i) = 0 \tag{9.3}$$

Le radici $\kappa'_1, \kappa'_2, ..., \kappa'_p, ...$ di questa equazione sono gli autovalori relativi ai modi TM. Le costanti C, D relative al p-esimo autovalore sono

$$C = A_{np}\, N_n(\kappa'_p R_i) \qquad D = -A_{np}\, J_n(\kappa'_p R_i)$$

dove A_{np} indica una costante. Pertanto le autofunzioni hanno la forma:

$$\psi_{np} = A_{np}[N_n(\kappa'_p R_i)\, J_n(\kappa'_p R) - J_n(\kappa'_p R_i)\, N_n(\kappa'_p R) \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases} \tag{9.4}$$

(dove $n = 0, 1, ...; p = 1, 2, ...$). La costante A_{np} deve essere determinata imponendo la condizione di normalizzazione delle autofunzioni. Gli autovalori dipendono dai raggi R_i e R_e. Poiché la (9.3) non può essere risolta analiticamente, essi devono essere determinati numericamente. Si trova che in ogni caso il primo modo TM è il modo TM_{01} (Figura 9.3). Si ha:

$$\lambda'_{01} \approx 2(R_e - R_i) \qquad (\text{se } R_e - R_i << R_e)$$

MODI TE Gli autovalori e le autofunzioni vengono determinati procedendo in modo analogo al precedente. Gli autovalori sono le radici dell'equazione trascendente:

$$J'_n(\kappa'' R_i) N'_n(\kappa'' R_e) - J'_n(\kappa'' R_e) N'_n(\kappa'' R_i) = 0 \tag{9.5}$$

dove J'_n e N'_n sono le derivate di J_n e N_n. Le autofunzioni sono:

$$\varphi_{np} = B_{np}\, [N'_n(\kappa''_p R_i)\, J_n(\kappa''_p R) - J'_n(\kappa''_p R_i)\, N_n(\kappa''_p R) \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases} \tag{9.6}$$

dove la costante B_{np} viene fissata dalla condizione di normalizzazione. Il primo modo TE è

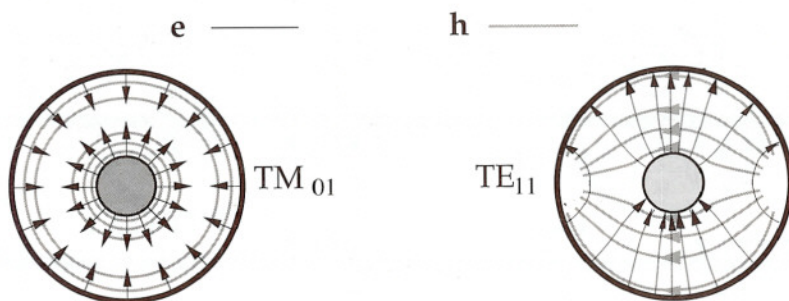



Figura 9.3

il modo TE_{11} (Figura 9.3). Esso è un modo degenere, come l'analogo modo della guida circolare. La sua lunghezza d'onda di taglio è dell'ordine della lunghezza della circonferenza media della corona circolare. Infatti si può mostrare che:

$$\lambda''_{11} \approx \pi(R_e + R_i) \qquad (\text{se } R_e - R_i << R_e)$$

Il modo TE_{11} è il primo modo superiore del cavo coassiale. La banda di frequenze in cui i cavi vengono normalmente utilizzati si estende dalla continua fino a valori minori della frequenza di taglio del modo TE_{11}.

3.10 Cenni sulle linee contenenti più di un conduttore

Si mostra che una linea schermata dotata di N conduttori interni permette la propagazione di N modi TEM.[1] Tali modi si propagano a qualsiasi frequenza con la stessa velocità di fase, lunghezza d'onda e costante d'attenuazione delle onde piane uniformi. Poiché i modi TEM hanno tutti la stessa costante di fase, essi possono essere combinati fra loro dando luogo a nuove N-uple di modi di struttura diversa. Combinando opportunamente i modi è possibile far sì che la nuova N-upla sia costituita da modi che soddisfano la condizione (7.3). Così le potenze trasportate dai modi TEM possono essere considerate separatamente, come per tutti gli altri modi. Ad esempio, nella cosiddetta "linea bifilare schermata" (Figura 10.1) il modo "bilanciato" e il modo "omopolare" soddisfano la (7.3) per evidenti ragioni di simmetria. Il modo "bilanciato" prende questo nome perché le tensioni fra i conduttori interni e il conduttore esterno (massa) sono opposte. Nel modo "omopolare" invece le tensioni sono uguali. Combinando opportunamente i due modi si ottengono nuovi modi nei quali le tensioni dei due conduttori rispetto alla massa possono assumere tutti i possibili valori. Ad esempio, sommando i campi indicati in figura si ottiene un modo TEM in cui la tensione fra il conduttore di sinistra e la massa è 2V mentre quella fra il conduttore di destra e la massa è nulla.

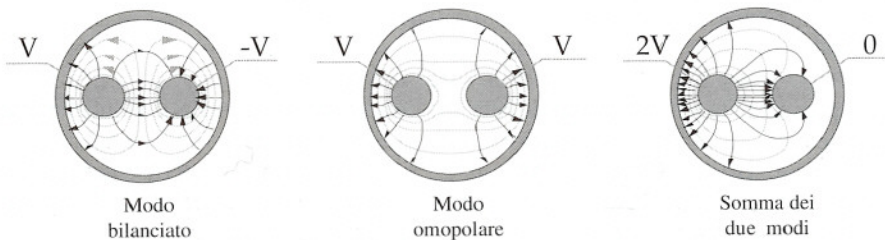



Figura 10.1

1 R.E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, 1960, sec. 4.1.

3.11 Attenuazione nelle guide reali

Nelle guide e nelle linee reali la conducibilità delle pareti è finita, mentre finora si è assunto che le pareti fossero perfettamente conduttrici. Pertanto, per studiare le guide reali la precedente teoria dovrebbe essere modificata, considerando come condizione al contorno la condizione di Leontovic in luogo della condizione di parete elettrica. Questo cambiamento porterebbe complicazioni notevoli, che però - fortunatamente - possono essere evitate mediante il procedimento approssimato di seguito esposto ("tecnica perturbazionale"). La maggior parte delle successive considerazioni vale sia per le guide che per le linee, anche se per semplificare il discorso si farà riferimento alle guide. La distinzione fra guide e linee verrà fatta solo quando sarà necessario.

Nel caso limite $R_s \to 0$ la condizione di Leontovic si riduce alla condizione di parete elettrica. Pertanto, su basi puramente fisiche, è lecito assumere che, passando al limite, ogni soluzione delle equazioni del campo trovata sotto la condizione di Leontovic debba tendere ad una soluzione trovata sotto la condizione di parete elettrica. Se inoltre si assume che tutte le quantità che caratterizzano la propagazione dei modi nella guida reale (costanti di fase e d'attenuazione, impedenza caratteristica, vettori modali) siano rappresentabili come serie di potenze di R_s, si può affermare che, per valori sufficientemente piccoli della resistenza superficiale, tali quantità differiscono da quelle della guida ideale per piccole quantità, proporzionali a R_s o a sue potenze ("perturbazioni"). Questa conclusione è accettabile in pratica, grazie alla piccolezza della resistenza superficiale dei metalli usati nelle guide d'onda.

Le perturbazioni sono importanti solo sulle quantità che, nel caso ideale, sono piccolissime o nulle. Se si considera un modo che si propaga a frequenze non troppo vicine alla frequenza di taglio, l'unica di queste quantità è la costante di attenuazione, che nel caso del conduttore perfetto è dell'ordine dell'angolo di perdita del mezzo. Dunque, *a frequenze non troppo vicine alla frequenza di taglio, l'unica quantità che risente sensibilmente della conducibilità finita delle pareti è la costante d'attenuazione del modo, mentre la costante di fase e l'impedenza caratteristica sono praticamente uguali nella guida reale e in quella ideale.*[1]

Dunque si assume che in un modo che si propaga in una guida reale a frequenze non troppo prossime alla frequenza di taglio, l'unica correzione da apportare alle formule trovate nei paragrafi precedenti consista nel porre

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c \qquad (11.1)$$

dove α_c rappresenta la perturbazione dovuta alla conducibilità finita del conduttore, mentre α_d rappresenta la costante di attenuazione dello stesso modo nella guida ideale (α_d è data dalla (3.12*b*) nel caso dei modi TE e TM, e dalla (3.1) del Capitolo 2, nel caso dei modi TEM delle linee). Pertanto, supponendo che il modo sia costituito da una sola onda che si propaga nel verso positivo di z, la tensione e la corrente modale hanno la forma:

1 In prossimità della frequenza di taglio la costante di fase è dello stesso ordine della costante d'attenuazione, sicché l'effetto della conducibilità finita delle pareti è importante anche per la costante di fase (vedi Equazione 3.11).

$$V = V^+ e^{-(\alpha_c + \alpha_d)z} e^{-j\beta z} \qquad I = V/Z_c$$

dove, al solito, Z_c indica genericamente l'impedenza caratteristica del modo considerato. La potenza che attraversa la sezione trasversale di ascissa z è :

$$P = \mathrm{Re}\frac{VI^*}{2} = \frac{|V^+|^2}{2Z_c} e^{-2(\alpha_c + \alpha_d)z}$$

Derivando rispetto a z si ottiene:

$$-\frac{dP}{dz} = 2(\alpha_c + \alpha_d)P \tag{11.2}$$

Il primo membro rappresenta il decremento per unità di lunghezza della potenza transitante nella guida, nell'intorno dell'ascissa z. Esso è uguale alla potenza dissipata per unità di lunghezza nella guida. Pertanto si può scrivere:

$$-\frac{dP}{dz} = W_c + W_d$$

dove W_c e W_d sono le potenze dissipate per unità di lunghezza nel conduttore e nel dielettri-co rispettivamente, nell'intorno della sezione di ascissa z. Sostituendo nella (11.2) si ottiene:[1]

$$W_c = 2\,\alpha_c P \qquad W_d = 2\,\alpha_d P \tag{11.3}$$

Dalla prima espressione si ricava:

$$\alpha_c = \frac{W_c}{2P} \tag{11.4}$$

Se si è capaci di calcolare W_c la precedente espressione permette di determinare α_c.

La Figura 11.1 rappresenta un tronco di guida compreso fra le sezioni trasversali poste alle ascisse z e z + dz. La potenza dissipata nella parete conduttrice è (vedi Equazione 6.6, Capitolo 2):

$$\frac{R_s}{2} dz \int_C |J_s|^2 \, dC$$

da cui, dividendo per la lunghezza dz:

1 Se α_c e α_d sono note, queste espressioni permettono di calcolare la quantità di calore sviluppata nella guida per unità di tempo e di lunghezza in funzione della potenza trasmessa dal modo. Tale calcolo è richiesto nella progettazione delle guide che trasportano potenze elevate.

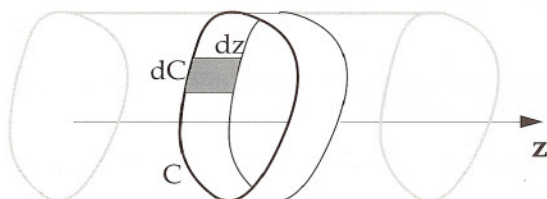



Figura 11.1

$$W_c = \frac{R_s}{2} \int_C |J_s|^2 \, dC$$

Poiché la potenza che attraversa la guida è:

$$P = \frac{|V|^2}{2Z_c} = \frac{Z_c |I|^2}{2}$$

dalla (12.4) si ottiene:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{2Z_c} \frac{1}{|I|^2} \int_C |J_s|^2 \, dC \qquad (11.5)$$

In questa formula $\mathbf{J}_s$ è la densità della corrente superficiale sulla parete conduttrice in corrispondenza della stessa sezione in cui viene considerata la corrente I. Nella guida reale $\mathbf{J}_s$ differisce dal valore nella guida ideale per un termine perturbativo. Pertanto nel calcolo della (11.5) è lecito sostituire la densità di corrente nella guida ideale, compiendo un errore trascurabile. Gli esempi seguenti chiariscono l'uso della (11.5).

CALCOLO DI α_c PER IL MODO TEM NEL CAVO COASSIALE Nel cavo coassiale il contorno C è costituito dalle circonferenze di raggio R_i e R_e (Figura 9.1*a*). La densità di corrente ha come unica componente quella secondo z e, a causa della simmetria del modo considerato, essa è uguale su tutto il contorno. Si ha:

$$\mathbf{J}_s = \frac{I}{2\pi R_i} \mathbf{u}_z \quad \text{(cond. interno)} \qquad \mathbf{J}_s = -\frac{I}{2\pi R_e} \mathbf{u}_z \quad \text{(cond. esterno)}$$

Pertanto:

$$\int_C |J_s|^2 \, dC = \frac{|I|^2}{(2\pi R_i)^2} 2\pi R_i + \frac{|I|^2}{(2\pi R_e)^2} 2\pi R_e = \frac{|I|^2}{2\pi R_e} \left(1 + \frac{R_e}{R_i}\right)$$

Per la (9.1) si ha:

$$\frac{R_e}{R_i} = e^{2\pi Z^0/\eta}$$

Sostituendo nella precedente espressione e utilizzando la (11.5) si ottiene:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{\eta}\frac{1}{4\pi R_e}\frac{1+e^{2\pi Z^0/\eta}}{Z^0/\eta} \tag{11.6}$$

Si nota che a parità di conduttore, di dielettrico e di impedenza caratteristica l'attenuazione diminuisce al crescere di R_e, cioè delle dimensioni del cavo. Inoltre l'attenuazione dipende dal rapporto Z^0/η e diviene molto elevata sia quando questo rapporto è molto basso ($R_i \approx R_e$), sia quando esso è molto alto ($R_i << R_e$). Con i dielettrici normalmente usati nei cavi (esempio teflon, polietilene) l'attenuazione è minima quando l'impedenza caratteristica è prossima a una cinquantina di ohm.[1] Si nota infine che α_c è proporzionale a R_s; pertanto all'aumentare della frequenza α_c cresce proporzionalmente a $\sqrt{f}$.

Nei comuni cavi il conduttore interno è separato da quello esterno da un dielettrico a bassa perdita. Quindi l'attenuazione comprende anche il termine

$$\alpha_d = \frac{\pi\theta_e}{\lambda} \tag{11.7}$$

All'aumentare della frequenza α_d cresce molto più rapidamente di α_c, così che l'attenuazione dovuta alle dissipazioni nel dielettrico diviene preponderante oltre una certa frequenza (tipicamente qualche gigahertz). Per questa ragione, nella banda delle microonde e nelle applicazioni in cui l'attenuazione è importante (trasmissione di potenze molto alte o molto basse), i cavi vengono soppiantati dalle guide, che possono essere realizzate senza usare dielettrici.

CALCOLO DI α_c PER IL MODO TE_{10} NELLA GUIDA RETTANGOLARE Sulle pareti y = 0 e y = b si ha (vedi formule del Paragrafo 6.1):

$$\mathbf{J}_s = \mp\mathbf{u}_y \times \mathbf{H} = \pm(\mathbf{u}_z H_x - \mathbf{u}_x H_z) = \pm I\sqrt{\frac{2}{ab}}\left(\mathbf{u}_z \sin\frac{\pi x}{a} - \mathbf{u}_x\, j\frac{\lambda Z''_{10}}{2a\eta}\cos\frac{\pi x}{a}\right)$$

Invece sulle pareti in x = 0 e x = a si ha:

$$\mathbf{J}_s = \mp\mathbf{u}_x \times \mathbf{H} = \pm\mathbf{u}_y H_z = \mathbf{u}_y jI\sqrt{\frac{2}{ab}}\frac{\lambda Z''_{10}}{2a\eta}$$

1 I cavi commerciali hanno impedenze caratteristiche generalmente comprese fra 30 e 90 Ω.

Sostituendo nella (11.5) si ottiene:

$$\alpha_c = \frac{2}{ab}\frac{R_s}{Z''_{10}}\int_0^a\left[\sin^2\frac{\pi x}{a} + \left(\frac{\lambda Z''_{10}}{2a\eta}\right)^2\cos^2\frac{\pi x}{a}\right]dx + \frac{R_s Z''_{10}\ \lambda^2}{2a^3\eta^2}$$

Eseguendo il calcolo dell'integrale si trova:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{\eta b}\frac{1+2\,(f_c/f)^2\,b\,/\,a}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \qquad (f_c = v/2\,a) \qquad (11.8)$$

L'andamento dell'attenuazione è indicato in Figura 11.2.
Esso è caratterizzato da un minimo e da una forte crescita in prossimità della frequenza di taglio. Questo andamento è comune a quasi tutti i modi delle guide d'onda.[1]
A causa della forte attenuazione le guide non vengono quasi mai usate in prossimità della frequenza di taglio.

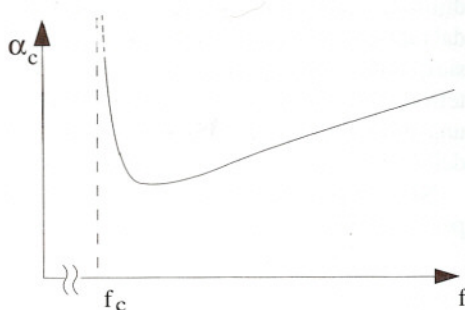



Figura 11.2

3.12 Sviluppo modale di un campo assegnato

Se $\mathbf{E}_T$ e $\mathbf{H}_T$ sono assegnati su una certa sezione è possibile determinare tutte le tensioni e le correnti modali. Si ha infatti:

$$V_i = \int_S \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{e}_i\, dS \qquad I_i = \int_S \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{h}_i\, dS \qquad (12.1)$$

La semplice dimostrazione è basata sulla (7.3). Si ha ad esempio:

$$\int_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_T\, dS = \int_S \mathbf{e}_i \cdot \sum_j V_j\, \mathbf{e}_j\, dS = \sum_j V_j \int_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\, dS = \sum_j V_j\, \delta_{ij} = V_i$$

Le (12.1) sono di importanza fondamentale per lo studio dei circuiti in guida d'onda. I seguenti esempi danno un'idea del loro uso.

1 Una interessante eccezione è costituita dai modi TE_{0p} nella guida circolare, la cui attenuazione decresce al crescere della frequenza senza presentare minimi (vedi Ramo, Whinnery, Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, J. Wiley & Sons, N.Y. 1967, § 9.05).

ESEMPIO 1: DETERMINAZIONE DEL CAMPO IN UNA GUIDA ADATTATA, NOTO UNO DEI CAMPI TRASVERSALI SULLA SEZIONE INIZIALE Si consideri la guida d'onda rappresentata in Figura 12.1*a*. La guida comunica a sinistra con una regione contenente le sorgenti del campo, ed è indefinita a destra. Poiché la potenza proviene dalle sorgenti, le sole onde da considerare sono quelle che si propagano verso destra. In pratica questa situazione viene realizzata collegando la guida ad un "carico adattato" (Figura 12.1*b*), cioè a una opportuna struttura che assorbe l'energia incidente senza provocare riflessioni. Le tensioni e le correnti modali hanno la forma:

$$V_i = V_i^+ e^{-\gamma_i z} \qquad I_i = \frac{V_i^+}{Z_i} e^{-\gamma_i z} \tag{12.2}$$

Sia $\mathbf{E}_0$ il campo elettrico trasversale sulla sezione A (z = 0). Se, come è indicato in figura, la sezione in questione è prossima alla zona di raccordo fra la regione delle sorgenti e l'inizio della guida l'andamento di $\mathbf{E}_0$ è influenzato dalla forma del raccordo e non coincide con la struttura di alcuno dei vettori modali. Però in base a quanto detto precedentemente è sempre possibile operare lo sviluppo modale:

$$\mathbf{E}_0 = \sum_i V_i^+ \mathbf{e}_i$$

dove

$$V_i^+ = \int_S \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_i \, dS \tag{12.3}$$

Sostituendo nelle (12.2) i coefficienti così trovati vengono determinate le tensioni e le correnti alla destra di A. Infine, mediante le (2.14) si può rappresentare il campo in tutta la guida, da A all'infinito (o alla sezione B in cui inizia il carico adattato). Allo stesso risultato si può pervenire partendo dalla conoscenza del campo magnetico trasversale ($\mathbf{H}_0$). In questo caso i coefficienti incogniti vengono trovati utilizzando l'espressione:

$$\frac{V_i^+}{Z_i} = \int_S \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h}_i \, dS \tag{12.4}$$

Figura 12.1

Se alla frequenza di lavoro si propaga il solo modo dominante, le tensioni e le correnti di tutti i modi superiori presenti nella sezione A decrescono esponenzialmente man mano che ci si sposta verso destra. Al crescere della distanza da A il contributo dei modi superiori diviene trascurabile e il campo assume la forma del modo dominate puro. La Figura 12.2 illustra quanto detto. Essa rappresenta la sezione longitudinale di una guida d'onda rettangolare che permette la propagazione del solo modo TE_{10}. La guida comunica con la zona delle sorgenti attraverso l'apertura lasciata libera da un diaframma metallico. Le linee orientate rappresentano il campo elettrico "fotografato" in un certo istante. La discontinuità introdotta dal diaframma nella geometria cilindrica della guida provoca una distorsione delle linee di forza, la cui forma a ridosso del diaframma non coincide con quella di alcun modo. Man mano che ci si allontana dal diaframma le linee di forza tendono ad assumere la forma tipica del modo TE_{10}. La distorsione delle linee di forza in prossimità del diaframma dipende dai modi evanescenti.

ESEMPIO 2: RELAZIONE FRA I CAMPI TRASVERSI IN UNA GUIDA ADATTATA   Si è visto che in una guida adattata il campo viene determinato se è assegnato uno dei campi trasversali su una certa sezione. Ad esempio, assegnato $\mathbf{H}_T$ viene determinato $\mathbf{E}_T$. Infatti sulla sezione di ascissa z, risulta:

$$\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_T(x, y, z) = \mathbf{u}_z \times \sum_i V_i(z)\, \mathbf{e}_i(x, y) =$$

$$\sum_i V_i(z)\, \mathbf{u}_z \times \mathbf{e}_i(x, y) = \sum_i Z_i I_i(z)\, \mathbf{h}_i(x, y) =$$

$$\sum_i \mathbf{h}_i(x, y) Z_i \int_S \mathbf{H}_T(x', y', z) \cdot \mathbf{h}_i(x', y')\, dx'\, dy' =$$

$$\int_S \Big(\sum_i Z_i\, \mathbf{h}_i(x, y)\, \mathbf{h}_i(x', y')\Big) \cdot \mathbf{H}_T(x', y', z)\, dx'\, dy'$$

Pertanto si può scrivere:

$$\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}(x, y, z) = \int_S \underline{\mathbf{Z}}(x, y, x', y') \cdot \mathbf{H}_T(x', y', z)\, dx'\, dy' \qquad (12.5)$$

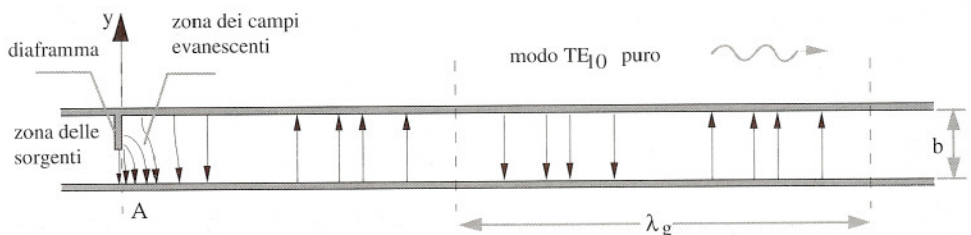



Figura 12.2

dove $\underline{\mathbf{Z}}$ è un tensore che, in coordinate cartesiane, corrisponde alla seguente matrice:[1]

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \sum_i Z_i h_{ix}(x,y) h_{ix}(x',y') & \sum_i Z_i h_{ix}(x,y) h_{iy}(x',y') \\ \sum_i Z_i h_{iy}(x,y) h_{ix}(x',y') & \sum_i Z_i h_{iy}(x,y) h_{iy}(x',y') \end{bmatrix} \tag{12.6}$$

ESEMPIO 3: DETERMINAZIONE DEL CAMPO IN UN TRONCO DI GUIDA, NOTO UNO DEI CAMPI TRASVERSI SULLE SEZIONE TERMINALI Il tronco di guida ha lunghezza L (Figura 12.3). Sono noti - ad esempio - i campi elettrici trasversali $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{E}_L$ sulle sezioni terminali $z = 0$ e $z = L$. Per il modo i-esimo si ricava:

$$V_i(0) = \int_S \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_i \, dS$$

$$V_i(L) = \int_S \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{e}_i \, dS$$

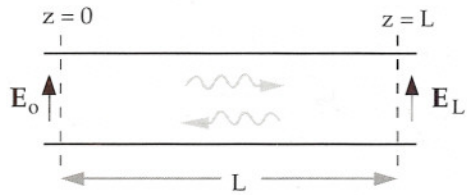



Figura 12.3

Pertanto, considerando l'espressione generale della tensione modale, in cui figurano le due onde propagantesi in verso opposto, si ha:

$$V_i^+ + V_i^- = V_i(0)$$

$$V_i^+ e^{-\gamma_i L} + V_i^- e^{\gamma_i L} = V_i(L)$$

Risolvendo questo sistema vengono determinate le costanti V_i^+ e V_i^-. La risoluzione è sempre possibile se il determinante differisce da zero. Si lascia al lettore di verificare che l'esistenza della soluzione è garantita se si considerano le perdite. Se invece la guida è senza perdite il determinate si annulla nelle situazioni particolari in cui risulta $L = n\lambda_{gi}/2$ ($n = 1, 2, ...$). In queste situazioni esistono infinite soluzioni, a patto che le tensioni $V_i(0)$ e $V_i(L)$ siano opposte (quando n è dispari) o uguali (quando n è pari).[2] Questo risultato verrà riconsiderato nel capitolo successivo, nella discussione generale sulle condizioni al contorno nei problemi di elettromagnetismo.

---

1 È più compatta la seguente rappresentazione diadica (vedi Appendice A): $\underline{\mathbf{Z}} = \sum_i Z_i \mathbf{h}_i(x, y) \mathbf{h}_i(x', y')$.

2 Se ciò non avviene i dati del problema ($\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{E}_L$) sono in contrasto con la realtà fisica, perché ad essi non corrisponde alcuna soluzione delle equazioni del campo.

4

Unicità, equivalenza, reciprocità

Nello studio dell'effetto pelle e della propagazione guidata si è già avuto modo di constatare come le condizioni al contorno siano essenziali per identificare la soluzione di un problema specifico. In effetti, perché un problema qualsiasi sia posto correttamente è necessario che le condizioni al contorno siano sufficienti a identificare una soluzione unica. Questo argomento è discusso nel Paragrafo 2, facendo riferimento ad una forma generalizzata delle equazioni di Maxwell, introdotta nel Paragrafo 1.

Nel Paragrafo 3 si mostra che le condizioni al contorno di un problema possono essere modificate a patto di introdurre opportune sorgenti fittizie (*sorgenti equivalenti*), poste sul contorno della zona d'interesse. Così è possibile trasformare il problema originario in un problema diverso, che ha soluzione identica a quella cercata. L'introduzione delle sorgenti equivalenti rende più rapida la soluzione di certi problemi.

Il Paragrafo 4 tratta il *teorema di reciprocità*, che ha grande importanza nella teoria dell'elettromagnetismo. Gli esempi considerati negli ultimi due paragrafi servono a dare una prima idea dell'utilità dei concetti esposti in precedenza.

4.1 Correnti magnetiche

I teoremi discussi in questo capitolo fanno riferimento alle seguenti equazioni differenziali:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \qquad (1.1a)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\,\mu\,\mathbf{H} + \mathbf{M}_0 \qquad (1.1b)$$

dove $\mathbf{M}_0$ rappresenta un campo impresso, analogo a $\mathbf{J}_0$, ma privo di significato fisico. È evidente che queste equazioni si riducono alle normali equazioni di Maxwell quando si pone $\mathbf{M}_0 = 0$. Per questa ragione esse possono essere chiamate "equazioni di Maxwell generalizzate". Naturalmente le equazioni generalizzate possono essere scritte anche per i mezzi anisotropi, considerando permeabilità tensoriali. Il vettore $\mathbf{M}_0$ [V/m^2] prende il nome di "densità della corrente magnetica". L'introduzione delle correnti magnetiche è utile per ampliare le possibilità di scelta delle sorgenti equivalenti.

Si vedrà successivamente che molto spesso è utile considerare sorgenti equivalenti costituite da lamine di corrente magnetica di densità $\mathbf{M}_s$ [V/m]. Con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel Paragrafo 3 del Capitolo 1 si vede che, per coerenza con le equazioni di

Maxwell generalizzate, il campo deve essere discontinuo anche sulle lamine di corrente magnetica. Si trova inoltre che le condizioni sui campi tangenziali devono essere generalizzate come segue:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{J}_s \qquad (1.2a)$$

$$-\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = \mathbf{M}_s \qquad (1.2b)$$

4.2 Condizioni al contorno, teorema di unicità

Si voglia determinare il campo in una regione V (Figura 2.1) in cui si conosce il mezzo e le eventuali sorgenti. È chiaro che questi soli dati sono insufficienti, perché il campo dipende anche dal mezzo e dalle sorgenti all'esterno della regione considerata. Pertanto, affinché il problema sia posto correttamente, bisogna fornire ulteriori dati che, in qualche modo, permettano di tener conto del mondo circostante. Essi sono forniti assegnando le "condizioni al contorno", consistenti nel fissare i valori assunti sulla superficie S_v da certe componenti del campo, ovvero - più in generale - da certe quantità ad esse collegate. Le condizioni al contorno devono essere sufficienti ad assicurare l'unicità della soluzione delle equazioni del campo. Esse però non devono porre vincoli sovrabbondanti, pena l'inesistenza della soluzione.

L'Esempio 3 riportato nel Paragrafo 12 del capitolo precedente permette di concretizzare questo concetto. Per determinare il campo nel tronco di guida di lunghezza L indicato nella Figura 12.3, si considerava innanzi tutto la sua rappresentazione mediante lo sviluppo modale; sebbene lo sviluppo soddisfacesse la condizione al contorno sulla parete della guida, il campo non era determinato fino a quando non venivano trovate le tensioni dei vari modi. A questo scopo era necessario assegnare le condizioni al contorno anche sulle sezioni terminali (nell'esempio i campi elettrici trasversali $\mathbf{E}_0$ ed $\mathbf{E}_L$). Così si perveniva ad una soluzione unica, purché la guida fosse dissipativa. Nel caso della guida senza perdite le tensioni non potevano essere determinate per i modi con lunghezza d'onda uguale ad un sottomultiplo di 2L; in questo caso infatti, la soluzione esisteva solo se $\mathbf{E}_0$ ed $\mathbf{E}_L$ soddisfacevano particolari condizioni, ma non era unica. Dunque, escludendo il caso senza perdite, il campo veniva determinato ovunque, avendo assegnato la condizione di parete elettrica sulla parete conduttrice e i valori del campo elettrico tangenziale sulle sezioni terminali. Se

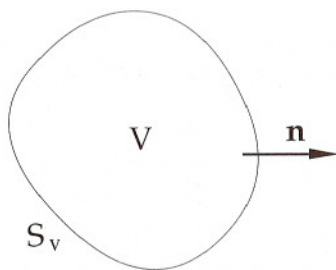



Figura 2.1

oltre a queste condizioni ne fossero state assegnate altre (ad esempio il valore di E_z o di qualche componente di **H**) la soluzione sarebbe stata impossibile. Infatti, il campo veniva univocamente determinato in tutta la guida solo in funzione di $\mathbf{E}_0$ ed $\mathbf{E}_L$ e, quindi, anche i valori al contorno di **H** e di E_z venivano univocamente determinati in funzione degli stessi dati. Pertanto, dopo aver assegnato i valori di $\mathbf{E}_0$ e di $\mathbf{E}_L$, non sarebbe stato lecito assegnare arbitrariamente ulteriori condizioni su E_z e/o su una o più componenti di **H**, perché queste condizioni - in genere - sarebbero state incompatibili con le prime.

Tornando alla discussione generale, si potrebbe pensare che, determinando sperimentalmente i valori del campo al contorno, sia lecito assegnare condizioni sovrabbondanti, perché i valori che si hanno nella realtà sono certamente compatibili. Basta però pensare al fatto che i risultati dell'esperienza sono sempre affetti da errori per rendersi conto della illusorietà di questo ragionamento. Dunque, in ogni caso, un problema è "ben posto" se le condizioni al contorno non sono sovrabbondanti.

Di solito le condizioni al contorno sono assegnate sulle componenti tangenziali di **E** e di **H**. Esse possono avere la stessa forma su tutto il contorno o assumere forme diverse. Indicata con S una parte del contorno (eventualmente coincidente con tutta la superficie S_v), le condizioni sono espresse in modo molto generale da espressioni del tipo:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} - \mathcal{Z}\mathbf{H}_t = \mathbf{V} \qquad (2.1a)$$

su S

$$\mathbf{H}\times\mathbf{n} - \mathcal{Y}\mathbf{E}_t = \mathbf{W} \qquad (2.1b)$$

dove **V** e **W** rappresentano vettori tangenziali assegnati, $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{H}_t$ sono i campi tangenziali, **n** è la normale uscente dalla zona in cui si vuole determinare il campo, $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y}$ rappresentano - nel caso più generale - operatori lineari che trasformano un campo tangenziale definito su S in un altro campo tangenziale definito sulla stessa superficie. Inoltre $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y}$ godono della seguente proprietà: detti $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{h}_t$ due campi tangenziali scelti arbitrariamente su S risulta sempre:

$$\mathrm{Re}\int_S \mathbf{h}_t^* \cdot \mathcal{Z}\mathbf{h}_t \, dS \geq 0 \qquad (2.2a)$$

$$\mathrm{Re}\int_S \mathbf{e}_t^* \cdot \mathcal{Y}\mathbf{e}_t \, dS \geq 0 \qquad (2.2b)$$

Le (2.1) comprendono come casi particolari le seguenti condizioni, che sono le più comuni:

- *Assegnazione del campo elettrico tangenziale*:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = \mathbf{V}$$

- *Assegnazione del campo magnetico tangenziale*:

$$\mathbf{H}\times\mathbf{n} = \mathbf{W}$$

- *Condizione di parete elettrica*:

  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$

- *Condizione di parete magnetica*:

  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$

- *Condizione d'impedenza* (ζ è uno scalare con parte reale non negativa, detto "impedenza della parete"):

  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \zeta \mathbf{H}_t$

- *Condizione d'ammettenza* (ν è uno scalare con parte reale non negativa, detto "ammettenza della parete"):

  $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \nu \mathbf{E}_t$

Le condizioni al contorno vengono dette "omogenee" se **V** e **W** sono nulli, "inomogenee" in caso contrario. Esempi di condizioni omogenee sono la condizione di parete elettrica (magnetica) e la condizione di impedenza (ammettenza).

■ Nelle condizioni d'impedenza/ammettenza gli operatori $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y}$ sono di tipo algebrico, ma questa non è una regola generale. Ad esempio, facendo riferimento alla Figura 12.1 del capitolo precedente, se si desiderasse studiare il campo nella zona delle sorgenti, la condizione al contorno da imporre sulla sezione A sarebbe la (12.5) del Capitolo 3, che è una relazione del tipo

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathcal{Z} \mathbf{H}_t \tag{2.3}$$

in cui $\mathcal{Z}$ rappresenta l'operatore integrale:

$$\mathcal{Z}\mathbf{H}_t = \int_S \underline{\mathbf{Z}}(x, y, x', y') \cdot \mathbf{H}_t(x', y')\, dx'\, dy'$$ ■

Vale il seguente

TEOREMA DI UNICITÀ: *Sia V una regione dello spazio, delimitata da N superfici S_1, S_2, ..., S_N e contenente un mezzo dissipativo. Se esiste una soluzione delle equazioni di Maxwell che - su ciascuna superficie - soddisfa una condizione al contorno del tipo (2.1a) o (2.1b), tale soluzione è l'unica dotata di questa proprietà.*

■ DIMOSTRAZIONE Per brevità la dimostrazione viene svolta nel caso in cui il mezzo è isotropo e nell'ipotesi che su tutto il contorno S_v valga una condizione del tipo (2.1*a*). Procedendo per assurdo si suppone che possano esistere due campi distinti ($\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$) e ($\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$) che, oltre a soddisfare le (1.1) e (1.2) soddisfano anche la condizione al contorno assegnata. Basta mostrare che le differenze

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \qquad \mathbf{h} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$$

sono necessariamente nulle per concludere che l'ipotesi è assurda.

Scrivendo le (1.1) e (1.2) per i due campi, sottraendo le equazioni corrispondenti e ricordando che le sorgenti sono uguali per entrambi i campi, si vede che **e** e **h** soddisfano le seguenti equazioni:

$$\nabla \times \mathbf{h} = j\omega\,\varepsilon\,\mathbf{e} \qquad \nabla \times \mathbf{e} = -j\omega\,\mu\,\mathbf{h} \tag{2.4a}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-) = 0 \qquad \mathbf{n} \times (\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-) = 0 \tag{2.4b}$$

(le due ultime relazioni valgono sulle lamine di corrente e sulle superfici di discontinuità del mezzo, qualora esse siano presenti nella regione considerata). Inoltre, scrivendo la (2.1*a*) per i due campi, sottraendo le due relazioni e osservando che **V** è uguale nei due casi, si ottiene la condizione omogenea

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e} = \mathcal{Z}\,\mathbf{h}_t \quad \text{su } S_v \tag{2.5}$$

Le (2.4) hanno la forma delle equazioni di un campo monocromatico che non ha sorgenti in V. Per tale campo vale il bilancio delle potenze attive (Capitolo 1, Equazione 10.3), che assume la forma:

$$\int_V \left(\omega\,\varepsilon_0 \varepsilon'' \frac{|\mathbf{e}|^2}{2} + \omega\,\mu_0 \mu'' \frac{|\mathbf{h}|^2}{2} \right) dV + \mathrm{Re} \int_{S_V} \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*}{2} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{2.6}$$

A causa della (2.5) si ha:

$$\mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{e} = \mathbf{h}^* \cdot \mathcal{Z}\,\mathbf{h}$$

e quindi, per la (2.2*a*) l'ultimo integrale non può essere negativo. Dunque deve aversi:

$$\int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon'' \frac{|\mathbf{e}|^2}{2} + \mu_0 \mu'' \frac{|\mathbf{h}|^2}{2} \right) dV \le 0$$

Poiché l'integrando non può assumere valori negativi, la precedente condizione può essere verificata solo se **e** e **h** sono nulli ovunque. ■

Il teorema di unicità cade in difetto quando il mezzo è senza perdite, come era prevedibile sulla base dell'esempio considerato nella discussione preliminare. In questo caso, pur avendo assegnato le condizioni sulle componenti tangenziali può accadere di avere più di una soluzione. Per eliminare le soluzioni spurie, basta assumere che l'unica soluzione significativa sia quella che sussiste quando il mezzo viene considerato dissipativo, con ε'' e μ'' non nulli ma piccoli a piacere.

Il teorema è stato dimostrato nell'ipotesi che la regione V fosse limitata. Nel Paragrafo 10 del Capitolo 7 si vedrà che il teorema vale anche in regioni illimitate, purché il comportamento del campo all'infinito soddisfi certe condizioni.

4.3 Lamine equivalenti

I problemi con condizioni al contorno inomogenee possono essere trasformati in problemi con condizioni omogenee introducendo a ridosso del contorno sorgenti fittizie, costituite da lamine di corrente magnetica o elettrica di densità **V** o **W**. La Figura 3.1*a* illustra la trasformazione nel caso di una superficie su cui vale una condizione del tipo (2.1*a*). La condizione al contorno viene trasformata nella condizione omogenea $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathcal{Z}\,\mathbf{H}_t$; però la lamina introduce una discontinuità su $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$, che passa dal valore $\mathcal{Z}\,\mathbf{H}_t$ al valore $\mathcal{Z}\,\mathbf{H}_t + \mathbf{V}$,

come richiesto dalla condizione originaria. La Figura 3.1*b* illustra la trasformazione nel caso di una condizione del tipo (2.1*b*). È chiaro che, con questa trasformazione, le condizioni al contorno nella regione racchiusa dalle lamine sono proprio quelle desiderate e che quindi - per il teorema di unicità - il campo nella zona di interesse non viene modificato dalla trasformazione.

In particolare, se nel problema originario le condizioni al contorno consistono nell'assegnazione del campo elettrico tangenziale ($\mathcal{Z} = 0$) o del campo magnetico tangenziale ($\mathcal{Y} = 0$), valgono le equivalenze indicate in Figura 3.2.

Le lamine sono sorgenti fittizie che danno luogo ad effetti equivalenti alle condizioni al contorno originarie. Esse costituiscono un esempio di sorgenti equivalenti.

Un altro tipo di equivalenza è illustrato nella Figura 3.3. Sia **E**, **H** il campo generato nella regione V dalle correnti impresse $\mathbf{J}_0$ sotto certe condizioni *omogenee* assegnate sul contorno S_v (Figura 3.3*a*). Si supponga di suddividere V in due parti, V' e V", la prima delle quali racchiude le sorgenti. Il campo **E**, **H** nella regione V" può essere determinato considerando la situazione di Figura 3.3*c*, dove le sorgenti effettive esistenti in V' sono state sostituite da una lamina di corrente elettrica posta sulla superficie di separazione fra V' e V". La densità della corrente superficiale è

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}'$$

dove **H'** è il campo magnetico che verrebbe generato da $\mathbf{J}_0$ nella regione V' se si ponesse una parete elettrica sulla superficie di separazione fra V' e V" (Figura 3.3*b*). Le successive considerazioni mostrano che il campo generato dalla lamina nella regione V" è proprio **E**, **H**.

■ Poiché i campi (**E** , **H**) e (**E'**, **H'**) soddisfano le equazioni di Maxwell, hanno le stesse sorgenti e sono soggetti alla stessa condizione omogenea su S_v, le differenze

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}' \qquad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$$

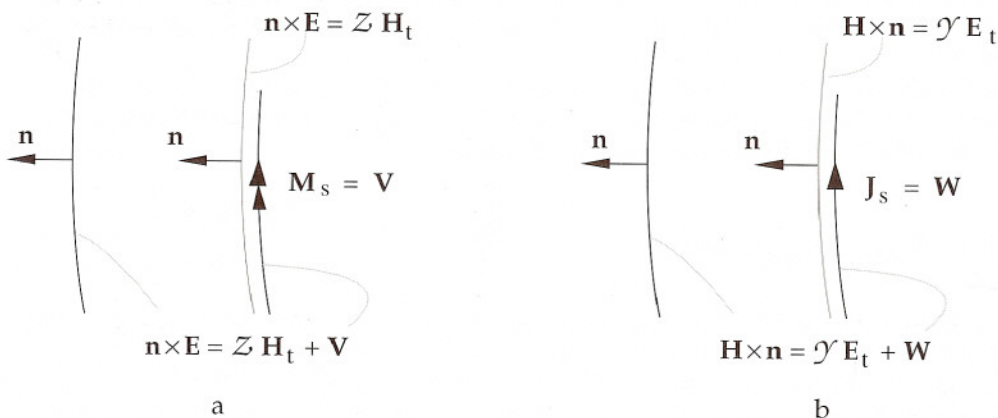



Figura 3.1

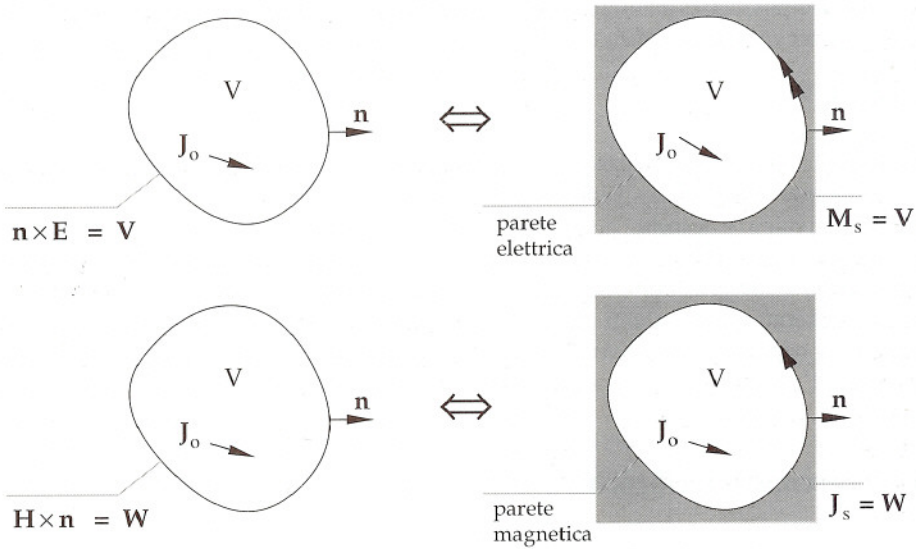



Figura 3.2

(definite nella regione V', vedi Figura 3.3*c*) soddisfano le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti e sono soggetti alla stessa condizione su S_V. Dunque i campi indicati nella Figura 3.3*c* (dove non esiste $\mathbf{J}_0$) soddisfano sia le equazioni di Maxwell che le condizioni al contorno su S_V. Inoltre la discontinuità alla superficie di separazione fra V' e V" è in accordo con le (1.2). Infatti si ha:

$\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}) = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}' = 0$ ($\mathbf{n} \times \mathbf{E}'$ è nullo per la condizione di parete elettrica, vedi Figura 3.3*b*)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}}) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}_s$$

In conclusione il campo indicato nella Figura 3.3*c* soddisfa le equazioni di Maxwell, le condizioni sulla lamina e le condizioni al contorno; pertanto esso è il campo generato dalla lamina nelle condizioni di Figura 3.3*c*. In particolare, nella regione V", il campo è identico a quello generato da $\mathbf{J}_0$. ■

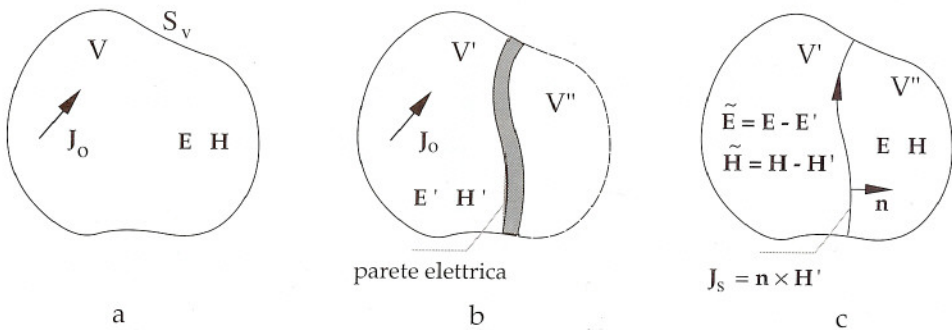



Figura 3.3

Un tipo di equivalenza analogo al precedente richiede di sostituire le sorgenti effettive con una lamina magnetica di densità

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{E}' \times \mathbf{n}$$

(vedi Figura 3.4*c*). In questo caso, però, il campo $\mathbf{E}'$ è quello che $\mathbf{J}_0$ genera in V' quando si pone una parete *magnetica* all'interfaccia fra V' e V".

Nelle equivalenze descritte nelle Figure 3.3 e 3.4 le sorgenti effettive vengono rimosse e sostituite da sorgenti fittizie, senza alterare né il mezzo né le condizioni al contorno. La sostituzione è analoga a quella che, nella teoria dei circuiti, permette di sostituire i generatori reali con generatori equivalenti (teoremi di Thevenin e di Norton). L'analogia diverrà più evidente nel capitolo successivo, dove le equivalenze in questione verranno utilizzate per giustificare l'uso dei generatori equivalenti nello studio dei circuiti ad alta frequenza.

4.4 Teorema di reciprocità

Si consideri una regione V in cui il mezzo è isotropo, ovvero anisotropo, ma con tensori di permeabilità simmetrici. Siano $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$ e $\mathbf{E}'', \mathbf{H}''$ due diversi campi monocromatici della stessa frequenza, generati nella regione V da due *diversi* sistemi di sorgenti, indicate da $\mathbf{J}'_0, \mathbf{M}'_0$ e $\mathbf{J}''_0, \mathbf{M}''_0$ rispettivamente (Figura 4.1).
Vale la seguente relazione (TEOREMA DI RECIPROCITÀ):

$$\int_{S_v} \mathbf{E}' \times \mathbf{H}'' \cdot \mathbf{n}\, dS_v + \int_V (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{J}''_0 - \mathbf{H}' \cdot \mathbf{M}''_0)\, dV = \int_{S_v} \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n}\, dS_v + \int_V (\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{J}'_0 - \mathbf{H}'' \cdot \mathbf{M}'_0)\, dV \tag{4.1}$$

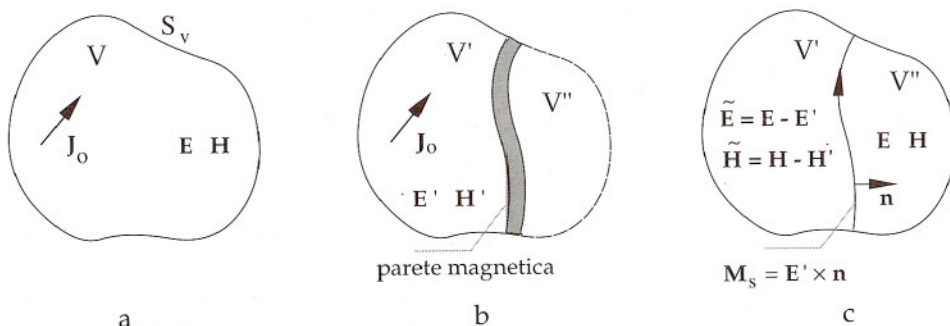
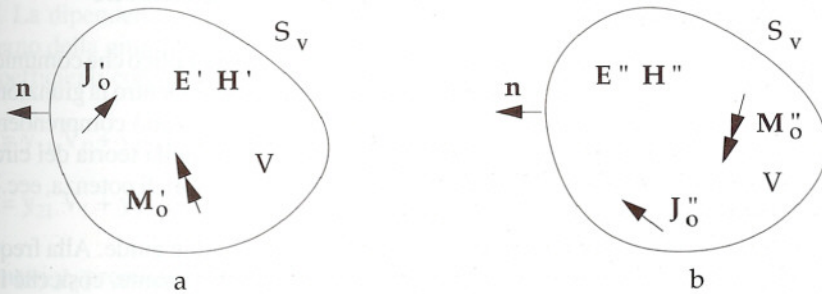



Figura 3.4

Figura 4.1

Il teorema vale anche quando le sorgenti sono costituite da lamine; in questo caso gli integrali di volume vengono rimpiazzati da integrali estesi alla superficie delle lamine.

■ DIMOSTRAZIONE Per brevità ci si limita a considerare il caso di mezzo isotropo e di sorgenti distribuite nel volume. I campi generati dai due sistemi di sorgenti soddisfano le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H}' = j\omega\varepsilon\,\mathbf{E}' + \mathbf{J}'_0 \qquad -\nabla \times \mathbf{E}' = j\omega\mu\,\mathbf{H}' + \mathbf{M}'_0 \tag{4.2a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}'' = j\omega\varepsilon\,\mathbf{E}'' + \mathbf{J}''_0 \qquad -\nabla \times \mathbf{E}'' = j\omega\mu\,\mathbf{H}'' + \mathbf{M}''_0 \tag{4.2b}$$

Moltiplicando scalarmente la prima delle (4.2*a*) per **E**" e la seconda delle (4.2*b*) per **H**' si ottiene:

$$\mathbf{E}''\cdot\nabla \times \mathbf{H}' = j\omega\varepsilon\,\mathbf{E}''\cdot\mathbf{E}' + \mathbf{E}''\cdot\mathbf{J}'_0$$

$$-\mathbf{H}'\cdot\nabla \times \mathbf{E}'' = j\omega\mu\,\mathbf{H}'\cdot\mathbf{H}'' + \mathbf{H}'\cdot\mathbf{M}'_0$$

Sommando le due equazioni e ricordando l'identità $\mathbf{H}' \cdot \nabla \times \mathbf{E}'' - \mathbf{E}'' \cdot \nabla \times \mathbf{H}' = \nabla \cdot (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}')$ si ha:

$$-\nabla\cdot(\mathbf{E}''\times\mathbf{H}') = j\omega(\varepsilon\,\mathbf{E}''\cdot\mathbf{E}' + \mu\,\mathbf{H}'\cdot\mathbf{H}'') + \mathbf{E}''\cdot\mathbf{J}'_0 + \mathbf{H}'\cdot\mathbf{M}''_0 \tag{4.3}$$

Analogamente, partendo dalle altre due equazioni di Maxwell, risulta:

$$-\nabla\cdot(\mathbf{E}'\times\mathbf{H}'') = j\omega(\varepsilon\,\mathbf{E}'\cdot\mathbf{E}'' + \mu\,\mathbf{H}''\cdot\mathbf{H}') + \mathbf{E}'\cdot\mathbf{J}''_0 + \mathbf{H}''\cdot\mathbf{M}'_0 \tag{4.4}$$

Sottraendo le (4.3) e (4.4), grazie alla commutabilità dei prodotti scalari si ha:

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}'') - \nabla\cdot(\mathbf{E}''\times\mathbf{H}') = \mathbf{E}''\cdot\mathbf{J}_0 + \mathbf{H}'\cdot\mathbf{M}''_0 - \mathbf{E}'\cdot\mathbf{J}''_0 - \mathbf{H}''\cdot\mathbf{M}_0$$

Integrando nel volume e applicando il teorema della divergenza si ottiene la (4.1). ■

Il teorema di reciprocità costituisce un potente strumento della teoria dell'elettromagnetismo. Esso può venire usato per dedurre altri teoremi, ovvero per calcolare i campi generati da certe sorgenti in un certa regione, partendo da altri campi già noti, prodotti nella stessa regione da sorgenti diverse. I seguenti paragrafi illustrano i due tipi di applicazione.

4.5 Simmetria della matrice di ammettenza di una giunzione

Viene detta "giunzione" una regione racchiusa da un conduttore metallico che comunica con l'esterno attraverso due o più guide d'onda (o linee di trasmissione). Dentro la giunzione non si hanno sorgenti; il mezzo può essere omogeneo o inomogeneo, e può comprendere altri conduttori. Le proprietà generali delle giunzioni sono importanti nella teoria dei circuiti a microonde, dato che i componenti circuitali (filtri, attenuatori, divisori di potenza, ecc.) sono classificabili come giunzioni.

La Figura 5.1 rappresenta schematicamente una giunzione fra due guide. Alla frequenza di lavoro le guide permettono la propagazione del solo modo dominante, cosicché i modi superiori danno luogo a campi evanescenti localizzati in prossimità delle zone in cui le guide sono collegate al corpo centrale della giunzione. Oltre che dalle pareti conduttrici il contorno è delimitato dalle sezioni trasversali delle guide che costituiscono le cosiddette "porte". Esse sono sufficientemente discoste dalle zone in cui i campi evanescenti hanno intensità apprezzabile, così da poter assumere che, sulle porte, il campo abbia la conformazione del modo dominante. Nella caso della Figura 5.1 si hanno due porte, indicate con S_1 e S_2. Nelle due guide i versi positivi sono quelli entranti nella giunzione; essi sono quelli dei versori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, corrispondenti - per ciascuna guida - al versore $\mathbf{u}_z$ considerato nella teoria del capitolo precedente. Sulle porte i campi trasversali hanno la forma

$$\mathbf{E}_{T1} = V_1\, \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{H}_{T1} = I_1\, \mathbf{h}_1 \qquad \text{(sulla porta 1)} \tag{5.1a}$$

$$\mathbf{E}_{T2} = V_2\, \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{H}_{T2} = I_2\, \mathbf{h}_2 \qquad \text{(sulla porta 2)} \tag{5.1b}$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1$ ed $\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2$ sono i vettori modali relativi ai modi dominanti delle due guide e V_1, I_1, V_2, I_2 sono le tensioni e le correnti sulle porte.

Il campo all'interno di una giunzione è determinato dalle condizioni al contorno. Poiché la condizione sulla parete metallica è omogenea, il campo dipende solo dalle tensioni V_1 e V_2; infatti, fissare le tensioni equivale a fissare i campi elettrici tangenziali alle porte e, quindi, a definire completamente le condizioni al contorno. In particolare a ogni coppia di

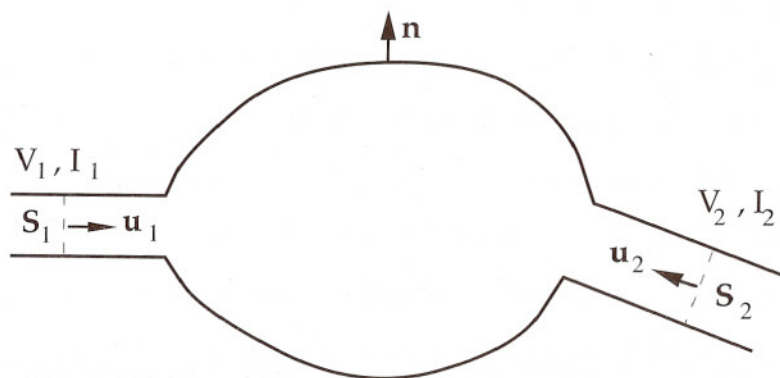



Figura 5.1

tensioni corrisponde una coppia di campi trasversali $\mathbf{H}_{T1}$, $\mathbf{H}_{T2}$, e quindi una coppia di correnti I_1 e I_2. La dipendenza delle correnti dalle tensioni è certamente lineare poiché il mezzo all'interno della giunzione è lineare. Pertanto, per qualsiasi giunzione a due porte esistono certi coefficienti complessi y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} , dipendenti dalla frequenza, tali che:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \tag{5.2a}$$

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \tag{5.2b}$$

I parametri y_{ij} prendono il nome di "parametri d'ammettenza" della giunzione. Analoghe relazioni possono essere scritte per una giunzione a N porte.

I parametri d'ammettenza sono gli elementi di una matrice detta "matrice d'ammettenza". La matrice d'ammettenza caratterizza completamente il comportamento della giunzione per quanto riguarda la trasmissione dei segnali fra le porte. Il teorema di reciprocità permette di mostrare che *la matrice d'ammettenza di qualsiasi giunzione contenente un mezzo isotropo è simmetrica.*[1]

■ DIMOSTRAZIONE La dimostrazione fa riferimento ad una giunzione a due porte, ma può essere estesa al caso di un numero di porte arbitrario. Si considerino le due situazioni indicate in Figura 5.2*a*, *b*. Nella Figura 5.2*a* la porta S_2 è chiusa da un piano conduttore (perfetto) e la giunzione è alimentata attraverso la porta S_1 da certe sorgenti esterne. Il campo che si ha in questa situazione è indicato da $\mathbf{E}^a$, $\mathbf{H}^a$. I campi trasversi sulle porte sono:

$$\mathbf{E}^a_{T1} = V^a_1 \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{H}^a_{T1} = I^a_1 \mathbf{h}_1 \qquad \mathbf{E}^a_{T2} = 0 \qquad \mathbf{H}^a_{T2} = I^a_2 \mathbf{h}_2 \tag{5.3}$$

Inoltre, per la (5.2*b*) si ha:

$$I^a_2 = y_{21} V^a_1 \tag{5.4}$$

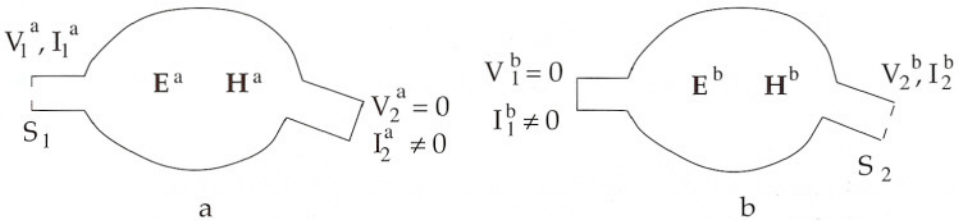



Figura 5.2

1 La matrice è simmetrica anche nel caso in cui dentro la giunzione si hanno materiali anisotropi, purché con tensori di permeabilità simmetrici. In alcuni componenti a microonde le limitazioni derivanti dalla simmetria della matrice d'ammettenza vengono deliberatamente evitate includendo nella giunzione materiali giromagnetici (ferriti magnetizzate), per i quali non vale il teorema di reciprocità.

Nella Figura 5.2*b* la porta S_1 è chiusa da un piano conduttore e la giunzione è alimentata attraverso la porta S_2. Il campo che si ha in questa situazione è indicato da $\mathbf{E}^b$, $\mathbf{H}^b$. I campi trasversi sulle porte sono:

$$\mathbf{E}_{T1}^b = 0 \qquad \mathbf{H}_{T1}^b = I_1^b \mathbf{h}_1 \qquad \mathbf{E}_{T2}^b = V_2^b \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{H}_{T2}^b = I_2^b \mathbf{h}_2 \tag{5.5}$$

Inoltre per la (5.2*a*) si ha:

$$I_1^b = y_{12} V_2^b \tag{5.6}$$

In entrambe le situazioni sulla parete conduttrice vale la condizione di Leontovic. Pertanto:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a = R_s (1+j) \mathbf{H}_t^a \qquad \mathbf{n} \times \mathbf{E}^b = R_s (1+j) \mathbf{H}_t^b \tag{5.7}$$

Per il teorema di reciprocità si ha:

$$\int_{S_1} \mathbf{E}_{T1}^a \times \mathbf{H}_{T1}^b \cdot (-\mathbf{u}_1) dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{E}_{T2}^a \times \mathbf{H}_{T2}^b \cdot (-\mathbf{u}_2) dS_2 + \int_{S_c} \mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{n} dS_c =$$

$$\int_{S_1} \mathbf{E}_{T1}^b \times \mathbf{H}_{T1}^a \cdot (-\mathbf{u}_1) dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{E}_{T2}^b \times \mathbf{H}_{T2}^a \cdot (-\mathbf{u}_2) dS_2 + \int_{S_c} \mathbf{E}^b \times \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{n} dS_c$$

dove S_c indica la parete conduttrice. Tenendo conto delle (5.3) e (5.5) e ricordando la (7.3) del capitolo precedente si ha:

$$-V_1^a I_1^b + \int_{S_c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{H}_t^b \, dS_c = -V_2^b I_2^a + \int_{S_c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{H}_t^a \, dS_c$$

I due integrali si elidono perché gli integrandi sono uguali a causa delle (5.7). Pertanto, tenendo conto delle (5.4) e (5.6) risulta:

$$-V_1^a y_{12} V_2^b = -V_2^b y_{21} V_1^a \qquad \text{ovvero} \qquad y_{12} = y_{21}$$

Dunque la matrice d'ammettenza è simmetrica. ■

4.6 Campo generato da sorgenti agenti in una guida d'onda

Si vuole determinare il campo **E**, **H** generato in una guida da una sorgente elettrica localizzata in un volume V_0 (Figura 6.1). La guida è adattata a destra ed è delimitata a sinistra da un piano conduttore posto sulla sezione trasversale di ascissa $z = 0$. Il campo deve essere determinato solo nella regione alla destra della sorgente ($z > d$). A questo scopo basta trovare le tensioni modali dei modi TM e TE (indicate da V'_i e V''_i rispettivamente). Poiché la guida è adattata a destra, nella regione considerata le correnti sono date da

$$I'_i = V'_i / Z'_i \qquad I''_i = V''_i / Z''_i \tag{6.1}$$

Figura 6.1

Le tensioni modali possono essere determinate applicando il teorema di reciprocità al tronco di guida compreso fra la sezione cortocircuitata (z = 0) e un generica sezione trasversale S di ascissa $z > d$. Per determinare V'_i il teorema di reciprocità viene applicato al campo **E** , **H** (Figura 6.2*a*) e al campo:

$$\mathbf{E}'_i = -\mathbf{e}'_i \sinh\gamma'_i z + j\frac{\eta\kappa'_i}{k Z'_i}\psi_i \cosh\gamma'_i z\,\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{H}'_i = \frac{1}{Z'_i}\mathbf{h}'_i \cosh\gamma'_i z \qquad (6.2)$$

Questo secondo campo è prodotto da opportune sorgenti $\mathbf{J}'_0$ (che non importa specificare) poste al di là della sezione S, che eccitano nella regione considerata solo l'i-esimo modo TM (Figura 6.2*b*). La forma delle (6.2) tiene conto della presenza del piano di cortocircuito.

■ Infatti (vedi Equazioni 2.20*a*, Capitolo 3) il campo modale del'i-esimo modo TM ha la forma

$$\mathbf{E}'_i = v'_i\,\mathbf{e}'_i + j\frac{\eta\kappa'_i}{k} i'_i\,\psi_i\,\mathbf{u}_z \qquad \mathbf{H}'_i = i'_i\,\mathbf{h}'_i$$

dove

$$v'_i = v'^{+}_i\,e^{-\gamma'_i z} + v'^{-}_i\,e^{\gamma'_i z} \qquad i'_i = \frac{v'^{+}_i}{Z'_i}e^{-\gamma'_i z} - \frac{v'^{-}_i}{Z'_i}e^{\gamma'_i z}$$

(v'^{+}_i e v'^{-}_i sono costanti da precisare). A causa della presenza del piano conduttore (che per semplicità viene considerato perfetto) v'_i deve annullarsi in z = 0; pertanto deve aversi $v'^{-}_i = -v'^{+}_i$ e quindi:

$$v'_i = -2v'^{+}_i \sinh\gamma'_i z \qquad i'_i = \frac{2v'^{+}_i}{Z'_i}\cosh\gamma'_i z$$

Supponendo che le sorgenti di $\mathbf{E}'_i$ e $\mathbf{H}'_i$ siano tali da avere $v'^{+}_i = 1/2$, si hanno le espressioni (6.2). ■

Figura 6.2

Applicando il teorema di reciprocità e osservando che gli integrali sulle pareti metalliche sono nulli (sia **E** che $\mathbf{E}'_i$ sono perpendicolari ad esse), si ha:

$$\int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}'_i \cdot \mathbf{u}_z \, dS = \int_S \mathbf{E}'_i \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_z \, dS + \int_{V_0} \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV_0$$

dove $\mathbf{J}_0$ è la densità delle correnti impresse agenti nel volume V_0. Introducendo le (6.2) negli integrali di superficie si ottiene:

$$\frac{1}{Z'_i} \cosh \gamma'_i z \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{u}_z \, dS =$$

$$- \sinh \gamma'_i z \int_S \mathbf{e}'_i \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_z \, dS + \int_{V_0} \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV_0 \qquad (6.3)$$

D'altro canto (vedi Equazione 12.1, Capitolo 3) si ha:

$$\int_S \mathbf{E} \times \mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{u}_z \, dS = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}'_i \times \mathbf{u}_z \, dS = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}'_i \, dS = \int_S \mathbf{E}_T \cdot \mathbf{e}'_i \, dS = V'_i$$

$$\int_S \mathbf{e}'_i \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_z \, dS = \int_S \mathbf{u}_z \times \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{H} \, dS = \int_S \mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{H} \, dS = \int_S \mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{H}_T \, dS = I'_i = \frac{V'_i}{Z'_i}$$

Sostituendo nella (6.3) si ottiene:

$$\frac{1}{Z'_i} (\cosh \gamma'_i z + \sinh \gamma'_i z) \; V'_i = \int_{V_0} \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV_0$$

Poiché $\cosh \gamma'_i z + \sinh \gamma'_i z = e^{\gamma'_i z}$ si trova la seguente espressione della tensione per i modi TM:

$$V'_i = Z'_i \left(\int_{V_0} \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV_0 \right) e^{-\gamma'_i z} \qquad (z > d) \qquad (6.4)$$

Le tensioni dei modi TE vengono ricavate in modo analogo. Si trova:

$$V''_i = Z''_i \left(\int_{V_0} \mathbf{E}''_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV_0 \right) e^{-\gamma''_i z} \qquad (z > d) \tag{6.5}$$

dove:

$$\mathbf{E}''_i = -\mathbf{e}''_i \sinh\gamma''_i z$$

$$\mathbf{H}''_i = \frac{1}{Z''_i} \mathbf{h}''_i \cosh\gamma''_i z - j\frac{\kappa''_i}{\eta k} \varphi_i \sinh\gamma''_i z \, \mathbf{u}_z \tag{6.6}$$

Poiché il vettore $\mathbf{E}''_i$ è trasversale, una corrente elettrica longitudinale genera solo modi TM. Invece una corrente trasversale genera modi di tutti i tipi. Naturalmente se nella guida si può propagare il solo modo dominante, tutti i modi superiori rimangono localizzati in prossimità della sorgente.

Calcoli analoghi permettono di ricavare le tensioni modali generate da una corrente magnetica di densità $\mathbf{M}_0$, localizzata nel volume V_0. Si ottiene:

$$V'_i = -Z'_i \left(\int_{V_0} \mathbf{H}'_i \cdot \mathbf{M}_0 \, dV_0 \right) e^{-\gamma'_i z} \qquad (z > d) \tag{6.7a}$$

$$V''_i = -Z''_i \left(\int_{V_0} \mathbf{H}''_i \cdot \mathbf{M}_0 \, dV_0 \right) e^{-\gamma''_i z} \qquad (z > d) \tag{6.7b}$$

ESEMPIO 1: Si vuole trovare la potenza che arriva sul carico nel caso di una guida rettangolare eccitata da un filamento di corrente posizionato come in Figura 6.3. L'intensità I_0 della corrente è indipendente da y. Si suppone che alla frequenza di lavoro si possa propagare il solo modo TE_{10} e che la guida sia senza perdite.
La potenza erogata al carico è

$$P = \frac{|V''_{10}|^2}{2\eta\lambda_g/\lambda}$$

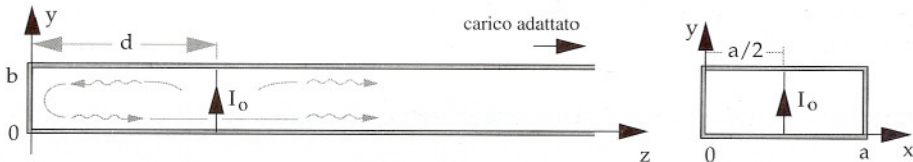



Figura 6.3

dove λ_g è la lunghezza d'onda del modo TE_{10}. In base alle (6.5) e (6.6) si ha:

$$V''_{10} = -j\eta\frac{\lambda_g}{\lambda}\left(\int_{V_0} \mathbf{e}''_{10} \cdot \mathbf{J}_0 \sin\frac{2\pi z}{\lambda_g} dV_0\right) e^{-j2\pi z/\lambda_g} \qquad (z > d)$$

dove (vedi Tabella 4.1 del Capitolo 3):

$$\mathbf{e}''_{10} = -\mathbf{u}_y \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin(\pi x/a)$$

Si lascia al lettore di verificare che, purché le dimensioni trasversali del filamento siano molto minori di a, risulta:

$$V''_{10} = j\eta I_0 \frac{\lambda_g}{\lambda}\sqrt{\frac{2b}{a}} \sin\frac{2\pi d}{\lambda_g} e^{-j2\pi z/\lambda_g} \qquad (z > d)$$

$$P = \eta |I_0|^2 \frac{b}{a}\frac{\lambda_g}{\lambda} \sin^2\frac{2\pi d}{\lambda_g}$$

Si noti che la potenza sul carico si annulla quando $d = n\lambda_g/2$ $(n = 0, 1, ...)$ mentre è massima quando $d = (2n + 1)\lambda_g/4$.
Questo fenomeno trova una spiegazione intuitiva nell'interferenza fra l'onda che il filamento emette verso destra e quella che, emessa verso sinistra, viene riflessa a destra dal piano conduttore (vedi Figura 6.3).

ESEMPIO 2: Si desidera determinare la tensione modale del modo TE_{10} in una guida rettangolare eccitata attraverso un foro S_0 praticato sulla parete stretta (Figura 6.4*a*). Si suppone: a) che sia noto il campo elettrico $\mathbf{E}_0$ tangenziale al foro; b) che le dimensioni del foro siano piccole rispetto a λ_g.

Secondo la prima delle equivalenze illustrate nella Figura 3.2 il campo nella guida può essere determinato immaginando di chiudere il foro con una parete elettrica e di porre immediatamente all'interno della guida una lamina di corrente magnetica di densità:

$$\mathbf{M}_s = -\mathbf{u}_x \times \mathbf{E}_0$$

Il problema si riduce a quello della determinazione del campo generato da una sorgente magnetica interna alla guida, in assenza del foro (Figura 6.4*b*). Pertanto la tensione modale del modo TE_{10} può essere determinata usando la (6.7*b*).
Naturalmente, poiché la corrente è concentrata sulla superficie S_0, l'integrale di volume deve essere sostituito da un integrale esteso alla superficie S_0. Si ottiene:

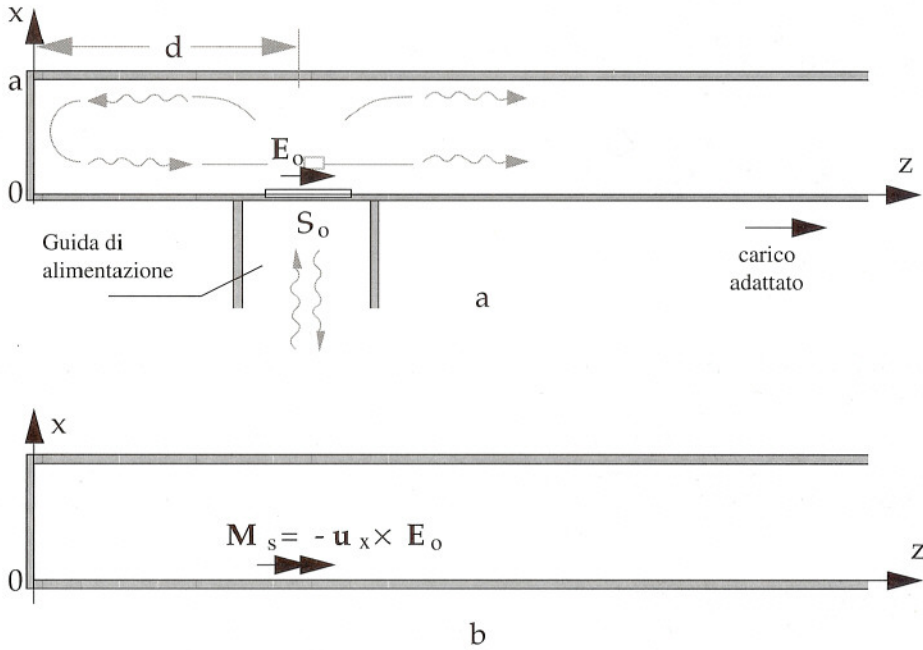



Figura 6.4

$$V''_{10} = -\eta \frac{\lambda_g}{\lambda} \left(\int_{S_0} \mathbf{H}''_{10} \cdot \mathbf{M}_s \, dS_0 \right) e^{-j2\pi z/\lambda_g}$$

Sulla parete laterale della guida (x = 0) si ha (vedi Tabella 4.1 del Capitolo 3):

$$\mathbf{h}''_{10} = 0 \qquad \varphi_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}}$$

Inoltre $\kappa''_i / k = \lambda / 2a$.
Pertanto su S_0 risulta:

$$\mathbf{H}''_{10} = \frac{1}{\eta} \frac{\lambda}{2a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{2\pi z}{\lambda_g} \mathbf{u}_z \approx \frac{1}{\eta} \frac{\lambda}{2a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{2\pi d}{\lambda_g} \mathbf{u}_z$$

Pertanto:

$$V''_{10} = \frac{\lambda_g}{2a}\sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\frac{2\pi d}{\lambda_g} m_z e^{-j2\pi z/\lambda_g}$$

dove:

$$m_z = -\int_{S_0} M_{sz}\, dS_0 = \int_{S_0} E_{0y}\, dS_0$$

5

Le linee come elementi circuitali

Molto spesso i circuiti ad alta frequenza includono linee di trasmissione connesse ad altri componenti più convenzionali (resistori, bobine, condensatori, trasformatori, transistori, ecc.). Nelle linee si propaga il solo modo dominante, per il quale le tensioni e le correnti sono definite come in tutti gli altri componenti circuitali (vedi Capitolo 3). Le relazioni esistenti fra le tensioni, le correnti e le impedenze all'ingresso e all'uscita caratterizzano le proprietà circuitali delle linee. Poiché le linee hanno lunghezze paragonabili o superiori alla lunghezza d'onda, la propagazione delle onde di tensione e di corrente ha grande influenza sulle proprietà circuitali. Lo studio di queste proprietà è l'argomento centrale di questo capitolo.

Nelle linee schermate contenenti un solo dielettrico il modo dominante è il modo TEM. Questo modo è stato trattato nel Capitolo 3, dove sono state determinate le espressioni generali delle onde di tensione e di corrente. Nulla invece è stato detto riguardo alle linee non schermate e/o contenenti più di un dielettrico, che pure sono usate nei circuiti, soprattutto a frequenze non troppo elevate. Per questa ragione il capitolo inizia con l'esposizione della cosiddetta "teoria elementare delle linee", che permette di trattare in maniera approssimata ma semplice anche questi tipi di linea. La teoria elementare mostra che, anche in queste linee, considerate a frequenze non troppo elevate, il modo dominante ha proprietà analoghe a quelle del modo TEM. Grazie a questo risultato, lo studio delle proprietà circuitali delle linee può essere svolto in modo unitario, senza distinguere fra i vari tipi di linea.

5.1 Teoria elementare delle linee di trasmissione

È possibile studiare la propagazione nelle linee di trasmissione in modo elementare, utilizzando concetti mutuati dalla teoria dei circuiti. È opportuno considerare la teoria elementare per tre ragioni: a) alcuni testi applicativi fanno riferimento ad essa; b) il paragone dei risultati di questa teoria con quelli già trovati nel Capitolo 3 mette in evidenza i limiti dei concetti circuitali nelle applicazioni ad alta frequenza; c) i risultati della teoria elementare valgono anche per le linee aperte (come la linea bifilare di Figura 1.1*a*) e/o contenenti più dielettrici (come la linea a microstriscia di Figura 1.1*b*), almeno come approssimazioni a frequenze non troppo elevate. Per semplicità si farà riferimento alle linee costituite da due soli conduttori.

Si supponga di alimentare in corrente continua un carico attraverso una linea, ad esempio del tipo bifilare. Come indicato nella Figura 1.2, intorno alla linea si ha un campo stazionario, in cui sia **E** che **H** sono trasversali. Sugli elementi di conduttore compresi fra le sezioni

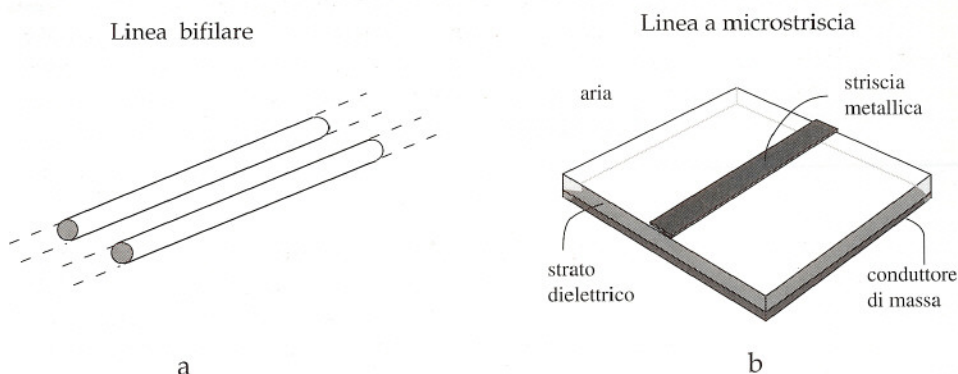



Figura 1.1

trasversali di ascissa z e z + dz (vedi figura) si hanno due cariche opposte, dq e –dq, date da

$$dq = V\,(Cdz) \tag{1.1}$$

dove V è la tensione e C rappresenta la capacità della linea, riferita all'unità di lunghezza [F/m]. Inoltre la superficie ABCD indicata in figura è attraversata dal flusso d'induzione

$$d\Phi = I\,(L\,dz) \tag{1.2}$$

dove I è la corrente ed L rappresenta l'induttanza per unità di lunghezza [H/m]. Se i conduttori sono perfetti e se la conducibilità del dielettrico è nulla V e I sono costanti su tutta la linea. In caso contrario V e I dipendono da z: infatti la tensione cambia a causa della resistenza dei

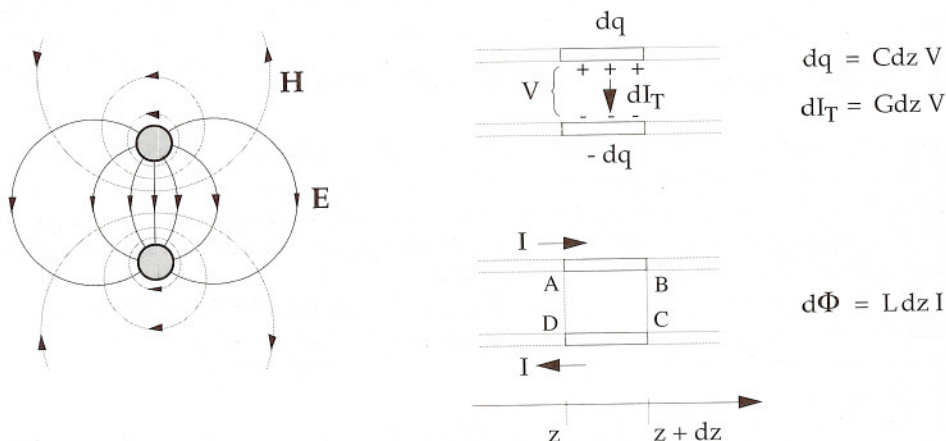



Figura 1.2

conduttori e la corrente varia perché una parte sfugge dai conduttori a causa dell'imperfetto isolamento. Per la legge di Ohm la densità della corrente di conduzione dovuta all'imperfetto isolamento è proporzionale al campo elettrico. Pertanto la corrente dI_T che fluisce fra i due elementi conduttori considerati in precedenza è proporzionale alla tensione ed è data da un'espressione del tipo

$$dI_T = V\,(G dz) \tag{1.3}$$

dove G rappresenta la conduttanza trasversale della linea, riferita all'unità di lunghezza [S/m]. I valori di C, L e G dipendono dalla forma e dalle dimensioni della linea, oltre che dalle caratteristiche del mezzo interposto fra i conduttori. Tali valori possono essere dedotti teoricamente attraverso lo studio del campo stazionario ovvero - più semplicemente - possono essere misurati.

Se la linea viene alimentata alla pulsazione ω, e se si assume che *nell'ambito di ciascuna sezione trasversale la conformazione del campo si mantenga uguale a quella che si ha nel caso stazionario,* le formule (1.1), (1.2) e (1.3) rimangono valide. Applicando la legge di Faraday-Neumann alla linea ABCD e la legge di conservazione della carica all'elemento conduttore AB, si ha:

$$(E_z)_A\,dz + V(z + dz) - (E_z)_D\,dz - V(z) = -j\omega\,d\Phi = -j\omega\,I(z)\,(L\,dz) \tag{1.4a}$$

$$I(z + dz) - I(z) = -j\omega\,dq - dI_T = -(G + j\omega C)\,V(z)\,dz \tag{1.4b}$$

dove $(E_z)_A$ e $(E_z)_D$ indicano i campi elettrici assiali nei punti A e D. Se la frequenza è tanto elevata da poter assumere che nei conduttori l'effetto pelle sia spinto, si ha:

$$(E_z)_A = (1 + j)\,R_s\,(J_{sz})_A \qquad (E_z)_D = (1 + j)\,R_s\,(J_{sz})_D$$

dove $(J_{sz})_A$ e $(J_{sz})_D$ sono le densità della corrente superficiale nei punti A e D (più precisamente le componenti assiali, che sono le uniche esistenti). In corrispondenza della sezione z il campo magnetico sulla superficie dei conduttori (e quindi la densità di corrente) varia in ampiezza ma non in fase. Ne consegue che le fasi di $(J_{sz})_A$ e di $(J_{sz})_D$ sono identiche a quelle di I e di - I rispettivamente, mentre le ampiezze sono proporzionali a $|I|$. Pertanto si può scrivere

$$(J_{sz})_A = K_A\,I \qquad (J_{sz})_D = -K_D\,I$$

dove K_A e K_D sono opportuni coefficienti reali positivi, dipendenti dall'andamento del campo magnetico sulla superficie dei conduttori (quindi, dalla conformazione della linea). Si ha dunque:

$$(E_z)_A\,dz = (1 + j)\,R_s K_A I\,dz \qquad (E_z)_D\,dz = -(1 + j)\,R_s K_D I\,dz$$

Sostituendo nella (1.4*a*) si ottiene:

$$V(z + dz) - V(z) = -[R + j(R + \omega L)]\,I(z)\,dz$$

dove

$$R = R_s (K_A + K_D)$$

A causa dell'elevata conducibilità dei conduttori R è molto minore di ωL; pertanto si può scrivere:

$$V(z + dz) - V(z) \approx -[R + j\omega L]\, I(z)\, dz \tag{1.5}$$

La caduta di tensione in fase con la corrente dipende da R. Quindi R rappresenta la resistenza della linea, riferita all'unità di lunghezza [Ω/m].[1]

È facile verificare che, a meno di un infinitesimo dell'ordine di dz^2 la (1.4*b*) e la (1.5) sono le equazioni del quadripolo indicato nella Figura 1.3*a*. Quindi l'intera linea può essere vista come un insieme di infiniti quadripoli elementari di questo tipo connessi in cascata (Figura 1.3*b*). Ciascun quadripolo è costituito da un'impedenza longitudinale $(R + j\omega L)dz$ e da un ammettenza trasversale $(G + j\omega C)dz$. L'impedenza e l'ammettenza sono infinitesime e sono distribuite lungo tutta la linea. Un circuito di questo genere viene detto "a costanti distribuite".

Dalle (1.5) e (1.4*b*), dividendo per dz, si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{dV}{dz} = -(R + j\omega L)I \qquad \frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)V \tag{1.6}$$

Nel caso della linea senza perdite (R = 0, G = 0), differenziando la prima equazione ed eliminando dI/dz mediante la seconda, si ottiene:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + \beta^2 V = 0 \tag{1.7}$$

dove

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \tag{1.8}$$

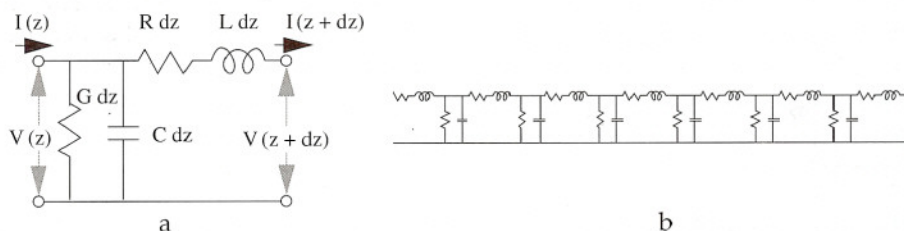



Figura 1.3

1 La resistenza cresce con la frequenza perchè è proporzionale a R_s.

Risolvendo la (1.7) si ottiene la solita espressione:

$$V = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \qquad (V_0^+,\ V_0^- = \text{costanti arbitrarie})$$

Inoltre, sostituendo nella prima delle (1.6) si trova:

$$I = \frac{V_0^+}{Z^0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z^0} e^{j\beta z}$$

dove

$$Z^0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{1.9}$$

Si vede che le onde di tensione e di corrente si propagano con la velocità

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.10}$$

Se si considerano le perdite si trovano onde che si attenuano (lo studio di questo caso viene omesso per brevità). Nell'ipotesi $R << \omega L$ e $G << \omega C$ (linea a basse perdite) si trova che le formule (1.8) (1.9) e (1.10) continuano ad essere valide approssimativamente e che la costante di attenuazione è data da:

$$\alpha \approx \frac{R/Z^0 + GZ^0}{2} \qquad (R << \omega L,\ G << \omega C) \tag{1.11}$$

Le espressioni della tensione e della corrente sono analoghe a quelle trovate nel Capitolo 3 per il modo TEM delle linee schermate contenenti un solo dielettrico. Però l'impedenza caratteristica e la velocità di fase sono espresse in funzione delle grandezze circuitali L e C, invece che - direttamente - in funzione delle quantità fisico-geometriche che caratterizzano la linea. In effetti, nel caso delle linee schermate con un solo dielettrico, i risultati della teoria elementare coincidono con quelli ottenuti nel Capitolo 3. Ad esempio, nel caso del cavo coassiale, la capacità e l'induttanza per unità di lunghezza sono rispettivamente

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon'}{\ln (R_e/R_i)} \qquad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln (R_e/R_i)$$

e quindi, usando (1.9) e (1.10) si ottiene

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'}} \qquad Z^0 = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon'}} \ln\frac{R_e}{R_i}$$

proprio come nel Capitolo 3. A posteriori si comprende che i risultati sono identici perché - nel modo TEM - l'andamento del campo sulle sezioni trasversali coincide con l'andamento del campo stazionario, in accordo con l'ipotesi che sta alla base della teoria elementare. Naturalmente, poiché la coincidenza si ha solo per il modo TEM, la teoria elementare delle linee non permette di evidenziare l'esistenza dei modi TE e TM.

Come si è già detto, la teoria elementare non presuppone né che la linea sia schermata né che il dielettrico sia omogeneo. Essa presuppone solo che l'andamento del campo su ciascuna sezione trasversale sia uguale (o almeno molto prossimo) a quello del campo stazionario. Poiché questa ipotesi è certamente verificata a frequenze sufficientemente basse, la teoria elementare permette di affermare che in ogni linea - a frequenze non troppo elevate - la tensione e la corrente sono costituite da onde che si propagano con velocità di fase indipendente dalla frequenza (Equazione 1.10), e che le onde di tensione e di corrente sono collegate da un'impedenza caratteristica reale, pure indipendente dalla frequenza (Equazione 1.9).

Sia le linee aperte con dielettrico omogeneo che quelle aperte o schermate, ma con dielettrico inomogeneo, possono essere studiate in maniera rigorosa, senza fare alcuna ipotesi preliminare circa l'andamento dei campi. Tale studio è però molto più complicato di quello visto nel Capitolo 3.

Nel caso delle linee aperte con dielettrico omogeneo la teoria elettromagnetica mostra che, oltre al modo TEM (che ha proprietà identiche a quelle viste nel Capitolo 3), esistono altre soluzioni delle equazioni di Maxwell, che comportano trasporto di energia anche in direzione trasversale alla linea (modi radianti). Per la presenza di questi modi le linee in questione possono essere utilizzate per trasmettere energia solo a bassa frequenza (ad esempio linee aeree a frequenza industriale), perché a bassa frequenza le perdite di energia dovute ai modi radianti sono irrilevanti.

(da E. J. Denlinger, "A Frequency Dependent Solution for Microstrip Transmission Lines", IEEE Trans. on Microwave Theory & Techniques, Jan. 1971, p. 30)

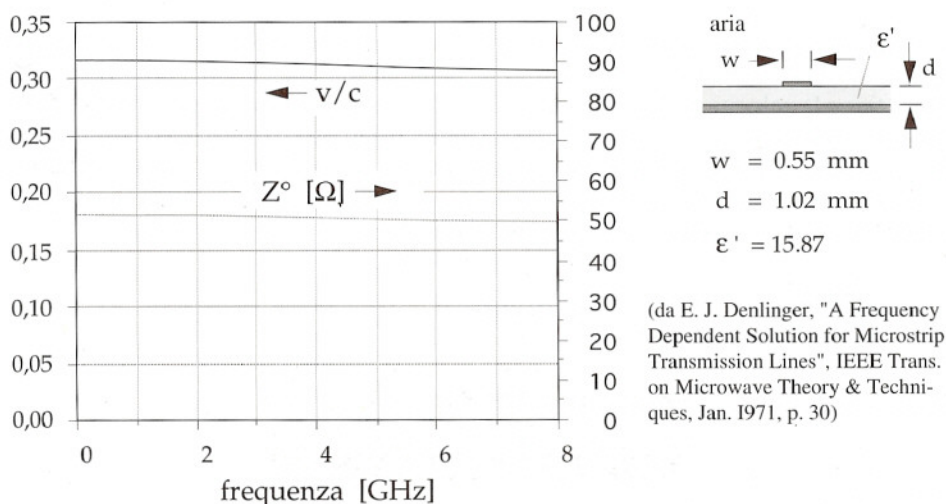



Figura 1.4

Nel caso delle linee con dielettrico inomogeneo la teoria elettromagnetica mostra che il modo TEM non esiste. Si trova che anche in queste linee il modo dominante si può propagare a frequenze comunque basse e che tale modo è tanto più prossimo ad un modo TEM quanto minore è la frequenza (modo "quasi-TEM"). È chiaro che, nel caso di queste linee, i risultati della teoria elementare riguardano proprio le onde di tensione e di corrente del modo quasi-TEM, considerato a frequenze tanto basse da rendere ammissibile l'ipotesi sull'andamento quasi-statico del campo. Per meglio apprezzare il livello di precisione dei risultati della teoria elementare, si riportano in Figura 1.4 gli andamenti effettivi della velocità di fase e dell'impedenza caratteristica di una linea a microstriscia al variare della frequenza, così come risultano da una trattazione rigorosa. In accordo con le previsioni della teoria elementare, la velocità di fase e l'impedenza caratteristica sono pressoché costanti fino a qualche gigahertz.

■ Nella microstriscia considerata in Figura 1.4 la velocità di fase è $v \approx 0.3c$; essa ha un valore intermedio fra quelli che si avrebbero se lo spazio intorno ai conduttori fosse completamente riempito dall'aria ($v = c$) o dal dielettrico del substrato ($v = c/\sqrt{\varepsilon'} = 0.251c$). Ciò dipende dal fatto che nella microstriscia la capacità ha un valore intermedio fra quelli che si avrebbero nei due casi suddetti, mentre l'induttanza è la stessa in tutti i casi. L'andamento del campo elettrico nella microstriscia è simile a quello schizzato nella Figura 1.5. ■

5.2 Impedenza, ammettenza, coefficiente di riflessione

La linea rappresentata nella Figura 2.1 è alimentata da sinistra ed è chiusa a destra su di un carico di impedenza Z_L. Nella linea, oltre all'onda che incide sul carico, è in genere presente anche l'onda riflessa. Pertanto la tensione e la corrente sono rappresentate da:

$$V = V^+ + V^- \qquad I = I^+ + I^- \tag{2.1}$$

dove :

$$V^+ = V_0^+ e^{-\gamma z} \qquad I^+ = V^+/Z^0 \tag{2.2a}$$

$$V^- = V_0^- e^{\gamma z} \qquad I^- = -V^-/Z^0 \tag{2.2b}$$

$(\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j2\pi/\lambda;\ V_0^+ \text{ e } V_0^- \text{ costanti})$

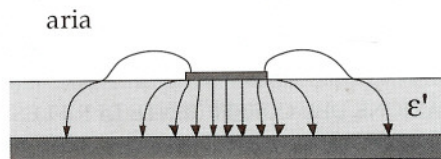



Figura 1.5

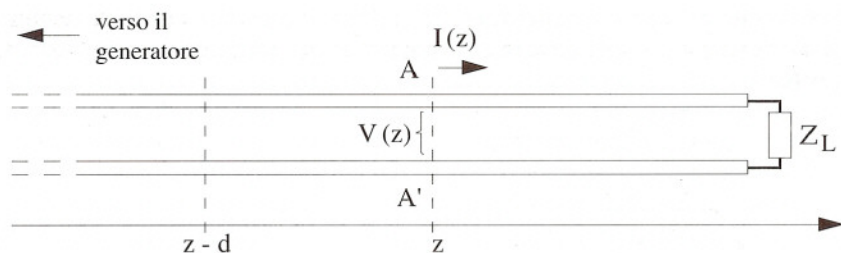



Figura 2.1

Il coefficiente di riflessione, l'impedenza e l'ammettenza in una generica sezione sono definiti dalle espressioni:

$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} \tag{2.3}$$

$$Z = R + jX = \frac{V}{I} \tag{2.4}$$

$$Y = G + jB = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} \tag{2.5}$$

(R, X, G e B rappresentano la resistenza, la reattanza, la conduttanza e la suscettanza viste nella sezione considerata, guardando verso il carico). Poiché V, I, V^+ e V^- dipendono dalla sezione considerata, Γ, Z e Y sono funzioni di z.

In ogni sezione della linea valgono le seguenti relazioni:

$$Z = Z^0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{2.6a}$$

$$Y = Y^0 \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \tag{2.6b}$$

$$\Gamma = \frac{Z - Z^0}{Z + Z^0} \tag{2.6c}$$

$$\Gamma = -\frac{Y - Y^0}{Y + Y^0} \tag{2.6d}$$

FORMULE DI TRASFORMAZIONE DEL COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE, DELL'IMPEDENZA E DELL'AMMETTENZA Le precedenti espressioni sono analoghe a quelle incontrate nello studio delle onde piane uniformi (vedi Paragrafo 10 del Capitolo 2): il campo elettrico è sostituito dalla tensione, il campo magnetico dalla corrente, l'impedenza caratteristica del mezzo dall'impedenza caratteristica della linea, l'impedenza d'onda dall'impedenza intesa

in senso circuitale. Pertanto, passando dalla sezione di ascissa z a un'altra sezione spostata di d verso il generatore (vedi Figura 2.1), analogamente a quanto visto nel caso delle onde piane, si ha:

$$\Gamma(z-d)=\Gamma(z)e^{-2\alpha d}\,e^{-j4\pi d/\lambda} \tag{2.7}$$

$$Z(z-d)=Z^0\,\frac{Z(z)+Z^0\,\mathrm{tgh}\gamma d}{Z^0+Z(z)\,\mathrm{tgh}\gamma d} \tag{2.8}$$

Inoltre:

$$Y(z-d)=Y^0\,\frac{Y(z)+Y^0\,\mathrm{tgh}\gamma d}{Y^0+Y(z)\,\mathrm{tgh}\gamma d} \tag{2.9}$$

Al variare di d il coefficiente di riflessione descrive sul piano complesso una spirale logaritmica ovvero - se la linea è senza perdite - una circonferenza (vedi Capitolo 2, Figura 10.2).

RELAZIONI FRA I COEFFICIENTI DI RIFLESSIONE, LE IMPEDENZE E LE AMMETTENZE ALL'INGRESSO E ALL'USCITA Siano Z_L e Y_L l'impedenza e l'ammettenza del carico. Ai terminali d'uscita della linea si ha $Z = Z_L$, $Y = Y_L$; quindi, per le (2.6*c*, *d*), il coefficiente di riflessione all'uscita è:

$$\Gamma_L=\frac{Z_L-Z^0}{Z_L+Z^0}=-\frac{Y_L-Y^0}{Y_L+Y^0} \tag{2.10}$$

Se la linea ha lunghezza d (Figura 2.2), per le (2.7), (2.8) e (2.9) il coefficiente di riflessione, l'impedenza e l'ammettenza all'ingresso sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\Gamma_I=\Gamma_L\,e^{-2\gamma d}=\Gamma_L\,e^{-2\alpha d}\,e^{-j4\pi d/\lambda} \tag{2.11a}$$

$$Z_I=Z^0\,\frac{Z_L+Z^0\,\mathrm{tgh}\gamma d}{Z^0+Z_L\,\mathrm{tgh}\gamma d} \tag{2.11b}$$

$$Y_I=Y^0\,\frac{Y_L+Y^0\,\mathrm{tgh}\gamma d}{Y^0+Y_L\,\mathrm{tgh}\gamma d} \tag{2.11c}$$

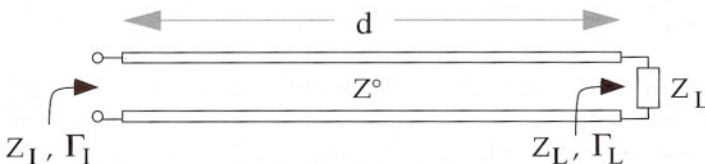



Figura 2.2

La (2.11*b*) mostra che la linea trasforma l'impedenza (ammettenza) di carico in un'impedenza (ammettenza) generalmente diversa, che dipende dalla lunghezza d e dalla frequenza attraverso il prodotto γd.

POTENZA La potenza attiva che attraversa nel verso positivo una generica sezione trasversale della linea è:

$$P = \mathrm{Re}\frac{VI^*}{2} \tag{2.12}$$

Da questa espressione si ricavano facilmente le seguenti formule fra loro equivalenti:

$$P = \begin{cases} \dfrac{R|I|^2}{2} & (2.13a) \\ \dfrac{G|V|^2}{2} & (2.13b) \\ P_{inc}(1-|\Gamma|^2) & (2.13c) \end{cases}$$

Nell'ultima espressione P_{inc} rappresenta la potenza trasportata dall'onda incidente, che è data da

$$P_{inc} = \frac{V^+ I^{+*}}{2} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z^0} e^{-2\alpha z} \tag{2.14}$$

LINEE SENZA PERDITE In molti casi pratici il prodotto αd è molto piccolo (ad esempio: $\alpha_{db} d < 0.1$ db) e le perdite possono essere trascurate. In questo caso le formule di trasformazione si semplificano perché si pone

$$\alpha = 0 \qquad \gamma = j2\pi/\lambda \qquad \mathrm{tgh}\gamma d = j\,\mathrm{tg}2\pi/\lambda.$$

Le formule di trasformazione per le linee senza perdite sono elencate nella Tabella 2.1.

Nelle linee senza perdite il modulo del coefficiente di riflessione è costante e si ha $|\Gamma| = |\Gamma_L|$. L'andamento dell'ampiezza della tensione e della corrente al variare di z è quello tipico dei diagrammi d'onda stazionaria indicati nella Figura 8.3 del Capitolo 3. Si definisce il rapporto d'onda stazionaria

$$\mathcal{R} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} \tag{2.15}$$

dove V_{max} e I_{max}, V_{min} e I_{min} sono le ampiezze massime e minime della tensione e della corrente lungo la linea. Si ha

Tabella 2.1 Trasformazione del coefficiente di riflessione, dell'impedenza e dell'ammettenza in una linea senza perdite

$\Gamma(z-d) = \Gamma(z)e^{-j4\pi d/\lambda}$	$\Gamma_I = \Gamma_L\, e^{-j4\pi d/\lambda}$
$Z(z-d) = Z^0 \dfrac{Z(z) + jZ^0 \operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}{Z^0 + jZ(z)\operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}$	$Z_I = Z^0 \dfrac{Z_L + jZ^0 \operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}{Z^0 + jZ_L \operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}$
$Y(z-d) = Y^0 \dfrac{Y(z) + jY^0 \operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}{Y^0 + jY(z)\operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}$	$Y_I = Y^0 \dfrac{Y_L + jY^0 \operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}{Y^0 + jY_L \operatorname{tg}\frac{2\pi d}{\lambda}}$
d = spostamento verso il generatore (Figura 2.1)	d = lunghezza della linea (Figura 2.2)

$$|\Gamma| = |\Gamma_L| = \frac{\mathcal{R} - 1}{\mathcal{R} + 1} \tag{2.16}$$

Inoltre, analogamente a quanto visto nel Capitolo 2 (vedi Equazione 10.12), l'impedenza è reale nelle sezioni di massima e di minima tensione; in tali sezioni l'impedenza assume il valore massimo (R_{max}) e il valore minimo (R_{min}) rispettivamente e si ha:

$$R_{max} = Z^0\,\mathcal{R} \qquad R_{min} = Z^0/\mathcal{R} \tag{2.17}$$

È ovvio che nelle linee senza perdite tutte le sezioni sono attraversate dalla stessa potenza P. Tale potenza uguaglia quella all'ingresso (P_I) e quella assorbita dal carico (P_L). Per la (2.14) e la (2.13*c*) si ha:

$$P_{inc} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z^0} \tag{2.18}$$

$$P = P_I = P_L = \frac{|V_0^+|^2}{2Z^0}(1 - |\Gamma_L|^2) \tag{2.19}$$

La potenza può anche essere messa in relazione con l'ampiezza massima della tensione (V_{max}) o dalla corrente ($I_{max} = V_{max}/Z^0$). Si ha infatti:

$$V_{max} = |V_0^+|\,(1 + |\Gamma_L|) \qquad |V_0^+| = V_{max}/(1 + |\Gamma_L|)$$

e quindi, sostituendo nella (2.19) e ricordando la (2.15), si ottiene:

$$P = \frac{V_{max}^2}{2Z^0 \mathcal{R}} = \frac{Z^0 I_{max}^2}{2\mathcal{R}} \tag{2.20}$$

Queste formule sono utili per valutare la massima potenza trasmissibile, per dato valore del R.O.S. prodotto dal carico. Infatti la potenza è limitata dalla tensione e dalla corrente massima raggiungibile (per evitare scariche e surriscaldamento,[1]) cosicché, per ogni linea i valori V_{max} e I_{max} non possono superare certi limiti, in genere tanto più elevati quanto maggiori sono le dimensioni trasversali della linea. Attraverso le precedenti relazioni tali limiti determinano la massima potenza trasmissibile. Si nota che, per data linea, la potenza trasmissibile è massima quando il rapporto d'onda stazionaria è minimo ($\mathcal{R}= 1$, linea adattata, vedi paragrafo successivo).

5.3 Casi di particolare interesse

LINEA ADATTATA La (2.6*c*) mostra che il coefficiente di riflessione si annulla se - e solo se - l'impedenza di carico è uguale all'impedenza caratteristica della linea (Figura 3.1). Quando non si ha riflessione si dice che la linea è "adattata". Dunque si ha:

condizione di adattamento: $Z_L = Z^0$

La tensione e la corrente hanno la forma:

$$V = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j2\pi z/\lambda} \qquad I = \frac{V_0^+}{Z^0} e^{-\alpha z} e^{-j2\pi z/\lambda} \tag{3.1}$$

Se la linea è senza perdite la tensione e la corrente hanno ovunque la stessa ampiezza ($\mathcal{R}= 1$).

In una linea adattata l'impedenza vista in una sezione qualsiasi è sempre uguale all'impedenza caratteristica. In particolare si ha:

$$Z_I = Z^0 \tag{3.2}$$

indipendentemente dalla lunghezza della linea e dalla frequenza.

1 Il surriscaldamento è dovuto alle perdite, che sono in realtà presenti anche se vengono ignorate in prima approssimazione. Esso dipende dalla potenza dissipata per unità di lunghezza che, in assenza di onda riflessa, è data dalla somma $W_c + W_d = 2\alpha P$ (vedi Equazione 11.3, Capitolo 3). Il surriscaldamento può essere ignorato nelle linee che trasmettono periodicamente brevi impulsi a radiofrequenza, quando la durata degli impulsi è una piccola frazione del loro periodo di ripetizione (come, ad esempio, nei radar). In questo caso, infatti, la potenza media dissipata (da cui dipende il surriscaldamento) è molto minore di quella dissipata durante gli impulsi, e il surriscaldamento è basso anche nel caso di elevati valori della potenza degli impulsi.

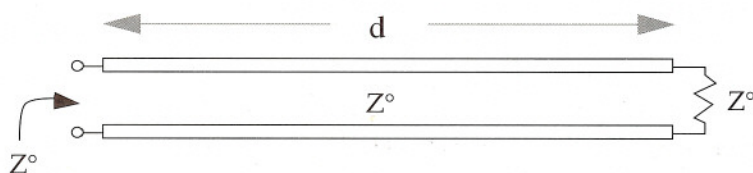



Figura 3.1

Poiché l'onda riflessa è assente si ha:

$$P = P_{inc} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z^0} e^{-2\alpha z}$$

Pertanto, in una linea adattata, le potenze all'ingresso e all'uscita sono collegate dalla semplice relazione:

$$P_L = P_I \, e^{-2\alpha d} \tag{3.3}$$

LINEA IN CORTOCIRCUITO In questo caso (Figura 3.2) si ha $Z_L = 0$ e quindi dalla (2.11*b*) si deduce:

$$Z_I = Z^0 \, \mathrm{tgh}\gamma d = Z^0 \frac{\sinh 2\alpha d + j \sin 4\pi d/\lambda}{\cosh 2\alpha d + \cos 4\pi d/\lambda} \tag{3.4}$$

Inoltre, poiché si ha $\Gamma_L = -1$, se si prende l'origine dell'asse z sulla sezione del cortocircuito risulta (vedi Equazione 2.2*a*, *b*):

$$V_0^- = \Gamma_L V_0^+ = -V_0^+$$

$$V(z) = -2V_0^+ \sinh \gamma z \qquad I(z) = 2\frac{V_0^+}{Z^0} \cosh \gamma z \tag{3.5}$$

Se la linea è senza perdite l'impedenza è reattiva:

$$Z_I = jX_I = jZ^0 \, \mathrm{tg} \frac{2\pi d}{\lambda} = jZ^0 \, \mathrm{tg} \frac{\omega d}{v} \tag{3.6}$$

L'andamento della reattanza al variare della frequenza è indicato nella Figura 3.2. Alle frequenze per cui d è uguale a un multiplo di mezza lunghezza d'onda l'impedenza

d'ingresso è nulla come in un circuito LC tipo serie alla risonanza. Invece, alla frequenza per cui d è uguale a un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda l'impedenza è infinita, come in un circuito LC tipo parallelo alla risonanza.[1]

Dalla (3.5), ponendo $\gamma = j2\pi/\lambda$, si deducono le espressioni della tensione e della corrente nel caso di una linea senza perdite:

$$V = -j2\, V_0^+ \sin\frac{2\pi z}{\lambda} \qquad I = 2\frac{V_0^+}{Z^0}\cos\frac{2\pi z}{\lambda} \tag{3.7}$$

L'andamento della tensione e della corrente è quello solito delle onde stazionarie pure (Figura 3.2). Il primo nodo della tensione si ha sul cortocircuito terminale, gli altri nodi si susseguono a distanza di mezza lunghezza d'onda. In corrispondenza dei nodi di tensione si hanno i massimi della corrente, mentre i nodi della corrente si hanno nelle stesse posizioni dei massimi della tensione. La posizione dei nodi cambia con la frequenza, e quindi, per certe frequenze, all'ingresso della linea si ha un nodo di tensione o di corrente. Queste frequenze sono quelle per cui l'impedenza d'ingresso si annulla o diverge.

La potenza trasmessa in una linea senza perdite cortocircuitata è nulla perché la tensione e la corrente sono in quadratura; questo risultato era prevedibile perché né la linea né il carico assorbono energia.

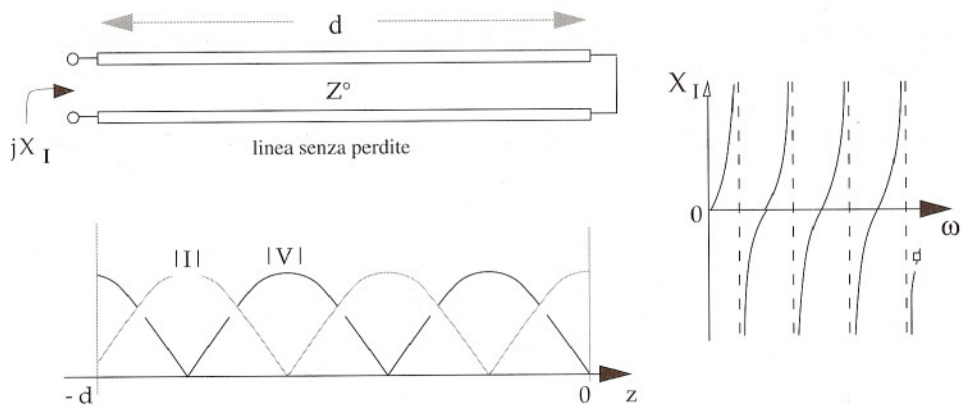



Figura 3.2

1 A bassa frequenza, quando $d << \lambda$, si ha:

$$Z_I = jX_I \approx jZ^0\frac{2\pi d}{\lambda} = jZ^0\frac{\omega d}{v} = j\omega L d$$

dove $L = Z^0/v$ è l'induttanza per unità di lunghezza (vedi Equazione 1.9 e 1.10). Come era prevedibile, a bassa frequenza la linea in cortocircuito si comporta come un induttore di induttanza Ld.

■ Se si considera una linea a basse perdite ($\alpha d << 1$) si ha:

$$\sinh 2\alpha d \approx 2\alpha d \qquad \cosh 2\alpha d \approx 1 + 2(\alpha d)^2$$

Pertanto dalla (3.4) si ottiene:

$$R_I \approx Z^0 \frac{\alpha d}{(\alpha d)^2 + \cos^2(2\pi d/\lambda)} \qquad X_I \approx \frac{Z^0}{2} \frac{\sin(4\pi d/\lambda)}{(\alpha d)^2 + \cos^2(2\pi d/\lambda)} \tag{3.8}$$

L'andamento tipico di R_I e di X_I al variare della frequenza è indicato nella Figura 3.3. L'andamento della reattanza è praticamente coincidente con quello che si avrebbe se la linea fosse senza perdite, tranne che in prossimità delle frequenze alle quali la lunghezza della linea è prossima ad un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda. Intorno a tali frequenze la reattanza passa rapidamente - ma in modo continuo - da valori positivi a valori negativi, mentre la resistenza assume valori elevati. Intorno a queste frequenze l'andamento dell'impedenza è analogo a quello che si ha, intorno alla frequenza di risonanza, in un circuito RLC tipo parallelo.

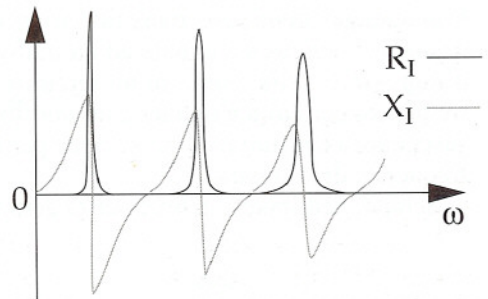



Figura 3.3 ■

LINEA A VUOTO In questo caso (Figura 3.4) si ha $Y_L = 0$ e quindi, per la (2.11*c*):

$$Y_I = Y^0 \operatorname{tgh}\gamma d = Y^0 \frac{\sinh 2\alpha d + j\sin 4\pi d/\lambda}{\cosh 2\alpha d + \cos 4\pi d/\lambda} \tag{3.9}$$

Nella linea a vuoto si ha $\Gamma_L = 1$. Pertanto, prendendo l'origine dell'asse z sulla sezione terminale, risulta:

$$V_0^- = \Gamma_L V_0^+ = V_0^+$$

d

Y°

jB I

linea senza perdite

|V| |I|

- d 0 z

B I

0 ω

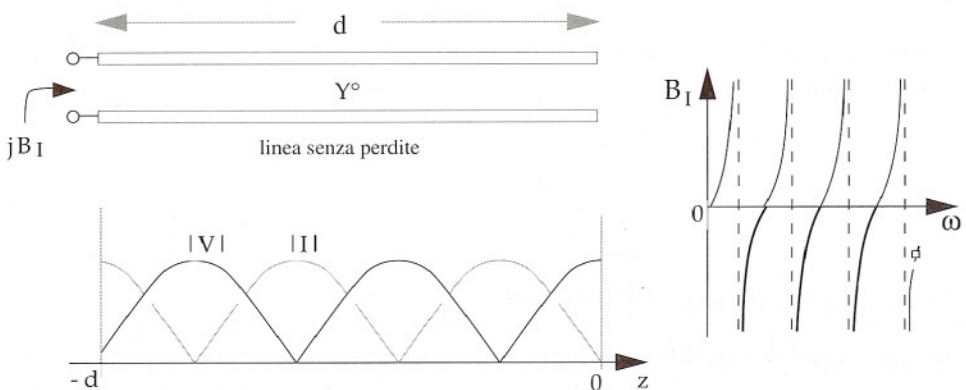



Figura 3.4

$$V = 2\,V_0^+ \cosh\gamma z \qquad I = -2\frac{V_0^+}{Z^0}\sinh\gamma z \tag{3.10}$$

Se la linea è senza perdite l'ammettenza è immaginaria:

$$Y_I = jB_I = j\,Y^0\,\mathrm{tg}\frac{2\pi d}{\lambda} = j\,Y^0\,\mathrm{tg}\frac{\omega d}{v} \tag{3.11}$$

L'andamento della suscettanza al variare della frequenza è indicato nella Figura 3.4. Alle frequenze per cui d è uguale ad un multiplo di mezza lunghezza d'onda la suscettanza d'ingresso è nulla, come in un circuito LC tipo parallelo alla risonanza. Invece, alla frequenza per cui d è uguale a un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda la suscettanza è infinita, come avviene per la suscettanza di un circuito LC tipo serie, alla frequenza di risonanza.[1]

Sempre nell'ipotesi di linea senza perdite, si ha:

$$V(z) = 2\,V_0^+ \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \qquad I(z) = j2\frac{V_0^+}{Z^0}\sin\frac{2\pi z}{\lambda} \tag{3.12}$$

La tensione e la corrente hanno l'andamento di onde stazionarie (Figura 3.4). Il primo nodo della tensione si ha a un quarto di lunghezza d'onda dalla sezione terminale, gli altri nodi si susseguono a distanza di mezza lunghezza d'onda. I nodi della corrente si hanno in corrispondenza dei massimi della tensione e il primo nodo si ha sulla sezione terminale. Le frequenze per cui l'ammettenza d'ingresso è nulla sono quelle per cui all'ingresso della linea si ha un nodo della corrente; invece le frequenze per cui l'ammettenza diverge sono quelle per cui all'ingresso si ha un nodo della tensione. Come nel caso della linea in cortocircuito, in una linea senza perdite a vuoto la potenza trasmessa è nulla.

L'andamento con la frequenza della conduttanza e della suscettanza di una linea a basse perdite ($\alpha d << 1$) è analogo a quello della della resistenza e della reattanza nella linea in cortocircuito (sostituire G_I a R_I, B_I a X_I, Y^0 a Z^0 nelle (3.8) e nella Figura 3.3).

LINEA $\lambda/2$ SENZA PERDITE Se la linea è senza perdite e se la sua lunghezza è pari a mezza lunghezza d'onda, si ha:

$$\Gamma_I = \Gamma_L \qquad Z_I = Z_L$$

---

1 A bassa frequenza, quando $d << \lambda$, si ha:

$$Y_I = jB_I \approx jY^0\frac{2\pi d}{\lambda} = jY^0\frac{\omega d}{v} = j\omega C d$$

dove $C = 1/vZ^0$ è la capacità per unità di lunghezza (vedi Equazione 1.9 e 1.10). Come era prevedibile, a bassa frequenza la linea aperta si comporta come un condensatore di capacità Cd.

È inoltre facile verificare che, indipendentemente dal valore di Z_L, le tensioni (correnti) all'ingresso e sul carico hanno ampiezza uguale e sono in opposizione di fase (Figura 3.5).

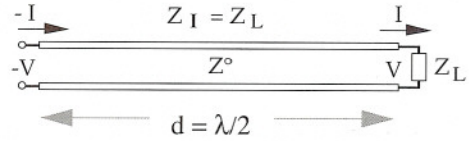



Figura 3.5

LINEA λ/4 SENZA PERDITE Se la linea è senza perdite e se la sua lunghezza è uguale ad un quarto d'onda (Figura 3.6) si ha:

$$\Gamma_I = -\Gamma_L \tag{3.13a}$$

$$Z_I = \frac{Z^{0\,2}}{Z_L} \tag{3.13b}$$

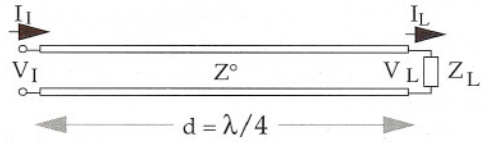



Figura 3.6

Analogamente a quanto osservato per gli strati in quarto d'onda considerati nel Capitolo 2, le linee λ/4 si comportano come invertitori d'impedenza.

Posta l'origine all'uscita della linea, la tensione e la corrente sul carico sono date da

$$V_L = V_0^+ + V_0^- \qquad I_L = (V_0^+ - V_0^-)/Z^0$$

Poiché $2\pi d/\lambda = \pi/2$, la tensione e la corrente all'ingresso sono:

$$V_I = V_0^+ e^{j\pi/2} + V_0^- e^{-j\pi/2} = j(V_0^+ - V_0^-)$$

$$I_I = (V_0^+ e^{j\pi/2} - V_0^- e^{-j\pi/2})/Z^0 = j(V_0^+ + V_0^-)/Z^0$$

Pertanto si ha:

$$I_L = -jV_I/Z^0 \qquad V_L = -jZ^0 I_I \tag{3.14}$$

Si nota che la corrente sul carico è in ritardo di π/2 rispetto alla tensione d'ingresso e dipende solo dall'impedenza caratteristica e dalla tensione stessa.
Per questa ragione, collegando in parallelo gli ingressi di N linee λ/4 chiuse su carichi di impedenze $Z_1, Z_2, ..., Z_N$ (Figura 3.7), risulta che le correnti $I_1, I_2, ..., I_N$ sui carichi hanno tutte la stessa fase; inoltre le loro ampiezze stanno fra loro nel rapporto inverso delle impedenze caratteristiche delle linee, indipendentemente dai valori delle impedenze di carico.

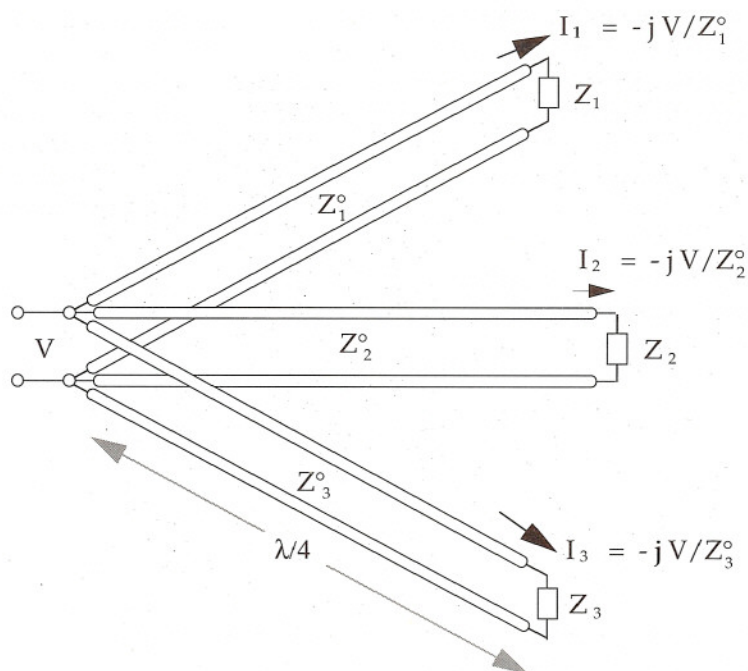



Figura 3.7

5.4 Carta di Smith

Le quantità adimensionali

$$\overline{Z} = Z / Z^0 \qquad \overline{R} = \mathrm{Re}\overline{Z} = R / Z^0 \qquad \overline{X} = \mathrm{Im}\overline{Z} = X / Z^0$$

vengono dette impedenza, resistenza e reattanza normalizzate. Analogamente le quantità

$$\overline{Y} = Y / Y^0 \qquad \overline{G} = \mathrm{Re}\overline{Y} = G / Y^0 \qquad \overline{B} = \mathrm{Im}\overline{Y} = B / Y^0$$

sono dette ammettenza, conduttanza e suscettanza normalizzate. Dalle (2.6*c*) e (2.6*d*) risulta:

$$\Gamma = \frac{\overline{Z} - 1}{\overline{Z} + 1} \qquad (4.1a)$$

$$-\Gamma = \frac{\overline{Y} - 1}{\overline{Y} + 1} \qquad (4.1b)$$

Queste espressioni mostrano che a ogni valore di impedenza (ammettenza) normalizzata corrisponde un coefficiente di riflessione ben determinato. Il collegamento esistente fra

l'impedenza normalizzata e il coefficiente di riflessione è evidenziato graficamente nella "carta di Smith" (Figura 4.1).
La carta rappresenta sul piano Γ i luoghi $\overline{R}$ = cost. (cerchi a tratto pieno) e i luoghi $\overline{X}$= cost. (archi di cerchio a tratto più debole).[1] Pertanto la carta di Smith permette di individuare graficamente il coefficiente di riflessione corrispondente ad una data impedenza normalizzata e viceversa. Ad esempio (vedi figura) l'impedenza $\overline{Z}$ = 0.2 + j 0.5 corrisponde al punto P, così che il modulo e l'argomento del coefficiente di riflessione corrispondente a $\overline{Z}$ sono dati da $\overline{OP}$ e da θ rispettivamente.

Carta di Smith (impedenze)

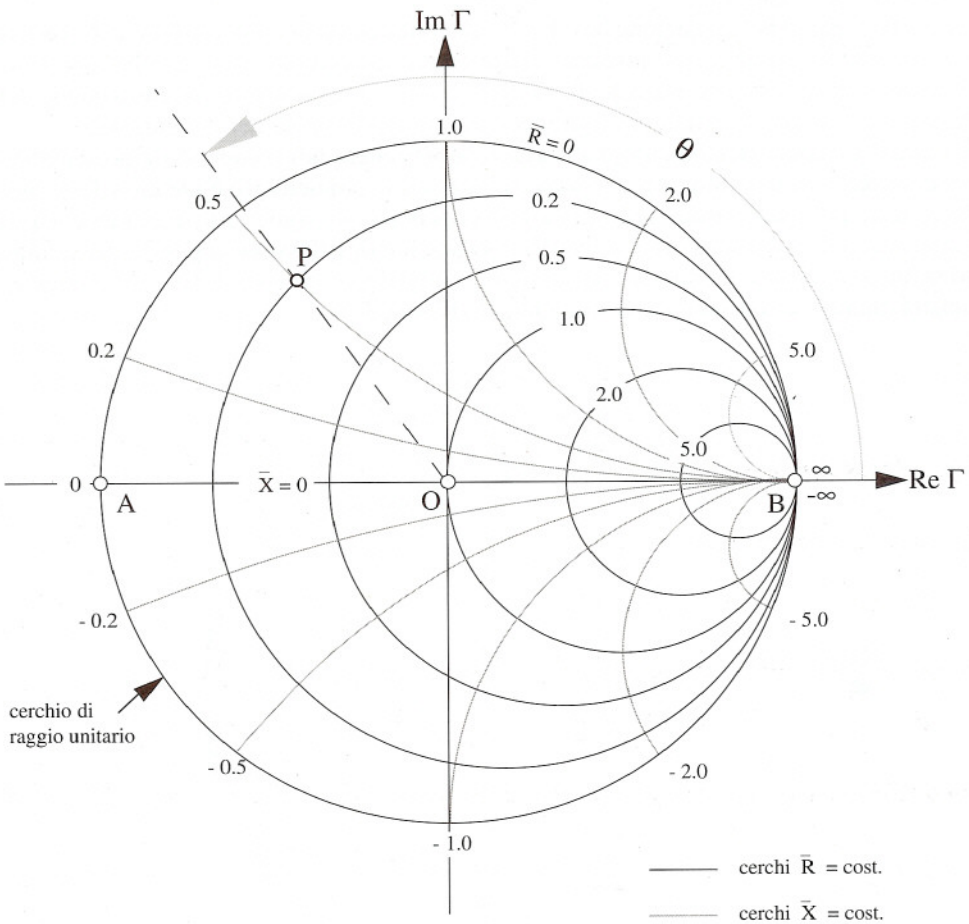



Figura 4.1

---

1 Per la costruzione della carta di Smith si veda: Ramo, Whinnery, Van Duzer, *Fields and Waves in Modern Radio*, J. Wiley, 1967, sec. 1.20.

La carta di Smith è compresa all'interno di un cerchio di raggio unitario, perché il modulo del coefficiente di riflessione non può superare 1 (la potenza riflessa non può superare quella incidente). Si osserva inoltre quanto segue:

- il centro della carta ($\Gamma = 0$) corrisponde a $\overline{Z} = 1 + j0$ (linea adattata, $Z = Z^0$);
- il cerchio di raggio unitario ($|\Gamma| = 1$) è il luogo delle impedenze reattive ($\overline{Z} = 0 + j\overline{X}$) perché si ha riflessione totale solo quando la parte reale dell'impedenza è nulla;
- il diametro AB (Γ reale) è il luogo delle impedenze puramente resistive ($\overline{Z} = \overline{R} + j0$), perché il coefficiente di riflessione è reale solo quando l'impedenza è reale;
- il punto A corrisponde all'impedenza $\overline{Z} = 0$ (cortocircuito);
- il punto B corrisponde a $|\overline{Z}| = \infty$ (circuito aperto);
- i punti collocati nella parte superiore (inferiore) della carta corrispondono alle impedenze induttive (capacitive).

La (4.1b) mostra che la relazione fra $-\Gamma$ e $\overline{Y}$ è identica a quella esistente fra Γ e $\overline{Z}$. Pertanto i cerchi della carta di Smith possono anche essere interpretati come cerchi $\overline{G}$ = cost. e $\overline{B}$ = cost. purché l'orientamento degli assi ReΓ e ImΓ venga invertito rispetto a quello della Figura 4.1. La carta di Smith per le ammettenze è rappresentata nella Figura 4.2.

A parte il diverso orientamento degli assi (che in genere non vengono rappresentati), la struttura della carta di Smith per le impedenze e per le ammettenze è identica. Pertanto la stessa carta può essere usata sia come carta d'impedenza sia come carta d'ammettenza, con l'avvertenza di misurare l'argomento del coefficiente di riflessione a partire dal semiasse orizzontale di destra quando si considerano le impedenze (Figura 4.3*a*), dal semiasse di sinistra quando si considerano le ammettenze (Figura 4.3*b*).

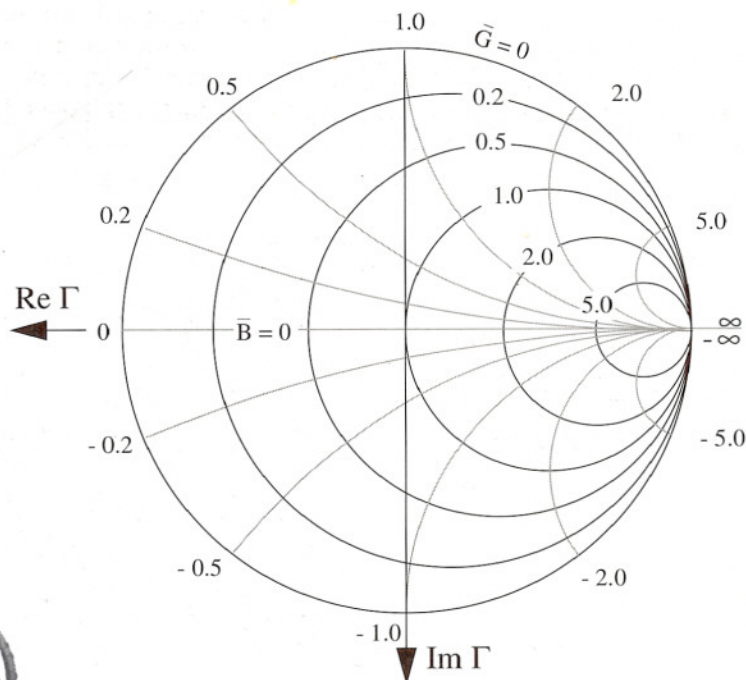



Figura 4.2

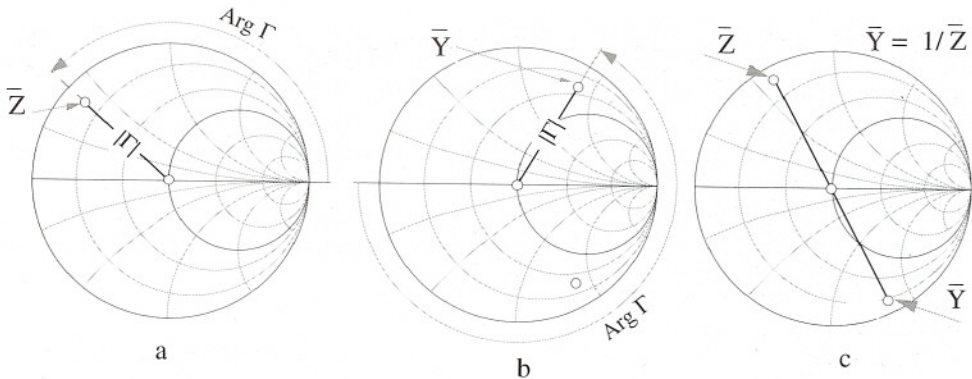



Figura 4.3

L'ammettenza $\overline{Y}$ corrispondente all'impedenza $\overline{Z}$ (cioè $\overline{Y} = 1/\overline{Z}$) è rappresentata sulla carta di Smith dal punto simmetrico a quello che rappresenta $\overline{Z}$ (Figura 4.3*c*); infatti sia a $\overline{Z}$ che a $\overline{Y}$ compete lo stesso coefficiente di riflessione, che è rappresentato da punti simmetrici sulla carta di ammettenza e su quella di impedenza.

La carta di Smith è utile perché permette di visualizzare le trasformazioni di impedenza (ammettenza) lungo le linee, trasformazioni che non sono per niente intuitive, a causa della complessità delle espressioni (2.8) e (2.9). Si consideri ad esempio la trasformazione d'impedenza che si ha al passaggio dalla sezione z alla sezione z – d in una linea *senza perdite* di impedenza caratteristica Z^0. Sia $Z/Z^0 = \overline{R} + j\,\overline{X}$ l'impedenza normalizzata nella sezione z, cui corrisponde il coefficiente di riflessione Γ rappresentato dal punto P (Figura 4.4). Poiché la linea è senza perdite il coefficiente di riflessione nella sezione z – d è dato da

$$\Gamma' = \Gamma\, e^{-j\,4\pi d/\lambda}$$

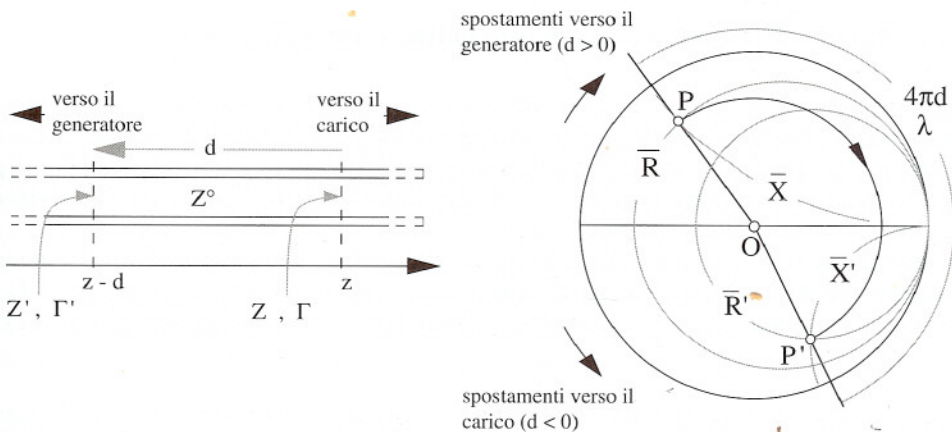



Figura 4.4

e differisce da Γ solo per l'argomento. Pertanto Γ' è rappresentato dal punto P', ottenuto spostando P nel verso orario lungo un arco di circonferenza con centro sull'origine, di ampiezza angolare pari a $4\pi d/\lambda$ (le rotazioni orarie corrispondono agli spostamenti verso il generatore, quelle antiorarie a spostamenti verso il carico). In corrispondenza di P' si leggono i valori $\overline{R}'$ e $\overline{X}'$ della parte reale e della parte immaginaria dell'impedenza normalizzata nella sezione $z - d$. L'impedenza cercata è $Z' = Z^0(\overline{R}' + j\overline{X}')$.

Le trasformazioni di ammettenza vengono effettuate esattamente nello stesso modo.

La carta di Smith può essere usata per trasformare le impedenze (ammettenze) anche nel caso di una linea con perdite. In questo caso si ha:

$$\Gamma' = (\Gamma\, e^{-j\,4\pi d/\lambda})\, e^{-2\alpha d}$$

Pertanto, dopo aver effettuato la rotazione che porta P in P', il punto Q' che rappresenta Γ' (vedi Figura 4.5) viene ottenuto modificando la lunghezza del segmento OP' in base alla relazione

$$OQ' = OP'\, e^{-2\alpha d}$$

I valori di $\overline{R}'$ e $\overline{X}'$ vengono letti nel punto Q'.

Le rotazioni sulla carta di Smith sono proporzionali a d/λ. Esse vengono agevolate dalla presenza di due cerchi graduati (vedi Figura 4.6), su cui sono riportati i valori di d/λ nell'intervallo $0 \div 0.5$.[1] Nei due cerchi le scale sono orientate nel verso orario (per le rotazioni corrispondenti a spostamenti verso il generatore) o in quello antiorario (per gli spostamenti verso il carico).

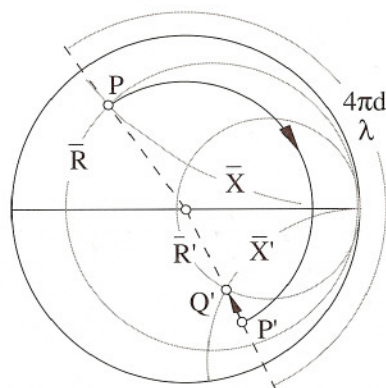



Figura 4.5

5.5 Misura d'impedenza mediante la linea fessurata

Ad alta frequenza la misura d'impedenza può essere effettuata connettendo l'impedenza da determinare all'estremità di una linea e misurando il rapporto d'onda stazionaria e la distanza di un minimo del diagramma d'onda stazionaria dall'estremità della linea. Il metodo, oggi pressoché abbandonato grazie all'avvento di strumenti molto più sofisticati e pratici da usare, è istruttivo e merita di essere considerato.

Normalmente la linea è costituita da una cavo coassiale nel quale viene introdotta una sonda attraverso una fenditura longitudinale praticata sul conduttore esterno (Figura 5.1). Se la fenditura è stretta la perturbazione che essa introduce sulla propagazione del modo TEM

1 Il valore $d/\lambda = 0.5$ corrisponde ad una rotazione di 2π. Rotazioni corripondenti a spostamenti maggiori di $\lambda/2$, vengono effettuate sottraendo da d/λ il multiplo di 0.5 che consente di ottenere un valore compreso fra 0 e 0.5. Ad esempio lo spostamento $d/\lambda = 4.772 = 9 \times 0.5 + 0.272$ è equivalente allo spostamento $d/\lambda = 0.272$.

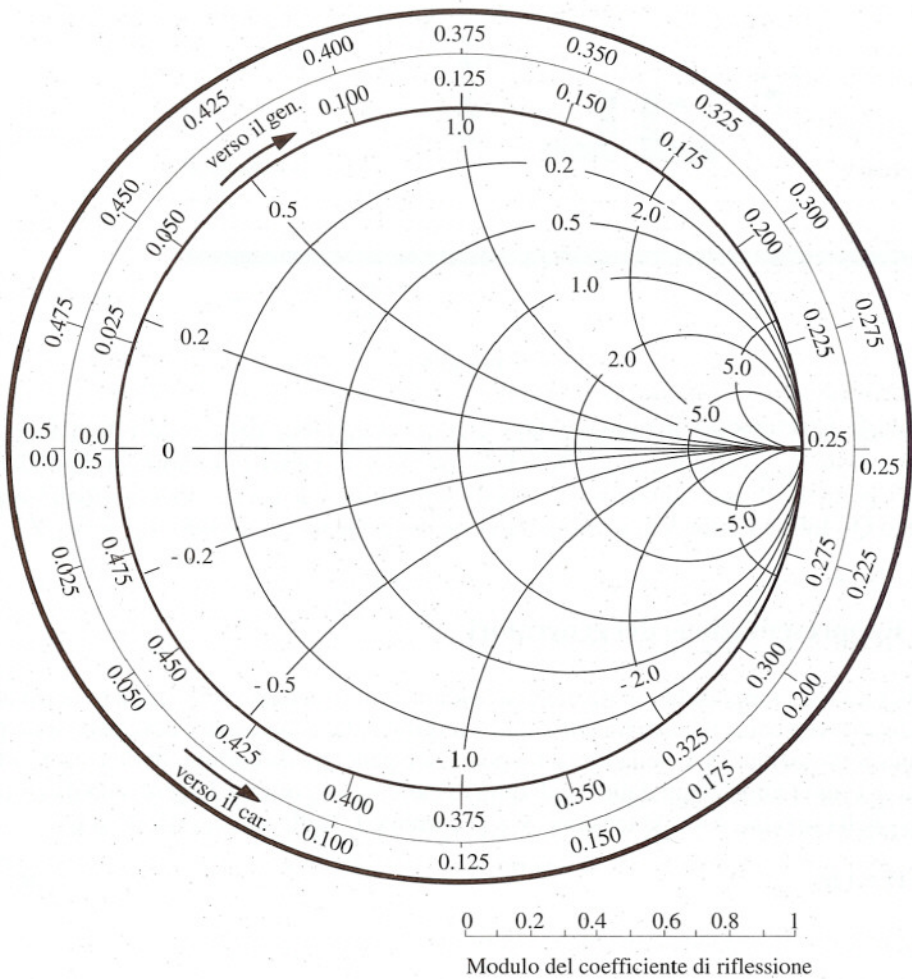



Figura 4.6

è trascurabile (si ricorda che nel modo TEM le correnti sono longitudinali) così che il diagramma d'onda stazionaria è praticamente identico a quello che si avrebbe in assenza della fenditura. La sonda può essere spostata lungo il cavo, in modo da prelevare un segnale di ampiezza proporzionale all'ampiezza della tensione esistente nelle varie sezioni trasversali. Mediante la linea fessurata è possibile determinare il rapporto d'onda stazionaria e la distanza d_{min} (Figura 5.2). Da queste quantità si deduce l'impedenza di carico, mediante il seguente procedimento. Dal rapporto d'onda stazionaria si deduce il valore dell'impedenza normalizzata vista nella sezione di minimo, che è data da (vedi Equazione 2.17):

$$\overline{Z} = \frac{Z^0 / \mathcal{R}}{Z^0} = \frac{1}{\mathcal{R}} \qquad \text{(punto P sulla carta di Smith)}$$

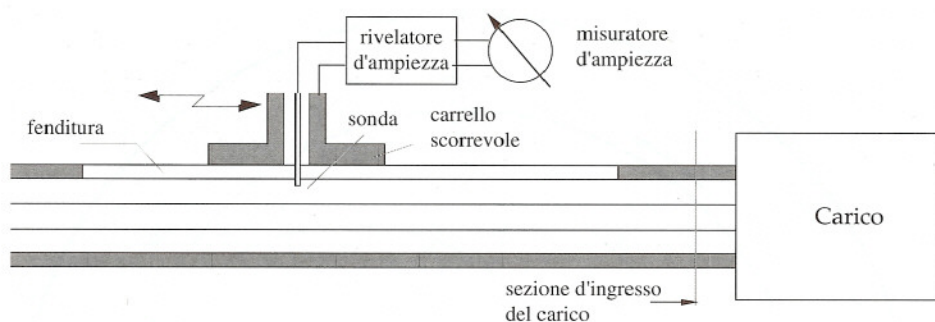



Figura 5.1

Si passa dalla sezione di minimo alla sezione d'ingresso del carico effettuando uno spostamento d_{min} verso il carico. Quindi la rotazione in verso antiorario corrispondente a d_{min}/λ permette di individuare sulla carta di Smith l'impedenza di carico normalizzata $\overline{Z}_L$ (punto Q). Infine l'impedenza incognita viene determinata calcolando $Z_L = \overline{Z}_L Z^0$.

5.6 Rappresentazione dei generatori

La Figura 6.1*a* rappresenta in maniera schematica un generatore che eroga potenza ad un carico attraverso una linea di trasmissione. I terminali del generatore e del carico sono posti su una certa sezione AA' della linea. La potenza è generata da correnti di densità $\mathbf{J}_0$, che si assume siano indipendenti dalle condizioni di carico.[1] Le correnti $\mathbf{J}_0$ generano il campo $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e - nella sezione AA' - la tensione V e la corrente I. Nella stessa sezione si ha

$$\mathbf{H} = I\,\mathbf{h}^0 \tag{6.1}$$

dove $\mathbf{h}^0$ è il vettore modale magnetico per il modo dominante della linea.

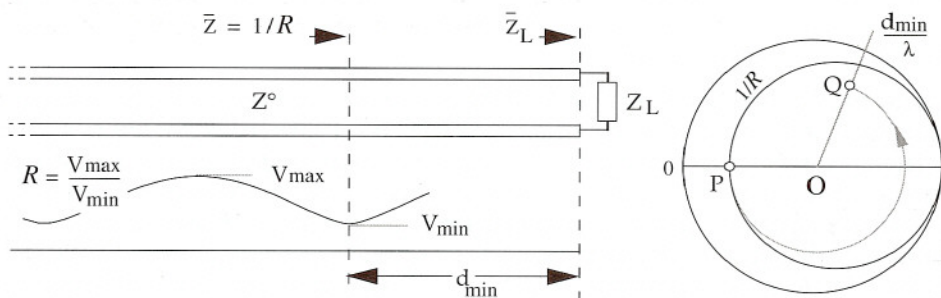



Figura 5.2

1 In alcuni tipi di generatore $\mathbf{J}_0$ dipende in qualche misura dalle condizioni di carico. In questi casi l'ipotesi è accettabile solo in prima approssimazione.

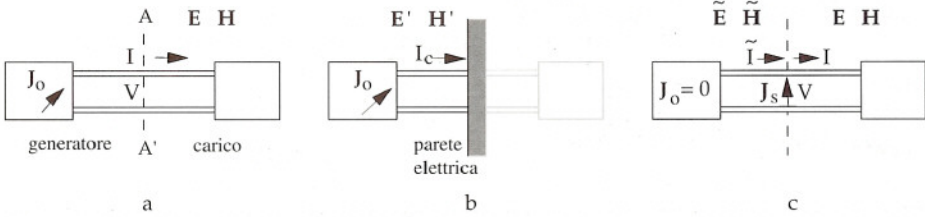



Figura 6.1

Se il generatore viene cortocircuitato, ponendo una parete perfettamente conduttrice sulla sezione AA' (Figura 6.1*b*), nella regione del generatore si ha il campo **E'**, **H'** e la corrente sulla sezione AA' assume un certo valore I_c (corrente di cortocircuito del generatore). In queste condizioni il campo magnetico sulla sezione AA' diviene:

$$\mathbf{H}' = I_c\,\mathbf{h}^0$$

Per la regola di equivalenza illustrata nella Figura 3.3 del Capitolo 4, il campo nella regione del carico rimane uguale a quello creato dal generatore, se si considera la situazione di Figura 6.1*c*, in cui le sorgenti effettive del campo vengono sostituite da una lamina di corrente di densità

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{u}_z \times \mathbf{H}' = I_c\,\mathbf{u}_z \times \mathbf{h}^0 \qquad (6.2)$$

giacente sulla sezione AA'. In particolare la lamina equivalente genera nella sezione AA' proprio la tensione V e - dalla parte del carico - proprio la corrente I. La lamina determina una discontinuità nel campo magnetico che, alla sinistra di AA' è dato da

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{I}\,\mathbf{h}^0$$

dove $\tilde{I}$ rappresenta la corrente immediatamente a sinistra di AA'. Indicando con Z_g l'impedenza vista dalla sezione AA', guardando verso il generatore quando $\mathbf{J}_0 = 0$ (impedenza interna del generatore), si ha:

$$-\tilde{I} = V / Z_g$$

Pertanto risulta:

$$\tilde{\mathbf{H}} = -(V/Z_g)\,\mathbf{h}^0 \qquad (6.3)$$

Considerando la relazione

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{u}_z \times (\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}})$$

e sostituendo le espressioni (6.1), (6.2) e (6.3) si ottiene:

$$I_c \mathbf{u}_z \times \mathbf{h}^0 = (I + V / Z_g)\mathbf{u}_z \times \mathbf{h}^0$$

da cui:

$$I_c = I + V/Z_g$$

Questa relazione corrisponde allo schema circuitale indicato nel riquadro tratteggiato nella Figura 6.2*a* (generatore equivalente di Norton). Il generatore equivalente può sostituire quello reale ai fini di tutti i calcoli circuitali. Esso è determinato da due sole quantità: la corrente di cortocircuito del generatore e la sua impedenza interna. Tali quantità caratterizzano completamente il generatore, qualunque sia la sua reale struttura.

La tensione a vuoto del generatore è $V_0 = Z_g I_c$; pertanto, eliminando I_c dalla precedente equazione, si ottiene:

$$V_0 = Z_g I + V$$

Questa relazione corrisponde allo schema circuitale indicato nel riquadro tratteggiato nella Figura 6.2*b* (generatore equivalente di Thevenin).[1] Dunque il generatore può anche essere caratterizzato mediante la tensione a vuoto, piuttosto che attraverso la corrente di cortocircuito.

Come è noto dalla teoria dei circuiti un generatore eroga la massima potenza (potenza disponibile) quando esso è chiuso su un'impedenza pari a Z_g^*. Grazie a questo fatto è possibile determinare indirettamente l'impedenza interna collegando il generatore a un carico di impedenza variabile e osservando per quale valore d'impedenza si ha la massima erogazione di potenza. La misura della potenza disponibile permette inoltre di determinare indirettamente i moduli di I_c e di V_0.[2] Infatti, come risulta immediatamente dall'esame dei circuiti indicati in Figura 6.3, la potenza disponibile è data da:

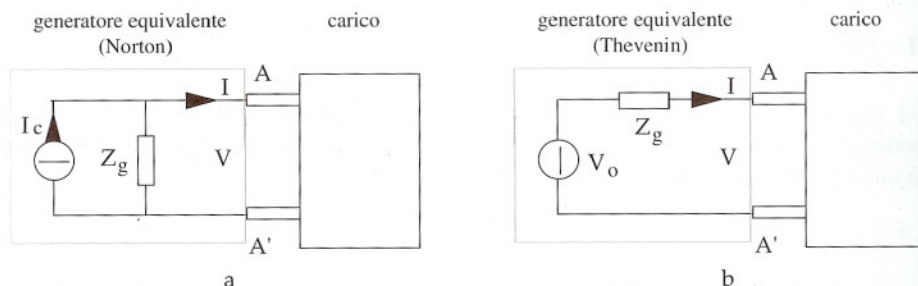



Figura 6.2

1 Sarebbe stato possibile giungere direttamente al circuito equivalente di Thevenin, applicando il criterio di equivalenza illustrato nella Figura 3.4 del Capitolo 4.

2 Ad alta frequenza (esempio f > 100 MHz) le tensioni e le correnti non possono essere misurate direttamente, a causa della difficoltà di realizzare voltmetri e amperometri adeguati allo scopo. Pertanto V_0 e I_c non possono essere ottenute direttamente mediante misure a vuoto o in cortocircuito. Invece le misure di potenza non presentano particolari difficoltà.

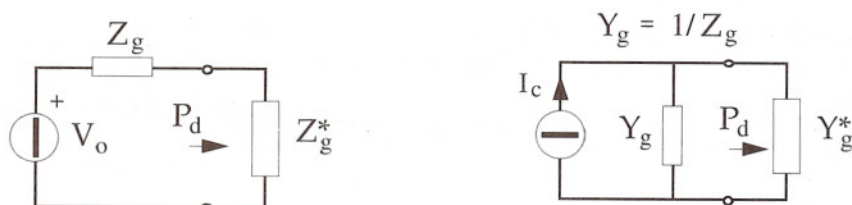



Figura 6.3

$$P_d = \frac{|V_0|^2}{8R_g} = \frac{|I_c|^2}{8G_g} \tag{6.4}$$

(R_g e G_g sono la resistenza e la conduttanza interna del generatore). Pertanto risulta:

$$|V_0| = \sqrt{8R_g P_d} \qquad |I_c| = \sqrt{8G_g P_d} \tag{6.5}$$

Le fasi di V_0 e di I_c rimangono indeterminate, ma questo non costituisce un problema nella maggior parte dei casi.

In generale l'impedenza all'ingresso della linea collegata al generatore è diversa da quella che dà luogo all'erogazione della potenza disponibile. È facile mostrare che, in questo caso, la potenza erogata dal generatore, ossia quella che entra nella linea, è data da

$$P_I = \text{Re}\frac{V_I I_I^*}{2} = \begin{cases} \dfrac{R_I |I_I|^2}{2} = \dfrac{R_I |V_0|^2}{2|Z_g + Z_I|^2} = \dfrac{4R_g R_I}{|Z_g + Z_I|^2} P_d \\[2ex] \dfrac{G_I |V_I|^2}{2} = \dfrac{G_I |I_c|^2}{2|Y_g + Y_I|^2} = \dfrac{4G_g G_I}{|Y_g + Y_I|^2} P_d \end{cases} \tag{6.6}$$

Le formule che mettono in relazione la potenza erogata con quella disponibile sono particolarmente utili, perché la potenza disponibile e l'impedenza interna rientrano fra le specifiche che normalmente caratterizzano i generatori ad alta frequenza.

5.7 Adattatori d'impedenza

L'impedenza d'ingresso di una linea disadattata è sensibile alle variazioni di frequenza, tanto più quanto maggiore è la lunghezza della linea. Se la linea è lunga molte lunghezze d'onda le variazioni dell'impedenza d'ingresso possono essere ingenti, anche in bande di frequenza ristrette, come quelle occupate dagli spettri dei segnali quasi-sinusoidali impiegati nei sistemi di radiocomunicazione. In un sistema di telecomunicazioni questo può provocare forti differenze fra il segnale ricevuto dal carico e quello trasmesso dal generatore (distorsione).Per questa ragione fra la linea e il carico viene normalmente inserito un "adattatore d'impedenza" (Figura 7.1), costituito da un quadripolo virtualmente senza perdite che

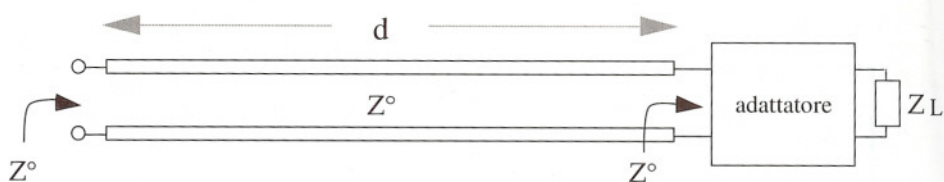



Figura 7.1

trasforma l'impedenza Z_L nell'impedenza caratteristica della linea.[1] Così, se nella banda di interesse la trasformazione è pressocché perfetta, l'impedenza d'ingresso della linea è pressocché costante ($Z_I \approx Z^0$) e le distorsioni vengono ridotte.
L'adattamento della linea presenta inoltre i seguenti vantaggi:

a) poiché l'impedenza d'ingresso è indipendente dalla lunghezza della linea, la potenza erogata dal generatore è quella prevista dal progettista, indipendentemente dalla lunghezza della linea che l'installatore impiega per collegare il generatore al carico;
b) la massima potenza trasmissibile aumenta quando la linea è adattata (vedi commento alla Equazione 2.20); pertanto, negli impianti di potenza, l'adattamento permette di ridurre le dimensioni delle linee.

Dunque, nella maggior parte dei casi, i generatori vengono collegati a linee adattate e vedono, come impedenza di carico, l'impedenza caratteristica della linea. Pertanto, affinché la potenza erogata sia massima, è necessario che anche l'impedenza interna del generatore sia uguale all'impedenza caratteristica della linea. Se è verificata questa condizione si dice che il generatore è adattato alla linea. L'adattamento del generatore è ottenuto collegando alla sua uscita un adattatore d'impedenza che trasforma l'impedenza interna del generatore nell'impedenza caratteristica della linea (Figura 7.2*a*, *b*). Così il generatore e l'adattatore possono essere visti come un nuovo generatore di impedenza interna pari a Z^0 (Figura 7.2*c*).

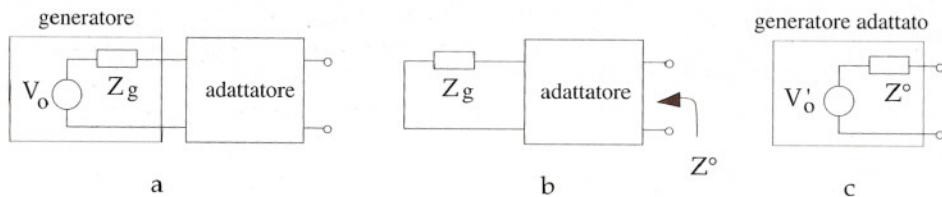



Figura 7.2

1 L'adattamento di carichi puramente reattivi è impossibile. Infatti, se esso fosse possibile, la linea trasporterebbe la potenza attiva P_{inc}, che dovrebbe essere totalmente assorbita dal carico (l'adattatore è senza perdite), cosa che non può avvenire se il carico è puramente reattivo.

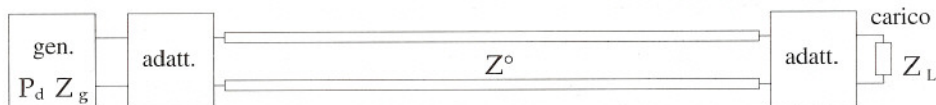



Figura 7.3

In conclusione, in molti casi, il generatore e il carico sono collegati da un circuito del genere di quello indicato nella Figura 7.3. Normalmente, gli apparati commerciali (trasmettitori, ricevitori, antenne, ecc.) includono l'adattatore come parte integrante, così da presentare un'impedenza pari a quella della linea con cui è previsto il collegamento.

Il progetto dell'adattatore connesso al generatore differisce da quello del carico solo perché l'impedenza da adattare è Z_g invece di Z_L. Per questa ragione in seguito si farà riferimento al solo caso dell'adattamento del carico. Esistono molti tipi di adattatore, ma non è questa la sede per esaminarli in dettaglio. Pertanto ci si limiterà a pochi esempi.

Se l'impedenza che deve essere adattata è reale ($Z_L = R_L$), l'adattamento può essere ottenuto mediante un tratto $\lambda/4$ di impedenza caratteristica

$$Z_A^0 = \sqrt{Z^0 R_L} \tag{7.1}$$

La Figura 7.4 rappresenta un adattatore in quarto d'onda realizzato in coassiale; nel tratto $\lambda/4$ il valore richiesto di impedenza caratteristica viene ottenuto scegliendo opportunamente il diametro del conduttore interno. Si noti che l'impedenza d'ingresso del carico può sempre essere resa reale modificando opportunamente la lunghezza del tratto di linea AB.

Altri tipi di adattatore vengono realizzati inserendo in serie o in parallelo alla linea reattanze opportunamente posizionate. Le reattanze vengono realizzate con tronchi di linea a vuoto o in corto circuito ("stub"). La Figura 7.5 rappresenta lo schema di un adattatore che utilizza uno stub in cortocircuito, posto in parallelo alla linea. La stessa figura mostra la realizzazione in coassiale di questo adattatore. La linea di lunghezza d trasforma l'ammettenza di carico nell'ammettenza $Y' = Y^0 + jB$, che ha parte reale pari all'ammettenza caratteristica della linea con cui si vuole realizzare l'adattamento e parte immaginaria in generale non nulla. La parte immaginaria viene cancellata dallo stub in parallelo, la cui suscettanza è $-B$. Così, immediatamente a sinistra dello stub, si vede la richiesta ammettenza Y^0.

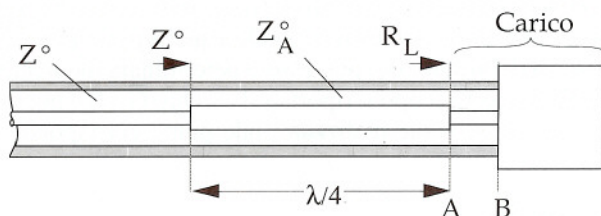



Figura 7.4

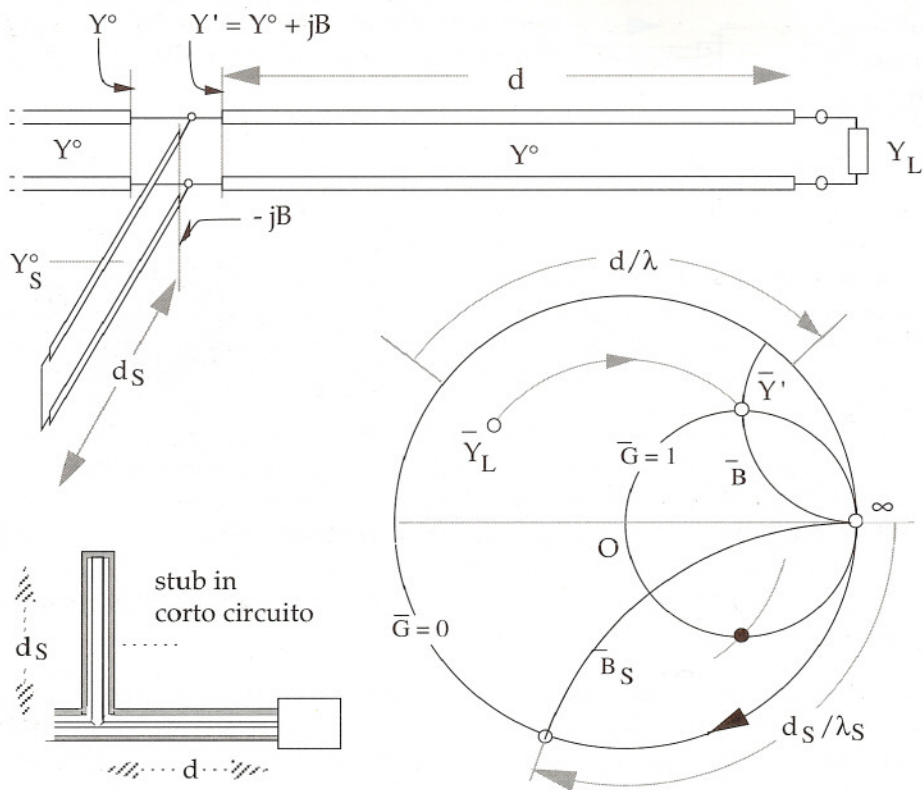



Figura 7.5

Il progetto dell'adattatore è facilitato dalla carta di Smith (vedi figura). Sulla carta viene riportata l'ammettenza di carico normalizzata $\overline{Y}_L = Y_L/Y^0$. La linea di lunghezza d sposta l'ammettenza lungo il cerchio con centro sull'origine passante per $\overline{Y}_L$, fino a incontrare il cerchio $\overline{G} = 1$. In questo punto si ha $\overline{Y}' = 1 + j\overline{B}$, e quindi si ha $Y' = Y^0 + j\,\overline{B}\,Y^0$. Mediante la carta di Smith si trova il valore di d/λ, da cui si ottiene d. Si noti che è anche possibile considerare una lunghezza d maggiore, se il punto $\overline{Y}'$ viene fatto corrispondere all'altra intersezione fra il cerchio centrato sull'origine e il cerchio $\overline{G} = 1$ (vedi figura).

Lo stub viene realizzato con una linea di ammettenza caratteristica Y^0_S, in cui la lunghezza d'onda è λ_S (se lo stub è realizzato con una linea uguale a quella principale Y^0_S e λ_S coincidono con Y^0 e λ). La lunghezza dello stub (d_S) può essere determinata mediante la (3.6), ovvero usando la carta di Smith. A questo scopo si riporta sul cerchio $\overline{G} = 0$ il punto che rappresenta l'ammettenza d'ingresso che si vuole realizzare; tale punto corrisponde alla suscettanza normalizzata:

$$\overline{B}_S = -B/Y^0_S = -\overline{B}Y^0/Y^0_S$$

Poiché l'ammettenza del corto circuito terminale è rappresentata dal punto ∞, la lunghezza

dello stub deve essere tale da spostare tale punto lungo il cerchio $\overline{G} = 0$ fino a raggiungere il punto corrispondente alla suscettanza $\overline{B}_S$. Dalla carta di Smith si desume il valore di d_S/λ_S.

Se lo stub è costituito da una linea a vuoto il progetto è analogo al precedente. L'unica differenza consiste nella determinazione di d_S (in questo caso si deve giungere al punto corrispondente a $\overline{B}_S$ partendo dal punto $\overline{G} = \overline{B} = 0$). L'uso dello stub aperto è più conveniente per la realizzazione degli adattatori nei circuiti a microstriscia (Figura 7.6).

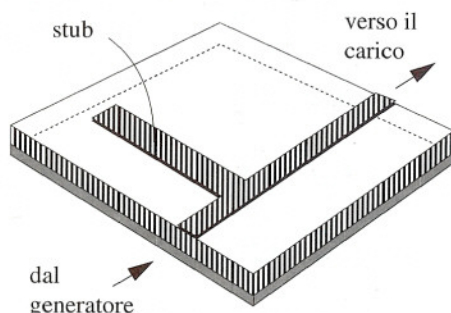



Figura 7.6

5.8 Matrice di trasmissione (V–I) di un tronco di linea

Le tensioni e correnti all'ingresso e all'uscita di un quadripolo lineare qualsiasi (Figura 8.1*a*) sono legate da relazioni lineari. Pertanto, è lecito scrivere

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

La matrice [a] viene detta matrice di trasmissione (V–I) del quadripolo.[1]

Nel caso di una linea di lunghezza d (Figura 8.1*b*), ponendo l'origine dell'asse z sulla sezione d'uscita, si ha:

$$V_2 = V(0) = V_0^+ + V_0^- \qquad -I_2 = I(0) = \frac{V_0^+}{Z^0} - \frac{V_0^-}{Z^0}$$

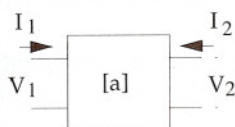
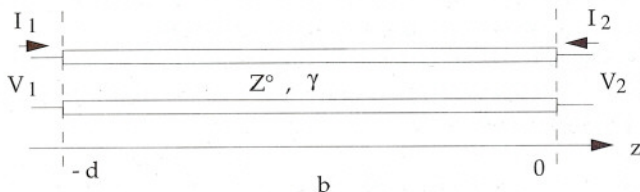



Figura 8.1

1 La specificazione V–I sta a indicare che la matrice collega tensioni e correnti; essa serve a distinguere la matrice [a] da un altro tipo di matrice di trasmissione usata nello studio dei circuiti a microonde. Secondo la convenzione usata nella teoria dei circuiti i versi positivi delle correnti sono quelli entranti nel quadripolo.

Ricavando V_0^+ e V_0^- si ottiene:

$$V_0^+ = \frac{V_2 - Z^0 I_2}{2} \qquad V_0^- = \frac{V_2 + Z^0 I_2}{2} \tag{8.2}$$

D'altro canto si ha:

$$V_1 = V_0^+ e^{\gamma d} + V_0^- e^{-\gamma d} \qquad I_1 = \frac{V_0^+}{Z^0} e^{\gamma d} - \frac{V_0^-}{Z^0} e^{-\gamma d}$$

Sostituendo le (8.2) si ottiene:

$$V_1 = V_2 \cosh\gamma d - I_2 Z^0 \sinh\gamma$$

$$I_1 = V_2 \frac{\sinh\gamma d}{Z^0} - I_2 \cosh\gamma d$$

Dunque la matrice di trasmissione di un tronco di linea è:

$$[a] = \begin{bmatrix} \cosh\gamma d & Z^0 \sinh\gamma d \\ \dfrac{\sinh\gamma d}{Z^0} & \cosh\gamma d \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

Se le perdite della linea sono trascurabili si ha:

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{2\pi d}{\lambda} & jZ^0 \sin\dfrac{2\pi d}{\lambda} \\ j\dfrac{1}{Z^0}\sin\dfrac{2\pi d}{\lambda} & \cos\dfrac{2\pi d}{\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{(linea senza perdite)} \tag{8.4}$$

Si noti che la matrice di trasmissione di una linea è identica a quella introdotta nel Paragrafo 11 del Capitolo 2, per mettere in relazione i campi all'ingresso e all'uscita di uno strato dielettrico attraversato da onde piane uniformi.

Anche nel caso dei quadripoli vale la proprietà secondo la quale la matrice di trasmissione di N quadripoli in cascata (Figura 8.2) è uguale al prodotto delle matrici di trasmissione dei singoli quadripoli:

$$[a]^{tot} = [a]^{(1)} [a]^{(2)} \dots [a]^{(N)} \tag{8.5}$$

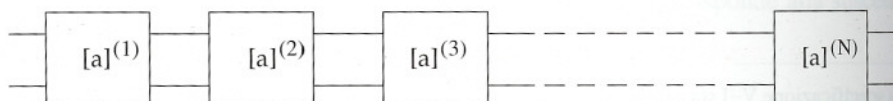



Figura 8.2

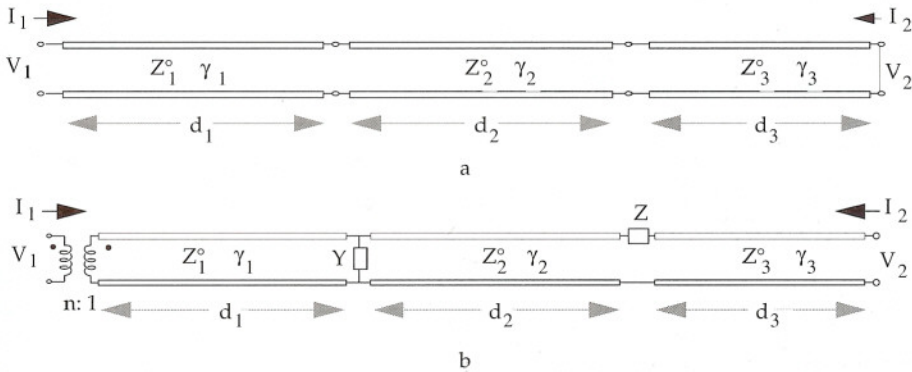
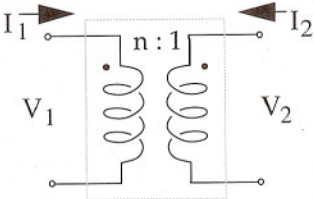
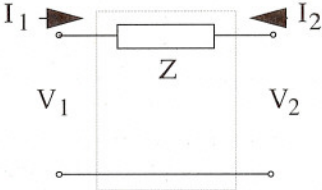
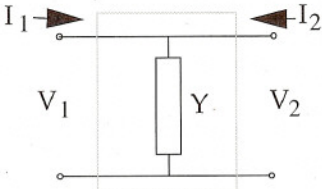



Figura 8.3

Questa proprietà permette di calcolare la matrice di trasmissione di N tronchi di linea in cascata (Figura 8.3*a*), o anche la matrice di trasmissione di linee connesse in cascata con quadripoli di altro tipo. Ad esempio è possibile calcolare facilmente la matrice di trasmissione di quadripoli costituiti da linee, da trasformatori ideali e da impedenze (ammettenze) connesse in serie (parallelo) alle linee (Figura 8.3*b*). A questo scopo bisogna considerare, oltre alle matrici di trasmissione delle linee anche quelle dei suddetti elementi (vedi Tabella 8.1).

È interessante osservare che, per il teorema di reciprocità, la matrice di trasmissione di un quadripolo lineare passivo qualsiasi gode della seguente proprietà:

$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \qquad (8.6)$$

■ Infatti, ricavando dalle (8.1) le correnti in funzione delle tensioni, si ottiene

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

dove:

$$y_{11} = \frac{a_{22}}{a_{12}} \qquad y_{12} = \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{12}} \qquad y_{21} = -\frac{1}{a_{12}} \qquad y_{22} = \frac{a_{11}}{a_{12}} \qquad (8.7)$$

Le quantità y_{ij} sono i parametri di ammettenza del quadripolo. Poiché, per il teorema di reciprocità, la matrice d'ammettenza di un quadripolo è simmetrica (vedi Paragrafo 5 del Capitolo 4), confrontando le espressioni di y_{12} e di y_{21} si deduce la (8.6). ■

Tabella 8.1 Matrici di trasmissione di quadripoli elementari

5.9 Cenni sulle guida d'onda come componenti circuitali

I procedimenti usati per lo studio del comportamento circuitale delle linee si applicano anche alle guide d'onda, che spesso sostituiscono le linee nei circuiti a microonde. Nel Capitolo 3 si è visto che lo studio della trasmissione attraverso le guide funzionanti in condizioni di propagazione unimodale si riduce a quello delle onde di tensione e di corrente per il modo dominante. Tali onde sono rappresentate da espressioni formalmente identiche a quelle delle onde di tensione e di corrente nelle linee di trasmissione. L'unica differenza consiste nel fatto che λ deve essere sostituita da λ_g e Z^0 deve essere sostituita dall'impedenza caratteristica del modo dominante. Così anche nelle guide è possibile definire il coefficiente di riflessione e l'impedenza lungo la guida, l'impedenza e il coefficiente di riflessione del carico, l'impedenza interna del generatore e così via. Pertanto la maggior dei concetti esposti a proposito delle linee si applicano anche allo studio delle guide.

Un caso particolarmente semplice da trattare è quello di un diaframma dielettrico di spessore d (Figura 9.1), inserito in una guida. Poiché i vettori modali per il modo dominante

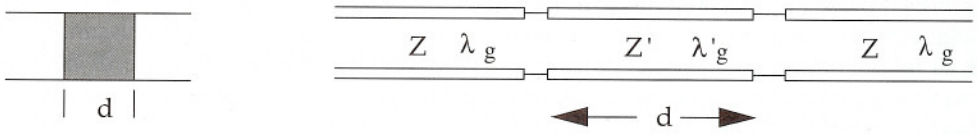



Figura 9.1

sono identici dentro e fuori dal dielettrico, per la continuità dei campi elettrico e magnetico tangenziali la tensione e la corrente modale sono continue sulle due facce dello strato dielettrico. Pertanto il sistema considerato equivale a tre linee in cascata, perchè con questa connessione le tensioni e le correnti sono continue attraverso i terminali di connessione. Le impedenze caratteristiche e le lunghezze d'onda sono quelle del modo dominante nelle varie guide; il tratto dielettrico è rappresentato da una linea di impedenza caratteristica Z' diversa da quella della linea che rappresenta il resto della guida (Z). Lo studio della trasmissione attraverso il diaframma può quindi essere affrontato con il metodo esposto nel paragrafo precedente, considerando il prodotto delle matrici di trasmissione di tre tronchi di linea.

A differenza di quanto visto nel precedente esempio, spesso le discontinuità determinano condizioni al contorno che non possono essere soddisfatte considerando il solo modo dominante. Le discontinuità indicate nella Figura 9.2 sono rappresentative da questo punto

curva

salto in larghezza

diaframma metallico

barra metallica

quadripolo equivalente alla discontinuità

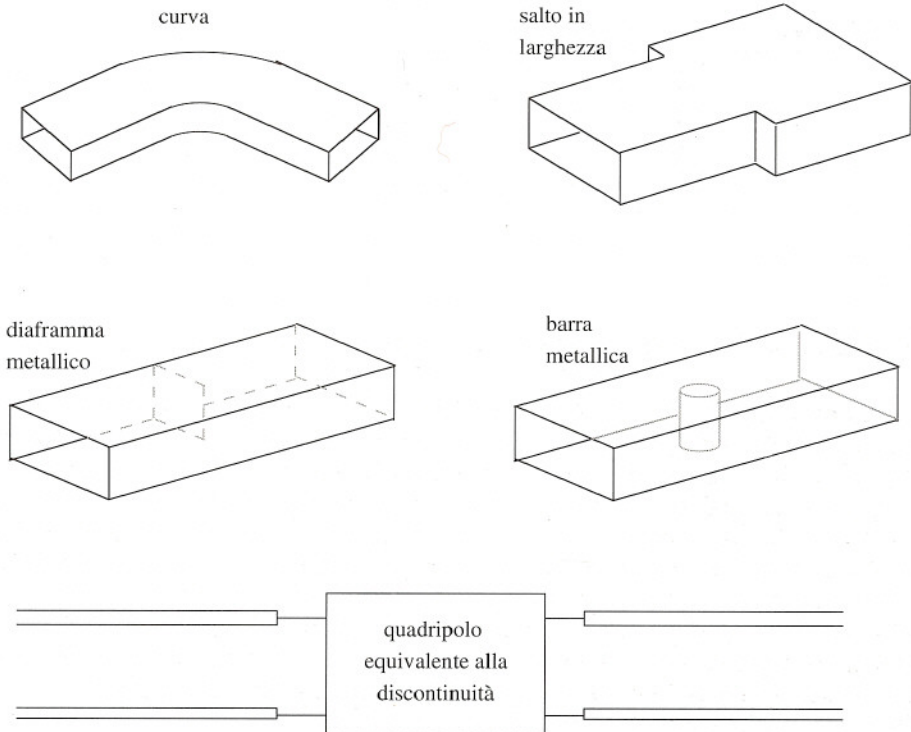



Figura 9.2

di vista. Poiché una discontinuità provoca riflessione, il circuito equivalente che la rappresenta è costituito da due linee (corrispondenti ai tratti di guida prima e dopo la discontinuità) e da un opportuno quadripolo che riflette e trasmette le onde di tensione e di corrente esattamente come la discontinuità riflette e trasmette le onde di tensione e di corrente del modo dominante. I parametri del quadripolo non sono in genere semplici da calcolare analiticamente. In ogni caso, però, essi possono essere dedotti sperimentalmente mediante opportune misure di riflessione e di trasmissione, o possono essere determinati al calcolatore mediante opportuni algoritmi che risolvono numericamente il problema elettromagnetico connesso.

6
Cavità risonanti

Una cavità risonante è costituita da un volume vuoto (o contenente un dielettrico a basse perdite), racchiuso da uno schermo metallico. Le cavità vengono spesso impiegate sia per la realizzazione di componenti a microonde (esempio filtri, generatori e amplificatori di potenza) sia come strutture d'interazione fra campo e particelle nelle macchine acceleratrici (sincrotroni, acceleratori lineari, ecc.). Questo capitolo è dedicato allo studio delle proprietà generali delle cavità risonanti.

Nei Paragrafi 1 e 3 viene mostrato che, in assenza di sorgenti, qualsiasi cavità può essere sede di oscillazioni elettromagnetiche persistenti (nelle cavità idealmente considerate senza perdite) o smorzate (nelle cavità reali).
Le oscillazioni avvengono a frequenze e con configurazioni di campo ben determinate, dipendenti dalla forma e dalle dimensioni della cavità (frequenze e modi propri di oscillazione).
Le cavità possono oscillare secondo infiniti modi, ad un numero illimitato di frequenze, a differenza di quanto avviene nei sistemi oscillanti costituiti da insiemi finiti di elementi, che presentano sempre un numero finito di modi e di frequenze proprie (sistemi di masse interconnesse da molle, circuiti LC, ecc.). Questo risultato è analogo a quello che si trova studiando le oscillazioni dei sistemi meccanici continui (esempio corda vibrante fissata agli estremi). Il Paragrafo 2 riguarda lo studio dei modi e delle frequenze proprie delle cavità cilindriche, che viene considerato in dettaglio grazie alla sua semplicità.

Come in tutti i sistemi oscillanti, quando una cavità è sollecitata da una sorgente sinusoidale si hanno oscillazioni che divengono tanto più intense quanto più la frequenza della sorgente si avvicina ad una delle frequenze proprie di oscillazione; inoltre, qualunque sia la sorgente, il campo tende ad assumere la stessa configurazione del modo corrispondente (risonanza). Per questa ragione i modi e le frequenze proprie vengono anche detti "modi e frequenze di risonanza". Lo studio della risonanza viene svolto nella seconda parte del capitolo.

La determinazione dei modi e delle frequenze di risonanza di un sistema lineare qualsiasi richiede sempre la soluzione di un problema agli autovalori. Nel caso delle cavità risonanti il problema da risolvere è strettamente connesso alla ricerca di certe autofunzioni vettoriali dell'operatore di Laplace.
Le proprietà di queste autofunzioni e dei corrispondenti autovalori sono riassunte nel Paragrafo 3 dell'Appendice D, la cui lettura è indispensabile per la comprensione del presente capitolo.

6.1 Oscillazioni libere di una cavità ideale

La Figura 1.1 rappresenta una cavità risonante ideale. Si suppone che le pareti siano costituite da un conduttore perfetto e che il mezzo (isotropo, omogeneo e senza perdite) sia caratterizzato dalle permeabilità $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon'$ e $\mu = \mu_0\mu'$.[1] Poiché lo schermo conduttore isola il volume V della cavità e non dissipa energia, è lecito chiedersi se - anche in assenza di sorgenti - possano esistere nella cavità campi che oscillano con legge sinusoidale. Tali campi esistono se, per qualche valore della pulsazione ω, esistono soluzioni non nulle del problema:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\,\mathbf{E} \\ \nabla\times\mathbf{E} &= -j\omega\mu\,\mathbf{H}\end{aligned}\right\}\ \text{nel volume V} \qquad \begin{aligned}(1.1a)\\(1.1b)\end{aligned}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = 0 \qquad \text{sul contorno } S_v \qquad (1.1c)$$

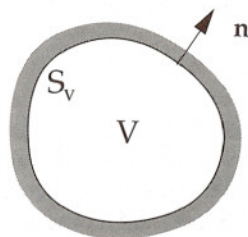



Figura 1.1

È evidente che le soluzioni cercate sono solenoidali ($\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$, $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$). Ai fini della successiva discussione è comodo modificare la forma delle equazioni di Maxwell introducendo al posto di $\mathbf{H}$ il vettore

$$\overline{\mathbf{H}} = -j\eta\,\mathbf{H} \qquad (1.2)$$

Così le equazioni di Maxwell assumono la forma simmetrica:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\overline{\mathbf{H}} &= k\mathbf{E} \\ \nabla\times\mathbf{E} &= k\overline{\mathbf{H}}\end{aligned}\right\}\ \text{nel volume V} \qquad \begin{aligned}(1.3a)\\(1.3b)\end{aligned}$$

dove

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega / v$$

è un parametro (reale positivo) incognito. L'esistenza di campi oscillanti è legata all'esistenza di valori di k (autovalori) per i quali il sistema (1.3) ammette soluzioni non nulle (autofunzioni). Le (1.3) coincidono con le (D.15) dell'Appendice D, che sono soddisfatte dagli autovalori k_i e dalle autofunzioni solenoidali $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{H}_i$ dell'operatore di Laplace, con le condizioni al contorno $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_i = 0$ e $\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H}_i = 0$. Qualunque sia V, esiste una successione illimitata di autovalori *reali positivi* $\{k_1, k_2, ...\}$ alla quale corrispondono due successioni

1 Il mezzo è quasi sempre costituito dall'aria o dal vuoto (nelle cavità attraversate da fasci di particelle).

di autofunzioni *reali normalizzate*, $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ...\}$, $\{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, ...\}$, che soddisfano le condizioni di "ortonormalità":

$$\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j \, dV = \delta_{ij} \qquad \int_V \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{H}_j \, dV = \delta_{ij}$$

Le soluzioni del problema (1.3) hanno ampiezza e fase indeterminata, perché - a causa dell'omogeneità delle equazioni - moltiplicando una soluzione per una costante complessa qualsiasi si ottiene ancora una soluzione. Invece, grazie alla normalizzazione, le autofunzioni $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{H}_i$ sono perfettamente determinate, a meno di una possibile inversione del segno di entrambe. Pertanto, se k corrisponde ad uno degli autovalori k_i, il sistema (1.3) ammette soluzioni del tipo:

$$\mathbf{E} = A_i \, \mathbf{E}_i \qquad \overline{\mathbf{H}} = A_i \, \mathbf{H}_i$$

dove A_i rappresenta una costante complessa arbitraria. Per la (1.2) il campo ha la forma

$$\mathbf{E} = A_i \, \mathbf{E}_i \qquad \mathbf{H} = j \frac{A_i}{\eta} \mathbf{H}_i \tag{1.4}$$

Il campo (1.4) rappresenta un modo proprio della cavità; la sua frequenza è determinata dal fatto che k (cioè ω/v) coincide con l'autovalore k_i. Ad esempio, se si può assumere che alla frequenza di oscillazione il mezzo non sia dispersivo (ε, μ, v indipendenti da ω), la pulsazione è data esplicitamente da:

$$\omega_i = v \, k_i \tag{1.5}$$

Poiché le autofunzioni sono reali, il campo istantaneo corrispondente alle (1.4) è:

$$\mathsf{E} = \mathcal{A}_i \, \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cos(\omega_i t + \varphi_i) \qquad \mathsf{H} = -\frac{\mathcal{A}_i}{\eta} \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) \sin(\omega_i t + \varphi_i) \tag{1.6}$$

dove $\mathcal{A}_i$ e φ_i sono il modulo e l'argomento di A_i. A ogni coppia di autofunzioni $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ corrispondono campi oscillanti di questo tipo. Possono quindi esistere infiniti modi, il cui spettro di frequenze dipende dallo spettro degli autovalori k_i.

Le (1.6) mostrano che, nei modi, l'andamento spaziale del campo elettrico e del campo magnetico è determinato dalle autofunzioni e rimane immutato nel tempo. Inoltre il campo elettrico e il campo magnetico oscillano in quadratura così che - in certi istanti e ad intervalli di un quarto di periodo - uno dei due campi si annulla mentre l'altro raggiunge la massima intensità. Questo comportamento è analogo a quello già riscontrato nelle onde stazionarie pure.

Le equazioni di Maxwell e le equazioni costitutive per i campi istantanei sono lineari; pertanto esse sono soddisfatte da combinazioni lineari di campi oscillanti del tipo suddetto. In altri termini, più modi oscillanti possono coesistere nella cavità, dando luogo al campo:

$$\mathbf{E} = \sum_{1}^{\infty} {}_i \mathcal{A}_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})\cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{1}^{\infty} {}_i \frac{-\mathcal{A}_i}{\eta} \mathbf{H}_i(\mathbf{r})\sin(\omega_i t + \varphi_i) \tag{1.7}$$

In presenza di più modi il campo non è più sinusoidale perché le frequenze di oscillazione dei modi sono diverse. Inoltre, solitamente, le oscillazioni del campo non sono periodiche perché (escludendo situazioni molto particolari) le frequenze dei modi presenti nella cavità non sono multiple di una frequenza fondamentale. Nel caso di più modi coesistenti la configurazione del campo varia continuamente nel tempo. Solo i modi "puri" mantengono invariata la loro configurazione.

Supponendo per semplicità che il mezzo non sia dispersivo ($\varepsilon' = \varepsilon_r$, $\mu' = \mu_r$), l'energia immagazzinata nella cavità all'istante t è data da

$$u = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2)\,\mathrm{dV}$$

Sostituendo le (1.7) si vede facilmente che, grazie all'ortonormalità delle autofunzioni, risulta:

$$u = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \sum_{1}^{\infty} {}_i \mathcal{A}_i^2 \tag{1.8}$$

Si nota in primo luogo che l'energia è costante, come era da attendersi visto che essa non può essere né dissipata né scambiata con l'esterno; in secondo luogo si osserva che l'energia è la somma delle energie che competerebbero ai singoli modi se ognuno esistesse in assenza degli altri. È chiaro che questa ultima proprietà dipende dall'ortogonalità delle autofunzioni.

La determinazione delle autofunzioni $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{H}_i$ e dei corrispondenti autovalori è il problema centrale nello studio di una cavità risonante. Le autofunzioni possono essere determinate risolvendo il problema (1.3) sotto la condizione (1.1*c*), ovvero problemi equivalenti in cui l'unica funzione da determinare è $\mathbf{E}$ o $\overline{\mathbf{H}}$. Ad esempio, prendendo il rotore di entrambi i membri della (1.3*b*), utilizzando la (1.3*a*) e usando l'identità (A.34) dell'Appendice A si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ &\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{nel volume V} \tag{1.9a}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \qquad \text{sul contorno } S_v \tag{1.9b}$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2 \overline{\mathbf{H}} + k^2 \overline{\mathbf{H}} = 0 \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{H}} = 0\end{array}\right\} \quad \text{nel volume V} \tag{1.10a}$$

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \overline{\mathbf{H}} = 0 \qquad \text{sul contorno } S_v \tag{1.10b}$$

I problemi (1.9) e (1.10) sono equivalenti a quello originario ed evidenziano che - come si è già detto – **E** ed $\overline{\mathbf{H}}$ sono le autofunzioni solenoidali dell'operatore di Laplace, con le condizioni al contorno (1.9b) e (1.10b) rispettivamente.
La determinazione analitica delle autofunzioni e degli autovalori è possibile solo nel caso di cavità di forma semplice come, ad esempio, certe cavità cilindriche (v. paragrafo successivo) o la cavità sferica.[1] Gli autovalori e le autofunzioni di cavità più complicate vengono determinati numericamente, risolvendo uno dei problemi (1.3), (1.9), (1.10) con l'ausilio del calcolatore.

In ogni caso la sola nozione dell'esistenza dei modi e delle loro proprietà permette di prevedere teoricamente certi comportamenti generali delle cavità, in particolare il fenomeno della risonanza di cui si parlerà nel successivo Paragrafo 5. L'osservazione di questo fenomeno permette di determinare sperimentalmente in modo semplice le frequenze proprie di una cavità.

6.2 Modi delle cavità cilindriche

È possibile ricavare i modi delle cavità cilindriche risolvendo i problemi agli autovalori discussi nel precedente paragrafo, ovvero - indirettamente, ma più rapidamente - utilizzando i risultati della teoria delle guide. Infatti le cavità cilindriche possono essere viste come tronchi di guida d'onda (Figura 2.1*a*) o di linea schermata (Figura 2.1*b*) chiusi agli estremi da due piani conduttori, così che i modi di risonanza possono essere ricavati dai modi della guida (o della linea), considerati a quelle particolari frequenze per cui essi soddisfano le condizioni al contorno imposte dalla presenza dei piani conduttori in z = 0 e z = d. Come nelle corrispondenti guide, i modi delle cavità cilindriche possono essere suddivisi in modi TM, TE e TEM (questi ultimi presenti solo nelle cavità derivanti da linee).

MODI TM Ad una generica frequenza, quindi per un generico valore di k, il modo TM_{np} della guida ha la forma (vedi Capitolo 3, Equazione 2.20*a*):

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}'_{np}\ V + j\frac{\eta \kappa'_{np}}{k} \psi_{np}\, I\, \mathbf{u}_z \qquad \mathbf{H} = \mathbf{h}'_{np}\ I \tag{2.1}$$

1 Si veda ad esempio: R. F. Harrington, *Time-harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, 1961, p. 269.

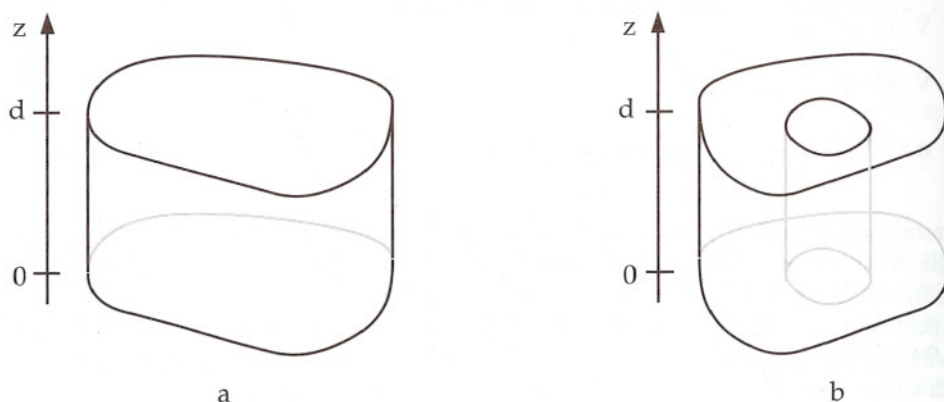



Figura 2.1

dove:

$$V = V_0^+ e^{-\gamma'_{np} z} + V_0^- e^{\gamma'_{np} z} \qquad I = (V_0^+ e^{-\gamma'_{np} z} - V_0^- e^{\gamma'_{np} z})/Z'_{np}$$

$$\gamma'_{np} = j\sqrt{k^2 - \kappa'^2_{np}} \qquad Z'_{np} = \eta\gamma'_{np}/jk$$

Perché il modo possa esistere nella cavità è necessario che il campo elettrico trasversale sia nullo sui piani conduttori terminali, cioè che la tensione V sia nulla in $z = 0$ e in $z = d$. La condizione nell'origine implica $V_0^- = -V_0^+$; quindi, introducendo la nuova costante $C = 2kV_0^+/\gamma'_{np}$, deve aversi:

$$V = -\frac{\gamma'_{np}}{k} C \sinh\gamma'_{np} z \qquad I = j\frac{C}{\eta}\cosh\gamma'_{np} z \tag{2.2}$$

Affinché la tensione sia nulla anche in $z = d$ deve risultare:

$$\sinh\gamma'_{np} d = 0$$

e quindi:

$$\gamma'_{np}\, d = jq\pi \qquad (\text{q intero}) \tag{2.3}$$

Dall'espressione di γ'_{np} si deduce la condizione

$$d\sqrt{k^2 - \kappa'^2_{np}} = q\pi$$

che è soddisfatta se k assume uno dei seguenti valori:

$$k'_{npq} = \sqrt{\kappa'^2_{np} + (q\pi/d)^2} \tag{2.4}$$

Sostituendo la (2.3) nelle (2.2) si ottiene:

$$V = \frac{q\pi}{d\,k'_{npq}} C \sin\frac{q\pi z}{d} \qquad I = j\frac{C}{\eta}\cos\frac{q\pi z}{d} \tag{2.5}$$

Quindi si ha:

$$\mathbf{E} = \frac{C}{k'_{npq}}\left(\mathbf{e}'_{np}\,\frac{q\pi}{d}\sin\frac{q\pi z}{d} - \mathbf{u}_z\,\kappa'_{np}\,\psi_{np}\,\cos\frac{q\pi z}{d}\right) \tag{2.6a}$$

$$q = 0, 1, 2, ...$$

$$\mathbf{H} = j\frac{C}{\eta}\mathbf{h}'_{np}\,\cos\frac{q\pi z}{d} \tag{2.6b}$$

(i valori negativi di q danno luogo alle stesse soluzioni che si hanno con i valori positivi). Il modo è identificato da tre indici e viene indicato con la sigla TM_{npq}. Le precedenti espressioni possono essere poste nella forma (1.4) dividendo e moltiplicando per la costante di normalizzazione

$$\sqrt{\xi_q / d} \qquad (\xi_q = 1 \text{ se } q = 0,\ \xi_q = 2 \text{ se } q \neq 0)$$

e introducendo la nuova costante $A = C/\sqrt{\xi_q / d}$. Così si ottiene

$$\mathbf{E} = A\,\mathbf{E}'_{npq} \qquad \mathbf{H} = j\frac{A}{\eta}\mathbf{H}'_{npq} \qquad (\text{modo } TM_{npq}) \tag{2.7}$$

dove:

$$\mathbf{E}'_{npq} = \frac{\sqrt{\xi_q / d}}{k'_{npq}}\left(\mathbf{e}'_{np}\,\frac{q\pi}{d}\sin\frac{q\pi z}{d} - \mathbf{u}_z\,\kappa'_{np}\,\psi_{np}\,\cos\frac{q\pi z}{d}\right) \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{H}'_{npq} = \sqrt{\xi_q / d}\;\mathbf{h}'_{np}\,\cos\frac{q\pi z}{d} \tag{2.8b}$$

$$\int_V |\mathbf{E}'_{npq}|^2\,dV = 1 \qquad \int_V |\mathbf{H}'_{npq}|^2\,dV = 1$$

I vettori $\mathbf{E}'_{npq}$ e $\mathbf{H}'_{npq}$ rappresentano le autofunzioni relative ai modi TM della cavità cilindrica.[1] I corrispondenti autovalori sono dati dalla (2.4).

Le precedenti espressioni permettono di ricavare le autofunzioni e gli autovalori dei modi TM_{npq} quando sono noti κ'_{np}, ψ_{np}, $\mathbf{e}'_{np}$, $\mathbf{h}'_{np}$, come nel caso delle cavità a sezione rettangolare o circolare (vedi Capitolo 3, Tabella 4.1 e 6.1).

La Figura 2.2 mostra l'andamento di alcuni modi nel caso q = 0. Per questo particolare valore dell'indice i modi sono indipendenti da z, il campo elettrico è assiale e il campo magnetico è trasversale. Inoltre si ha $k'_{np0} = \kappa'_{np}$ e quindi le frequenze di risonanza dei modi TM_{np0} coincidono con le frequenze di taglio dei modi TM_{np} e non dipendono da d. Le (2.5) mostrano che i modi con $q \neq 0$ hanno l'andamento di onde stazionarie con due nodi in z = 0 e in z = d e con q − 1 nodi intermedi. L'andamento di un modo TM con q = 1 è rappresentato nella Figura 2.3*c*.

MODI TE Considerando il modo TE_{np} (vedi Capitolo 3, Equazioni 2.17*b*, 2.18*b*, 2.19*b* e 2.12*b*), con procedimento analogo al precedente si trovano i seguenti valori di k per i modi TE_{npq}:

$$k''_{npq} = \sqrt{\kappa''^2_{np} + (q\pi/d)^2} \qquad (q = 1, 2, ...) \qquad (2.9)$$

I campi hanno la forma:

$$\mathbf{E} = A\,\mathbf{E}''_{npq} \qquad \mathbf{H} = j\frac{A}{\eta}\mathbf{H}''_{npq} \qquad (\text{modo } TE_{npq}) \qquad (2.10)$$

dove $\mathbf{E}''_{npq}$ e $\mathbf{H}''_{npq}$ sono le seguenti autofunzioni normalizzate:

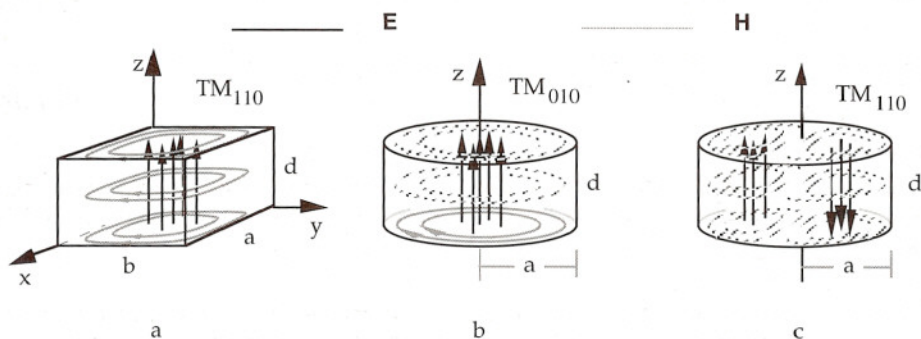



Figura 2.2

1 Il lettore può facilmente verificare l'ortonormalità delle autofunzioni (ricordare le relazioni di ortonormalità dei vettori modali delle guide e delle autofunzioni ψ_{np}).

$$\mathbf{E}''_{npq} = \sqrt{2/d}\,\mathbf{e}''_{np}\,\sin\frac{q\pi z}{d} \tag{2.11a}$$

$$\mathbf{H}''_{npq} = \frac{\sqrt{2/d}}{k''_{npq}}\left(\mathbf{h}''_{np}\,\frac{q\pi}{d}\cos\frac{q\pi z}{d} - \mathbf{u}_z\,\kappa''_{np}\,\varphi_{np}\,\sin\frac{q\pi z}{d}\right) \tag{2.11b}$$

Le Figura 2.3*a*, *b*, *d*, *e*, *f*, *h* mostrano esempi di modi TE. Le Figura 2.3*d*, *e* rappresentano due modi derivanti dai modi degeneri TE_{11} della guida circolare. Evidentemente tali modi risuonano alla stessa frequenza (modi degeneri).[1] Nella cavità a sezione circolare, tutti i modi TE_{npq} e TM_{npq} con $n \neq 0$ (modi asimmetrici) sono presenti in coppie degeneri.

MODI TEM Nelle cavità derivanti da linee bisogna considerare pure i modi TEM. Per brevità si considera il solo caso in cui il volume della cavità è duplicemente connesso, come nel caso della Figura 2.1*b*. In questo caso il modo TEM della linea è unico e i modi di risonanza da esso derivanti sono identificati da un solo indice (modi TEM_q). Si trova facilmente che la risonanza del modo TEM_q ha luogo per i seguenti valori di k:

$$k_q^0 = q\pi/d \qquad\qquad q = 1,\ 2,\ \ldots \tag{2.12}$$

Il campo può essere posto nella solita forma:

$$\mathbf{E} = A\,\mathbf{E}_q^0 \qquad\qquad \mathbf{H} = j\frac{A}{\eta}\mathbf{H}_q^0 \qquad\qquad (\text{modo } TEM_q) \tag{2.13}$$

dove $\mathbf{E}_q^0$ e $\mathbf{H}_q^0$ sono le seguenti autofunzioni normalizzate:

$$\mathbf{E}_q^0 = \sqrt{\frac{2Z^0}{\eta d}}\,\mathbf{e}^0 \sin\frac{q\pi z}{d} \tag{2.14a}$$

$$\mathbf{H}_q^0 = \sqrt{\frac{2\eta}{Z^0 d}}\,\mathbf{h}^0 \cos\frac{q\pi z}{d} \tag{2.14b}$$

(Z^0 è l'impedenza caratteristica della linea, $\mathbf{e}^0$ e $\mathbf{h}^0$ i vettori elettrico e magnetico del modo TEM). La Figura 2.3*g* rappresenta l'andamento del modo TEM_1 in una cavità coassiale.[2]

---

1 I modi degeneri possono essere presenti in tutte le cavità e corrispondono alle autofunzioni che hanno lo stesso autovalore. Il numero dei modi che risuonano ad una stessa frequenza è sempre finito, a causa di una proprietà delle autofunzioni degeneri (vedi Appendice D).

2 Nel caso q = 0 si ha $k_0^0 = 0$, $\mathbf{E}_0^0 = 0$, $\mathbf{H}_0^0 = \sqrt{2\eta / Z^0 d}\,\mathbf{h}^0$. Questa soluzione corrisponde al campo magnetostatico creato da una corrente continua che circola dal conduttore interno a quello esterno attraverso i conduttori terminali. Tale corrente può circolare indefinitamente, perché si è assunto che il conduttore abbia conducibilità infinita. Soluzioni statiche di questo tipo non vengono classificate come modi risonanti. Si può verificare che $\mathbf{H}_0^0$ è l'autofunzione con autovalore nullo del problema (1.10), con la condizione ausiliaria $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$. Essa è l'autofunzione armonica che si ha quando il volume della cavità è duplicemente connesso (vedi Appendice D).

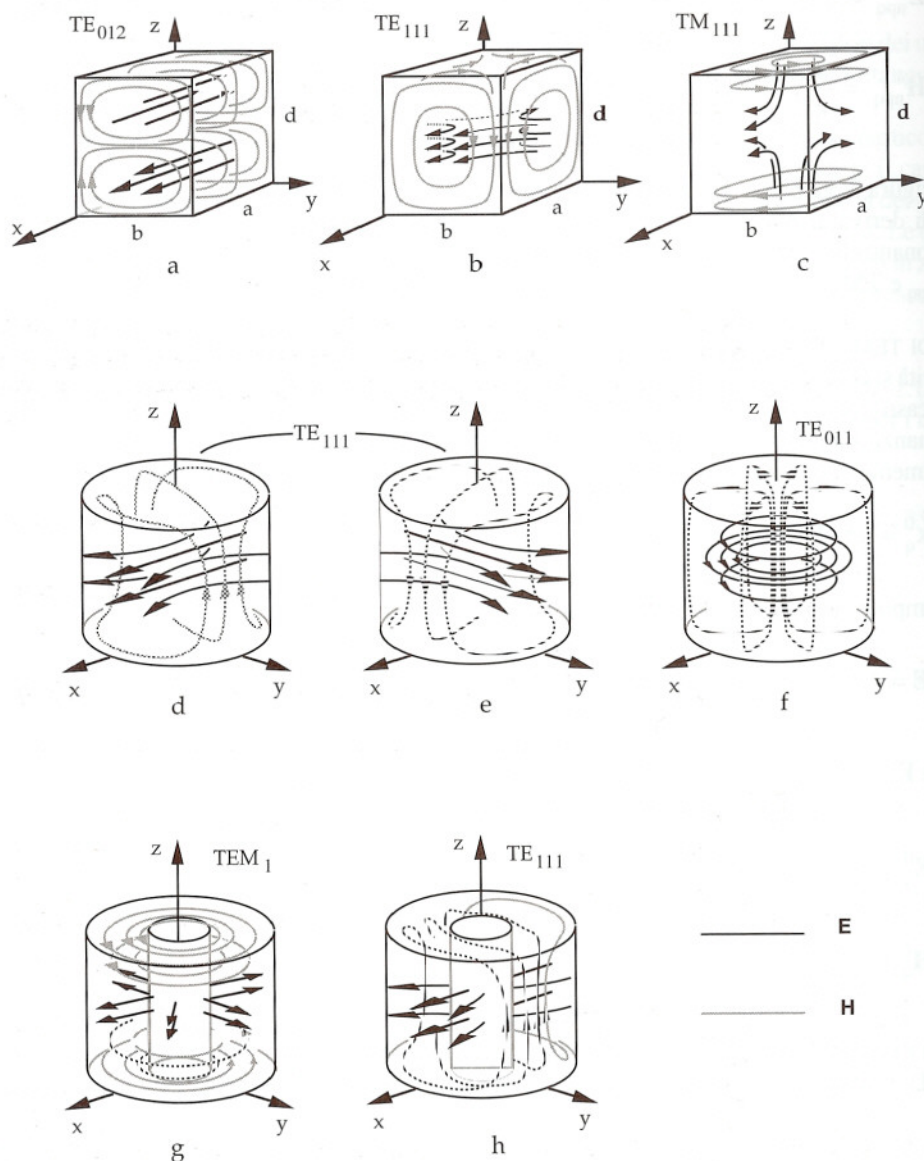



Figura 2.3

LUNGHEZZE D'ONDA DI RISONANZA Le lunghezze d'onda di risonanza sono definite come i valori di λ (per le onde piane uniformi) che si avrebbero alla frequenza di risonanza nel mezzo contenuto nella cavità. Poiché $\lambda = 2\pi/k$, le lunghezze d'onda di risonanza sono:

$$\lambda'_{npq} = \frac{2\pi}{k'_{npq}} = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda'_{np})^2 + (q/2d)^2}} \qquad \text{(modi TM}_{npq}\text{)} \qquad (2.15a)$$

$$\lambda''_{npq} = \frac{2\pi}{k''_{npq}} = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda''_{np})^2 + (q/2d)^2}} \qquad \text{(modi TE}_{npq}\text{)} \qquad (2.15b)$$

$$\lambda^0_q = \frac{2\pi}{k^0_q} = \frac{2d}{q} \qquad \text{(modi TEM}_q\text{)} \qquad (2.15c)$$

dove λ'_{np} e λ''_{np} rappresentano le lunghezze d'onda di taglio dei modi TM e TE della guida. Come gli autovalori, le lunghezze d'onda di risonanza dipendono solo dalla forma e dalle dimensioni della cavità. Ad esempio, nel caso delle cavità a sezione rettangolare e circolare si ha:

CAVITÀ CILINDRICA A SEZIONE RETTANGOLARE

$$\lambda'_{npq} = \frac{2}{\sqrt{(n/a)^2 + (p/b)^2 + (q/d)^2}} \qquad (n, p = 1, 2, ...; q = 0, 1, ...) \qquad (2.16a)$$

$$\lambda''_{npq} = \frac{2}{\sqrt{(n/a)^2 + (p/b)^2 + (q/d)^2}} \qquad \begin{array}{l}(n, p = 0, 1, ...; q = 1, 2, ...)\\ (\text{escluso } n = p = 0, p = 0)\end{array} \qquad (2.16b)$$

CAVITÀ CILINDRICA A SEZIONE CIRCOLARE

$$\lambda'_{npq} = \frac{1}{\sqrt{(x_{np}/2\pi a)^2 + (q/2d)^2}} \qquad (p = 1, 2, ...; n, q = 0, 1, ...) \qquad (2.17a)$$

$$\lambda''_{npq} = \frac{1}{\sqrt{(x'_{np}/2\pi a)^2 + (q/2d)^2}} \qquad (n = 0, 1, ...; p, q = 1, 2, ...) \qquad (2.17b)$$

La frequenza e la lunghezza d'onda di risonanza di un modo qualsiasi sono evidentemente collegate dall'espressione

$$f_{ris} = v/\lambda_{ris} \qquad (2.18)$$

Le frequenze di risonanza dipendono anche dalle permeabilità del mezzo.

Le lunghezze d'onda dei primi modi sono dell'ordine delle dimensioni della cavità che, usualmente, sono dell'ordine dei decimetri o dei centimetri; con queste dimensioni le più basse frequenze di risonanza sono dell'ordine delle centinaia di megahertz o dei gigahertz.

6.3 Oscillazioni smorzate

Nelle cavità reali l'energia dei modi decresce a causa delle perdite nelle pareti e nel mezzo; dunque le oscillazioni sono smorzate. Le pareti sono sempre costituite da metalli ad alta conducibilità e il mezzo è il vuoto, ovvero un dielettrico a basse perdite.[1] Per questa ragione è lecito assumere che il campo istantaneo del modo i-esimo sia ancora rappresentato dalle (1.6), in cui però $\mathcal{A}_i$ e φ_i sono funzioni "lentamente variabili", nel senso che le loro variazioni sono apprezzabili solo in tempi molto più lunghi del periodo $T_i = 2\pi/\omega_i$. Nell'intervallo $(t, t + T_i)$ l'andamento del campo è praticamente sinusoidale, così che l'energia contenuta nella cavità all'istante t può essere calcolata usando l'espressione (1.8), che nel caso di un solo modo assume la forma:

$$u = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \mathcal{A}_i^2 \tag{3.1}$$

Uguagliando l'energia perduta e l'energia dissipata nell'intervallo suddetto si ha

$$u(t) - u(t + T_i) = w(t)\, T_i \tag{3.2}$$

dove w(t) rappresenta la potenza mediamente dissipata nell'intervallo stesso. In generale w è data dalla somma della potenza dissipata nelle pareti conduttrici (w_c) e di quella dissipata nel dielettrico (w_d). Poiché nell'intervallo considerato il campo è praticamente sinusoidale, tali potenze possono essere calcolate mediante le formule dei campi monocromatici, considerando i fasori

$$\mathbf{E} = \mathcal{A}_i \, e^{j\varphi_i} \, \mathbf{E}_i \qquad \mathbf{H} = j \frac{\mathcal{A}_i \, e^{j\varphi_i}}{\eta} \mathbf{H}_i$$

come se $\mathcal{A}_i$ e φ_i fossero costanti. Per la (6.7) del Capitolo 2 si ha:

$$w_c(t) = \frac{R_s}{2} \int_{S_v} |\mathbf{H}|^2 \, dS_v = \frac{R_s \mathcal{A}_i^2}{2\eta^2} \int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2 \, dS_v$$

Per la (8.4) del Capitolo 1 la potenza dissipata nel dielettrico è:

$$w_d(t) = \frac{\omega_i \varepsilon_0 \varepsilon''}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 \, dV = \frac{\omega_i \varepsilon_0 \varepsilon'' \mathcal{A}_i^2}{2} \int_{S_v} |\mathbf{E}_i|^2 \, dV = \frac{\omega_i \varepsilon_0 \varepsilon' \theta_e \mathcal{A}_i^2}{2}$$

---

1 Si assume che il mezzo non sia magnetico e che, alla frequenza di risonanza del modo considerato, si abbia $\varepsilon' \approx \varepsilon_r$. Pertanto si ha: $\theta_e \approx \varepsilon''/\varepsilon_r$; $\eta = \eta_o/\sqrt{\varepsilon_r}$.

Ricavando $\mathcal{A}_i^2$ dalla (3.1) e sostituendo nelle espressioni precedenti si ha:

$$w(t) = \frac{\omega_i\, u(t)}{Q_i} \tag{3.3}$$

dove Q_i è un coefficiente adimensionale dato da:

$$Q_i = \left(\frac{R_S}{\eta k_i} \int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2 \, dS_v + \theta_e \right)^{-1} \tag{3.4}$$

Sostituendo la (3.3) nella (3.2) si ottiene:

$$\frac{u(t + T_i) - u(t)}{T_i} = -\frac{\omega_i}{Q_i}\, u(t)$$

Per l'ipotesi di lenta variabilità dell'energia il rapporto incrementale al primo membro può essere assimilato alla derivata di u; pertanto la precedente espressione può essere sostituita dall'equazione differenziale

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\omega_i}{Q_i} u$$

la cui soluzione è

$$u = u_0\, e^{-(\omega_i / Q_i)t} \tag{3.5}$$

dove u_0 è il valore iniziale. Conseguentemente l'ampiezza delle oscillazioni decresce con la legge

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{0i}\, e^{-(\omega_i / Q_i)t} \tag{3.6}$$

dove $\mathcal{A}_{0i}$ è il valore iniziale. Tanto maggiore è Q_i tanto più lento è lo smorzamento e tanto più la cavità si avvicina al modello ideale senza perdite. Per questa ragione Q_i viene detto "fattore di merito" della cavità per il modo i-esimo. Il significato del fattore di merito diviene più chiaro osservando che per la (3.3) si ha:

$$Q_i = \frac{\omega_i\, u}{w} = \frac{2\pi u}{w T_i} = \frac{2\pi \times \text{energia del modo}}{\text{energia perduta in un periodo}} \tag{3.7}$$

La costante di tempo con cui l'energia decresce è

$$\frac{Q_i}{\omega_i} = \frac{Q_i}{2\pi} T_i$$

Poiché, come si vedrà nel successivo esempio, i valori tipici del fattore di merito sono dell'ordine delle migliaia, la costante di tempo è dell'ordine di parecchie centinaia o delle migliaia di periodi. Questo risultato è coerente con l'ipotesi di lenta variabilità che sta alla base della precedente trattazione.

ESEMPIO: FATTORE DI MERITO DEL MODO TM_{010} NELLA CAVITÀ CILINDRICA A SEZIONE CIRCOLARE Questo modo è rappresentato nella Figura 2.2*b*. Si ha:

$$k'_{010} = \frac{x_{01}}{a} \qquad \lambda'_{011} = \frac{2\pi a}{x_{01}} \qquad (x_{01} = 2.405) \tag{3.8}$$

$$\mathbf{H}'_{010} = \sqrt{\frac{1}{d}}\,\mathbf{h}'_{01} \qquad \left(\mathbf{h}'_{01} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{J_1(x_{01}R/a)}{a\,J_1(x_{01})}\,\mathbf{u}_\phi\right)$$

Pertanto:

$$\int_{S_v} |\mathbf{H}'_{010}|^2 dS_v = 2\frac{1}{d}\int_{\text{Parete piana}} |\mathbf{h}'_{01}|^2 dS + \frac{1}{d}\int_{\text{Parete cil.}} |\mathbf{h}'_{01}|^2 dS$$

L'integrale sulla parete piana è unitario a causa della normalizzazione di $\mathbf{h}'_{01}$. Inoltre sulla parete cilindrica si ha $|h'_{01}|^2 = 1/\pi a^2$. Dunque si ottiene:

$$\int_{S_v} |H'_{010}|^2 dS_v = \frac{2}{d} + \frac{2}{a}$$

Dall'espressione generale del fattore di merito si ricava:

$$Q'_{010} = \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_r}\,R_s(1 + a/d)}{\eta_0\, x_{01}} + \theta_e\right)^{-1} \tag{3.9}$$

■ ESEMPIO NUMERICO Se la cavità è realizzata in rame, se le sue dimensioni sono $a = 2$ cm, $d = 4$ cm e se al suo interno si ha il vuoto, si ottiene:

$$\lambda'_{011} = 5.306 \text{ cm} \qquad f'_{011} = 5.654 \text{ GHz} \qquad R_s = 18 \text{ m}\Omega \qquad Q'_{010} = 16790$$

Se invece la cavità contiene allumina ($\varepsilon_r = 9.6$) e se le sue dimensioni sono ridotte nel rapporto $1/\sqrt{\varepsilon_r} = 0.323$ (in modo da mantenere immutato il valore di f'_{011}, supponendo che alla frequenza di risonanza l'angolo di perdita dell'allumina considerata sia $\theta_e = 10^{-4}$ rad, risulta:

$$Q'_{010} = 3514$$

Nel secondo caso il fattore di merito è molto più basso; questo fa comprendere la ragione per cui normalmente si evita di avere dielettrici all'interno delle cavità. Si noti che in entrambi i casi la costante di tempo è molto maggiore del periodo (2670 periodi nel primo caso, 559 periodi nel secondo). ■

6.4 Sviluppo in autofunzioni

Un campo vettoriale definito in una regione limitata V può essere sviluppato in autofunzioni *vettoriali* dell'operatore di Laplace (vedi Appendice D, Paragrafo 3), con la sola condizione di essere a quadrato sommabile. È possibile usare l'uno o l'altro dei seguenti insiemi di autofunzioni:[1]

$$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_i, \ldots; -\frac{\nabla\psi_1}{\Lambda_1'^{1/2}}, -\frac{\nabla\psi_2}{\Lambda_2'^{1/2}}, \ldots, -\frac{\nabla\psi_i}{\Lambda_i'^{1/2}}, \ldots) \tag{4.1a}$$

$$(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_i, \ldots; -\frac{\nabla\varphi_1}{\Lambda_1''^{1/2}}, -\frac{\nabla\varphi_2}{\Lambda_2''^{1/2}}, \ldots, -\frac{\nabla\varphi_i}{\Lambda_i''^{1/2}}, \ldots) \tag{4.1b}$$

$\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{H}_i$ sono le autofunzioni solenoidali già considerate e i rimanenti vettori sono le autofunzioni irrotazionali; queste ultime sono espresse come gradienti dei potenziali ψ_i e φ_i che, a loro volta, risultano dalla soluzione dei seguenti problemi scalari agli autovalori:

$$\nabla^2\psi_i + \Lambda'_i\,\psi_i = 0 \text{ nel volume V} \qquad \psi_i = 0 \quad \text{sul contorno } S_v \tag{4.2a}$$

$$\nabla^2\varphi_i + \Lambda''_i\,\varphi_i = 0 \text{ nel volume V} \qquad \partial\varphi_i/\partial n = 0 \text{ sul contorno } S_v \tag{4.2b}$$

$$\left(\text{con la normalizzazione} \int_V \psi_i^2\, dV = \int_V \varphi_i^2\, dV = 1\right)$$

Gli sviluppi in autofunzioni possono servire a rappresentare il campo elettromagnetico nella regione V. Tale rappresentazione tornerà utile nel prossimo paragrafo, per studiare le oscillazioni forzate in una cavità. A questo scopo conviene usare l'insieme (4.1*a*) per sviluppare il campo elettrico e l'insieme (4.1*b*) per sviluppare il campo magnetico. Così si ha:

$$\mathbf{E} = \sum_1^\infty {}_i\, A_i\, \mathbf{E}_i - \sum_1^\infty {}_i\, F_i\, \nabla\psi_i \tag{4.3a}$$

$$\mathbf{H} = \sum_1^\infty {}_i\, B_i\, \mathbf{H}_i - \sum_1^\infty {}_i\, G_i\, \nabla\varphi_i \tag{4.3b}$$

1 Per semplificare il discorso si assume che il volume V sia semplicemente connesso e che la superficie di contorno sia unica. Se così non fosse (esempio volume toroidale o volume compreso fra due sfere concentriche) bisognerebbe considerare anche le autofunzioni armoniche, indicate con $\mathbf{E}_i^0$ e $\mathbf{H}_i^0$ nell'Appendice D.

dove:

$$A_i = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_i \, dV \qquad B_i = \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_i \, dV \tag{4.4a}$$

$$F_i = -\frac{1}{\Lambda'_i} \int_V \mathbf{E} \cdot \nabla \psi_i \, dV \qquad G_i = -\frac{1}{\Lambda''_i} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \varphi_i \, dV \tag{4.4b}$$

Affinché gli sviluppi siano utili, è necessario trasformare le espressioni dei coefficienti in modo da esprimerli direttamente in funzione delle sorgenti e delle condizioni al contorno. Si supponga che le sorgenti siano costituite da una densità di corrente elettrica $\mathbf{J}_0$ distribuita nel volume V e che il mezzo sia continuo. In questo caso anche $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sono continui e le espressioni dei coefficienti possono essere trasformate come segue (vedi Equazione D.18, Appendice D):

$$A_i = \frac{1}{k_i} \left(\int_v \mathbf{H}_i \cdot \nabla \times \mathbf{E} \, dV - \int_{s_v} \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{E} \, dS_v \right)$$

$$B_i = \frac{1}{k_i} \int_v \mathbf{E}_i \cdot \nabla \times \mathbf{H} \, dV$$

$$F_i = \frac{1}{\Lambda'_i} \int_v \psi_i \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV$$

$$G_i = \frac{1}{\Lambda''_i} \left(\int_v \varphi_i \nabla \cdot \mathbf{H} \, dV - \int_{s_v} \varphi_i \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \, dS_v \right)$$

Osservando che

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_0 / j\omega\varepsilon = \rho_0 / \varepsilon \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

i coefficienti F_i e G_i vengono espressi in funzione della densità di carica associata alle sorgenti e delle condizioni al contorno; si ha:

$$F_i = -\frac{1}{\varepsilon \Lambda'_i} \int_v \psi_i \, \rho_0 \, dV \tag{4.5a}$$

$$G_i = -\frac{1}{\Lambda''_i} \int_{s_v} \varphi_i \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \, dS_v \tag{4.5b}$$

Inoltre, eliminando $\nabla \times \mathbf{E}$ e $\nabla \times \mathbf{H}$ dalle espressioni di A_i e B_i mediante le equazioni di Maxwell si ha:

$$A_i = \frac{1}{k_i}\left(\int_V \mathbf{H}_i \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H})\,dV - \int_{S_V} \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{E}\,dS_V\right)$$

$$B_i = \frac{1}{k_i}\int_V \mathbf{E}_i \cdot (j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_0)\,dV$$

Quindi, tenendo conto delle (4.4*a*), si ottiene:

$$k_i A_i + j\omega\mu B_i = -\int_{S_V} \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{E}\,dS_V \tag{4.6a}$$

$$j\omega\varepsilon A_i - k_i B_i = -\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0\,dV \tag{4.6b}$$

La risoluzione di questo sistema permette di esprimere anche i coefficienti A_i e B_i in funzione delle sorgenti e del campo elettrico tangenziale al contorno.

6.5 Oscillazioni forzate di una cavità

Si consideri una cavità delimitata da una sola parete conduttrice e comprendente un volume semplicemente connesso (Figura 5.1). Il campo prodotto da sorgenti elettriche di pulsazione ω agenti nella cavità può essere espresso mediante lo sviluppo in autofunzioni (4.3). Si suppone che il mezzo sia a basse perdite (o senza perdite) e che alla pulsazione ω le permeabilità siano rappresentate da:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r(1 - j\theta_e) \qquad \mu = \mu_0$$

Pertanto si ha:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon_r} \qquad \eta = \eta_0/\sqrt{\varepsilon_r}$$

Le pareti della cavità sono costituite da un metallo a elevata conducibilità o - idealmente - da un conduttore perfetto.

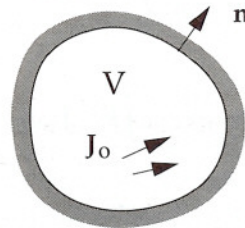



Figura 5.1

CAVITÀ IDEALE In questo caso si ha $\theta_e = 0$ e sulla parete risulta:[1]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$$

Dalla (4.5*b*) si ottiene:

$$G_i = 0 \tag{5.1}$$

Osservando che l'autovalore corrispondente alla frequenza di risonanza dell'i-esimo modo è

$$k_i = \frac{\omega_i}{v} = \frac{\omega_i \sqrt{\varepsilon_r}}{c}$$

dalle (4.6) si ottiene:

$$\omega_i \sqrt{\varepsilon_r}\, A_i + j\omega c \mu_0 B_i = 0$$

$$j\omega c \varepsilon_0 \varepsilon_r A_i - \omega_i \sqrt{\varepsilon_r}\, B_i = -c \int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV$$

Il determinante del sistema è dato da

$$\det = \varepsilon_r (\omega^2 - \omega_i^2) \tag{5.2}$$

Esso si annulla per $\omega = \omega_i$; pertanto, se si suppone

$$\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV \neq 0$$

la soluzione del sistema esiste purché la frequenza della sorgente non coincida con la frequenza di risonanza del modo i-esimo. Si ha:

$$A_i = \frac{j\omega \eta v}{\omega^2 - \omega_i^2} \int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV \tag{5.3a}$$

$$(\omega \neq \omega_i)$$

$$B_i = -\frac{v\omega_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV \tag{5.3b}$$

I due coefficienti divergono quando quando ω tende a ω_i.

1 Sull'interfaccia fra un conduttore perfetto e un mezzo isotropo la componente normale del campo magnetico è nulla. Questa proprietà dipende dalla continuità della componente normale di **B** e dall'annullamento di **B** dentro il conduttore.

Sostituendo le (5.1), (5.3) e (4.5*a*) nelle (4.3) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \sum_{1}^{\infty} {}_i \frac{j\omega\eta v}{\omega^2 - \omega_i^2} \left(\int_v \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV \right) \mathbf{E}_i + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sum_{1}^{\infty} {}_i \left(\int_v \psi_i \rho_0 \, dV \right) \frac{\nabla \psi_i}{\Lambda'_i} \tag{5.4a}$$

$$\mathbf{H} = \sum_{1}^{\infty} {}_i \frac{-v\omega_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \left(\int_v \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV \right) \mathbf{H}_i \tag{5.4b}$$

Quando ω è prossimo a ω_i i termini in $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{H}_i$ divengono molto grandi e dominano su tutti gli altri; in queste condizioni si ha:

$$\mathbf{E} \approx \frac{j\omega\eta v}{\omega^2 - \omega_i^2} \left(\int_v \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV \right) \mathbf{E}_i \tag{5.5a}$$

$$(\omega \approx \omega_i)$$

$$\mathbf{H} \approx \frac{-v\omega_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \left(\int_v \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV \right) \mathbf{H}_i \tag{5.5b}$$

Dunque in prossimità della i-esima risonanza il campo diviene molto intenso e tende ad assumere invariabilmente la conformazione dell'i-esimo modo, qualunque sia l'andamento delle sorgenti (esclusi i casi particolari in cui l'integrale è nullo).

■ Il contributo delle autofunzioni irrotazionali può essere espresso in modo diverso; infatti si può mostrare che

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{1}^{\infty} {}_i \left(\int_v \psi_i \rho_0 \, dV \right) \frac{\nabla \psi_i}{\Lambda'_i} = -\nabla u$$

dove v soddisfa:

$\nabla^2 u = -\rho_0/\varepsilon$ nel volume V

$u = 0$ sul contorno S_v

v è soluzione dell'equazione di Poisson con la condizione al contorno di Dirichelet, proprio come il potenziale elettrostatico che verrebbe prodotto nella cavità dalla densità di carica ρ_0. Quindi, nell'espressione generale del campo elettrico, la serie contenente le autofunzioni irrotazionali rappresenta un contributo quasi-statico, direttamente collegato alle cariche. ■

CAVITÀ REALE Si intuisce che, a causa delle perdite, il campo in una cavità reale rimane finito anche quando la frequenza della sorgenti tende a una frequenza propria. Nel caso della cavità ideale la crescita illimitata del campo dipendeva dall'annullamento del determinante

(5.2), così che, per trovare l'effettivo valore raggiunto dal campo alla risonanza, bisogna valutare di nuovo il determinante, senza trascurare né la conducibilità finita delle pareti né l'angolo di perdita del dielettrico. Poiché la conducibilità è elevatissima e l'angolo di perdita è piccolissimo, ci si può attendere che in prossimità della i-esima risonanza il determinante debba ridursi a valori piccolissimi senza tuttavia annullarsi. Conseguentemente si può prevedere che i coefficienti A_i e B_i, pur rimanendo finiti, divengano molto maggiori di tutti gli altri coefficienti dello sviluppo in autofunzioni.

Il campo elettrico sulla parete soddisfa la condizione di Leontovic

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = R_s(1 + j)\mathbf{H}$$

Poiché in prossimità della risonanza il termine in $\mathbf{H}_i$ domina su tutti gli altri termini presenti nello sviluppo di $\mathbf{H}$ si può assumere

$$\mathbf{H} \approx B_i\, \mathbf{H}_i \tag{5.6}$$

e quindi:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \approx R_s(1 + j)B_i\mathbf{H}_i$$

Sostituendo nelle (4.6) risulta:

$$\omega_i \sqrt{\varepsilon_r}\, A_i + c\left(j\omega\mu_0 + R_s(1+j)\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v \right)B_i = 0 \tag{5.7a}$$

$$j\omega c\varepsilon_0\varepsilon_r(1 - j\theta_e)A_i - \omega_i \sqrt{\varepsilon_r}\, B_i = -c\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0\, dV \tag{5.7b}$$

Calcolando il determinante del sistema e trascurando i termini che contengono il prodotto $\theta_e R_s$ si ottiene:

$$\omega^2 - j\omega\left(\omega\theta_e + \frac{R_s}{\mu_0}\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v \right) + \omega\frac{R_s}{\mu_0}\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v - \omega_i^2$$

Come previsto il determinate non si annulla per alcun valore reale di ω ma diviene molto piccolo quando ω è prossimo a ω_i. Il mancato annullamento dipende dalla parte immaginaria che, per quanto piccola, non può essere trascurata. Invece il termine reale proporzionale a R_s può essere ignorato, perché questo comporta solo un piccolo errore sulla frequenza di annullamento della parte reale. L'effetto delle perdite è importante solo in prossimità della risonanza così che, nel valutare la parte immaginaria del determinate, è lecito fare la seguente approssimazione:

$$\omega\theta_e + \frac{R_s}{\mu_0}\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v \approx \left(\omega\theta_e + \frac{R_s}{\mu_0}\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v\right)_{\omega=\omega_i} =$$

$$\omega_i\left(\theta_e + \frac{R_s}{\omega_i\,\mu_0}\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v\right)_{\omega=\omega_i} = \omega_i\left(\theta_e + \frac{R_s}{k_i\,\eta}\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v\right)_{\omega=\omega_i}$$

ovvero, ricordando la definizione del fattore di merito:

$$\omega\,\theta_e + \frac{R_s}{\mu_0}\int_{S_v} |\mathbf{H}_i|^2\, dS_v \approx \frac{\omega_i}{Q_i}$$

In definitiva, al fine di una valutazione sufficientemente accurata di A_i e di B_i in prossimità di ω_i, è lecito fare la seguente approssimazione:

$$\det \approx \varepsilon_r\left(\omega^2 - j\frac{\omega\,\omega_i}{Q_i} - \omega_i^2\right)$$

Risolvendo le (5.7) e ignorando i termini in R_s e θ_e che risultano al numeratore di A_i e B_i, si ottengono formule analoghe alle (5.3) in cui però, in luogo della differenza $\omega^2 - \omega_i^2$ che appare al denominatore, si ha la quantità $\omega^2 - j\omega\,\omega_i/Q_i - \omega_i^2$. Ne consegue che, in prossimità della i-esima risonanza, le (5.5) vengono sostituite dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{E} \approx \frac{j\omega\,\eta\,v}{\omega^2 - j\dfrac{\omega\,\omega_i}{Q_i} - \omega_i^2}\left(\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0\, dV\right)\mathbf{E}_i \qquad (5.8a)$$

$$(\omega \approx \omega_i)$$

$$\mathbf{H} \approx \frac{-v\omega_i}{\omega^2 - j\dfrac{\omega\,\omega_i}{Q_i} - \omega_i^2}\left(\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0\, dV\right)\mathbf{H}_i \qquad (5.8b)$$

Proprio alla risonanza il campo assume i valori:

$$\mathbf{E}_{ris} \approx -\eta\frac{Q_i}{k_i}\left(\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0\, dV\right)\mathbf{E}_i \qquad (5.9a)$$

$$\mathbf{H}_{ris} \approx -j\frac{Q_i}{k_i}\left(\int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_0 \, dV\right)\mathbf{H}_i \tag{5.9b}$$

L'intensità del campo alla risonanza è proporzionale al fattore di merito.

Le (5.8) possono essere riscritte nella seguente forma, che evidenzia la dipendenza del campo dalla frequenza intorno ai valori di risonanza:

$$\mathbf{E} \approx \frac{j\omega\,\omega_i/Q_i}{\omega_i^2 + j\omega\,\omega_i/Q_i - \omega^2}\,\mathbf{E}_{ris} \tag{5.10a}$$

$$\mathbf{H} \approx \frac{j\omega_i^2/Q_i}{\omega_i^2 + j\omega\,\omega_i/Q_i - \omega^2}\,\mathbf{H}_{ris} \tag{5.10b}$$

La Figura 5.2 mostra il tipico picco che caratterizza l'andamento dell'ampiezza del campo in prossimità della frequenza di risonanza.
La larghezza del picco, definita come l'intervallo di frequenze in cui le ampiezze di **E** e di **H** superano $E_{ris}/\sqrt{2}$ e $H_{ris}/\sqrt{2}$, è data da

$$(\Delta\omega)_i = \omega_i/Q_i \tag{5.11}$$

Per rappresentare l'andamento del campo a frequenza non necessariamente prossime a quelle di risonanza bisogna usare espressioni simili alle (5.4), in cui però i denominatori $\omega^2 - \omega_i^2$ vengono modificati aggiungendo il termine dipendente dai fattori di merito. La Figura 5.3 rappresenta l'andamento tipico dell'ampiezza del campo elettrico osservato in un certo punto, al variare della frequenza della sorgente. I picchi corrispondono alle risonanze dei vari modi. Si nota che al crescere di ω le frequenze di risonanza si addensano e i picchi tendono a sovrapporsi. Quando la frequenza cresce al punto da rendere la distanza fra le

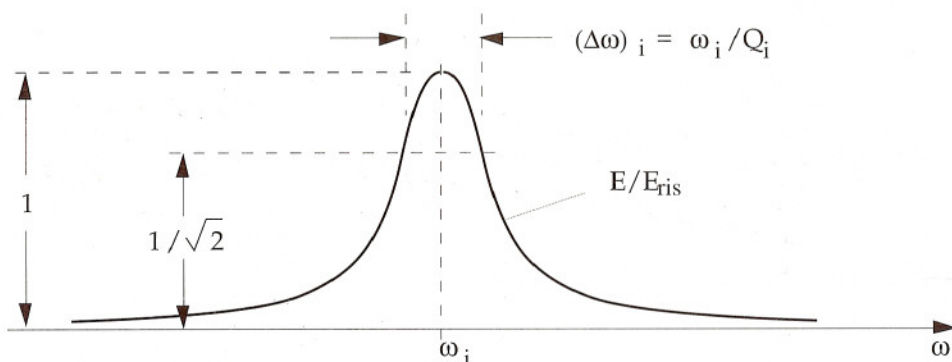



Figura 5.2

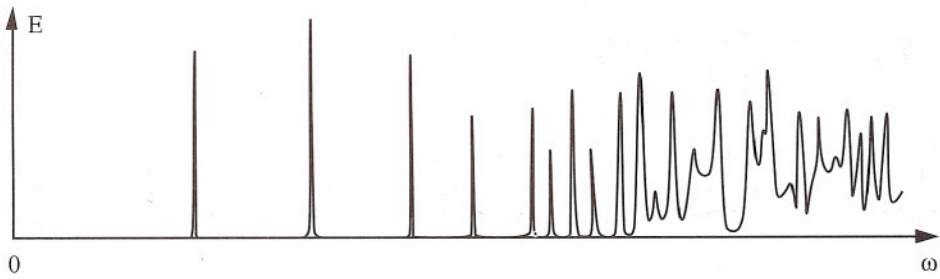



Figura 5.3

pulsazioni di risonanza paragonabile alla larghezza teorica dei picchi (Equazione 5.11), i picchi stessi si confondono e la valutazione dell'effetto delle perdite basata sull'approssimazione (5.5) non è più accettabile, perché i modi prossimi a quello i-esimo hanno ampiezza non trascurabile.

CENNI SULLE CAVITÀ COME ELEMENTI CIRCUITALI Lo studio delle oscillazioni forzate può essere svolto senza particolari difficoltà anche nel caso di cavità collegate a linee (o guide d'onda) attraverso piccole aperture,[1] come, ad esempio, nel caso della Figura 5.4*a*. Lo studio è sempre basato sullo sviluppo in autofunzioni. Nella determinazione dei vari coefficienti (Equazioni 4.5 e 4.6) gli integrali di volume sono nulli (non si hanno sorgenti interne) mentre gli integrali di superficie dipendono essenzialmente dai campi elettrici sulle porte. Poiché tali campi sono proporzionali alle tensioni, i coefficienti dello sviluppo in autofunzioni vengono trovati sotto forma di combinazioni lineari delle tensioni stesse. Anche in questo caso si trova che il campo diviene molto intenso quando la frequenza è prossima ad una frequenza di risonanza e che la configurazione del campo tende a quella di un modo puro.

Considerando lo sviluppo del campo magnetico, le correnti alle porte vengono trovate sotto forma di serie, in funzione delle tensioni. Si trova che in prossimità della i-esima risonanza la relazione fra le tensioni e le correnti è analoga a quella che caratterizza il circuito

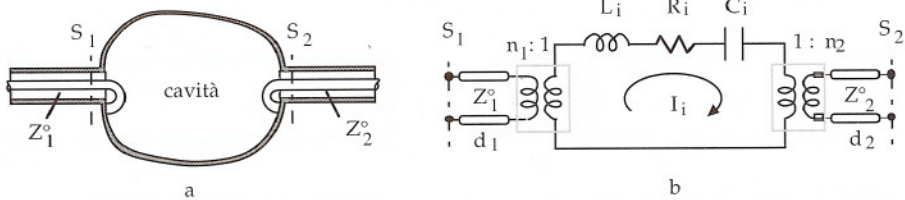



Figura 5.4

1 K. Kurokawa, *An Introduction to the Theory of Microwave Circuits*, Academic Press, NewYork-London, 1969, Capitolo 4.

equivalente rappresentato nella Figura 5.4*b*. Nel circuito LRC la frequenza di risonanza e il fattore di merito corrispondono a quelli dell'i-esimo modo; si ha infatti:

$$\frac{1}{\sqrt{L_i C_i}} = \omega_i \qquad \frac{\omega_i L_i}{R_i} = Q_i$$

Le lunghezze delle linee (d_1, d_2) e i rapporti di trasformazione (n_1, n_2) dipendono dalla conformazione del sistema di accoppiamento fra la guida e la cavità e dal posizionamento delle porte. Il campo nella cavità è proporzionale alla corrente I_i.

In pratica, per una data cavità, i valori degli elementi del circuito equivalente possono essere determinati sperimentalmente, mediante opportune misure effettuate in uno stretto intorno della frequenza di risonanza.

Poiché l'impedenza del circuito risonante è bassa solo in prossimità della pulsazione ω_i, l'accoppiamento fra le due linee è apprezzabile solo vicino alla risonanza; pertanto la cavità si comporta come un filtro selettivo che trasmette solo in una stretta banda intorno a ω_i. Lontano dalla risonanza il campo è debole ed è essenzialmente localizzato in prossimità della guida d'ingresso; solo in prossimità della risonanza il campo si intensifica in tutta la cavità, dando luogo all'accoppiamento fra ingresso e uscita.

6.6 Cavità riconducibili a circuiti comprendenti linee di trasmissione

La Figura 6.1 rappresenta due esempi di cavità scomponibili in tronchi di linee (Figura 6.1*a*) e in elementi circuitali concentrati (Figura 6.1*b*). Nei modi di risonanza che cadono nel campo di frequenze in cui le linee trasmettono solo onde TEM, il campo ha andamento di un'onda stazionaria di tipo TEM nelle linee e andamento quasi-statico negli elementi concentrati. Per studiare questi modi si può usare la seguente tecnica circuitale.

Si supponga di applicare un generatore di corrente in una generica sezione AA' (Figura 6.2*a*) e di regolarne la frequenza facendola variare in tutta la banda in cui si vogliono trovare le risonanze. Si supponga che le linee e gli elementi concentrati siano senza perdite. Come si è visto nel paragrafo precedente, il campo diverge quando la frequenza del generatore

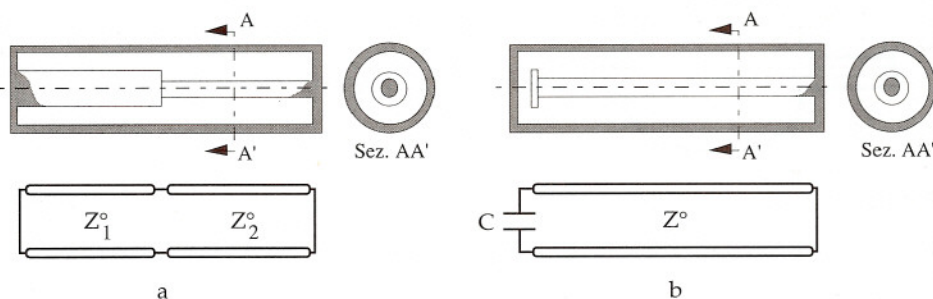



Figura 6.1

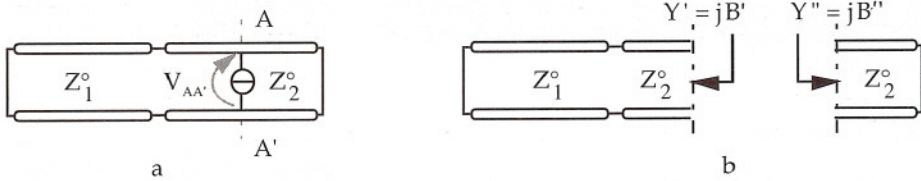



Figura 6.2

tende a una delle frequenze di risonanza; in particolare diverge la tensione $V_{AA'}$ ai capi del generatore. Per questa ragione, in corrispondenza delle risonanze, l'impedenza vista dal generatore è infinita e l'ammettenza è nulla. L'ammettenza vista dal generatore è data dalla somma delle ammettenze Y' e Y" viste verso sinistra e verso destra (Figura 6.2*b*); pertanto le frequenze di risonanza possono essere determinate trovando i valori di ω per i quali si ha:

$$Y'(\omega) + Y''(\omega) = 0$$

Avendo ignorato le perdite le due ammettenze sono immaginarie; pertanto la precedente espressione può essere scritta introducendo le suscettanze B' e B", ottenendo la seguente equazione che ha come soluzioni le frequenze di risonanza:

$$B'(\omega) + B''(\omega) = 0 \tag{6.1}$$

In realtà il criterio descritto non permette di ricavare le frequenze di eventuali modi per i quali si ha un nodo di tensione proprio nella sezione AA'; infatti questi modi non sono eccitati dal generatore.[1] D'altro canto, se si ha un nodo di tensione, le suscettanze B' e B" divergono; dunque queste particolari risonanze - se esistono - avvengono a frequenze per cui sia B' che B" sono infinite. Pertanto il criterio sopra descritto deve essere completato considerando anche questa eventualità.

ESEMPIO Nel caso della cavità di Figura 6.1*b*, scegliendo la sezione AA' ai capi del condensatore si ha (vedi Equazione 3.6, Capitolo 5)

$$\omega C - \frac{1}{Z^0 \operatorname{tg}(\omega d / v)} = 0$$

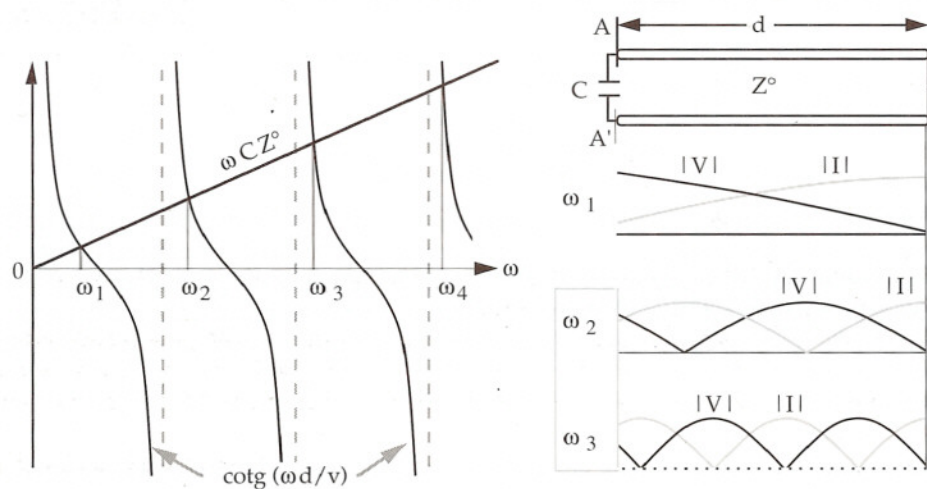
ovvero:

$$\operatorname{cotg}(\omega d/v) = \omega C Z^0 \tag{6.2}$$

1 Il campo elettrico è proporzionale alla tensione e quindi - nei modi in questione - è nullo nella sezione AA'. Pertanto, in questi particolarissimi modi, le autofunzione $\mathbf{E}_i$ sono nulle nella zona occupata dalla sorgente e, a causa delle (5.3), i modi stessi non vengono eccitati.

Le soluzioni di questa equazione sono le pulsazioni di risonanza ω_1, ω_2, ... indicate nel grafico di Figura 6.3. L'andamento delle onde stazionarie per i primi tre modi è indicato nella stessa figura.

Figura 6.3

7
Radiazione

Questo capitolo è dedicato allo studio del campo generato da sorgenti monocromatiche in un mezzo isotropo, omogeneo e illimitato.

Il capitolo inizia con l'introduzione dei potenziali di Lorentz, che sono particolarmente adatti a trattare questo problema. Viene mostrato che, nel caso monocromatico, il campo può essere dedotto da un solo potenziale vettoriale che soddisfa l'equazione di Helmoltz inomogenea.
La soluzione di questa equazione, ricavata nell'Appendice G, ha la forma di un integrale che può essere semplificato se il campo viene considerato a grande distanza dalle sorgenti (Paragrafi 3 e 4).
Lo studio del campo a grande distanza mostra che le onde elettromagnetiche trasportano verso l'infinito l'energia erogata dalle sorgenti (radiazione). I Paragrafi 5, 6, 7 riguardano le proprietà delle sorgenti di dimensioni trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda, il cui comportamento può essere studiato in generale, senza far riferimento a casi specifici. Il Paragrafo 8 tratta la radiazione nei mezzi a basse perdite e mostra come, in questo caso, sia semplice tener conto delle dissipazioni.

Le espressioni del potenziale e del campo generato da sorgenti magnetiche sono analoghe a quelle trovate nel caso delle sorgenti elettriche e possono essere dedotte da queste mediante un opportuno scambio di simboli (dualità). Questo argomento è trattato nel Paragrafo 9.

Lo studio del campo a grande distanza evidenzia il fatto che, nei problemi riguardanti regioni illimitate, la sfera all'infinito può essere vista come una particolare superficie d'impedenza. Ciò permette di estendere alle regioni illimitate i teoremi di unicità, di equivalenza e di reciprocità visti nel Capitolo 4. Questo argomento viene discusso nel Paragrafo 10.
Applicando i teoremi di unicità e le regole di equivalenza è possibile determinare molto semplicemente il campo generato da sorgenti che agiscono in presenza di superfici piane conduttrici (Paragrafo 11) e di utilizzare i risultati trovati nella prima parte del capitolo per studiare il campo in un semispazio, quando sia noto il campo elettrico tangenziale al piano che lo delimita.
Questo problema, discusso negli ultimi cinque paragrafi, è di basilare importanza per lo studio di certi tipi di antenne (vedi Capitolo 8) e per quello dei fenomeni di diffrazione (vedi Capitolo 9). La sua trattazione richiede l'impiego dell'integrale di Fourier, le cui principali proprietà sono brevemente riassunte nell'Appendice F.

7.1 Potenziali di Lorentz

In assenza di sorgenti magnetiche si ha:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad \nabla \cdot \mu\mathbf{H} = 0 \tag{1.1}$$

Poiché $\mu\mathbf{H}$ è solenoidale, esiste un potenziale vettoriale $\mathbf{A}$ (definito a meno di un vettore irrotazionale) tale che

$$\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Sostituendo nella prima delle (1.1) si ottiene:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\, \mathbf{A}) = 0$$

Il vettore irrotazionale in parentesi può essere espresso come il gradiente di un opportuno potenziale scalare Φ, definito a meno di una costante:

$$\mathbf{E} + j\omega\, \mathbf{A} = -\nabla\Phi$$

Dunque è possibile considerare due opportuni potenziali, $\mathbf{A}$ e Φ, noti i quali $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ vengono dedotti mediante le seguenti relazioni:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - j\omega\, \mathbf{A} \tag{1.2a}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu} \tag{1.2b}$$

La sola struttura di queste espressioni, indipendentemente dalla forma dei potenziali, garantisce che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ soddisfino le (1.1).

Se nel mezzo agiscono sorgenti elettriche di densità $\mathbf{J}_0$ vale l'equazione

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \tag{1.3}$$

Essa pone un vincolo ai potenziali; infatti, sostituendo le (1.2) nella (1.3) e assumendo che il mezzo sia omogeneo, si ottiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2\, \mathbf{A} + j\omega\, \varepsilon\mu\, \nabla\Phi = \mu\, \mathbf{J}_0$$

dove - come al solito - si è posto $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$ (si assume che k sia definito dalle (1.5) del Capitolo 2). Usando l'identità $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\, \mathbf{A} - \nabla\, (\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\, \varepsilon\mu\, \Phi) = -\, \mu\, \mathbf{J}_0 \tag{1.4}$$

I potenziali che determinano un dato campo elettromagnetico non sono unici. Infatti se a una coppia di potenziali $\mathbf{A}$ e Φ che soddisfano la (1.4) si sostituiscono nuovi potenziali

$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ e $\Phi' = \Phi - j\omega\,\chi$ (χ = campo scalare arbitrario), i nuovi potenziali soddisfano pure la (1.4) e, attraverso le (1.2), forniscono gli stessi valori di **E** e **H** (la semplice verifica è lasciata al lettore). Questa proprietà, usualmente indicata col termine inglese "gauge invariance", può essere sfruttata per imporre ai potenziali una condizione aggiuntiva, conveniente dal punto di vista matematico e/o fisico. Fra le diverse condizioni possibili la più comune è la "condizione di Lorentz":

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\,\varepsilon\mu\,\Phi = 0 \tag{1.5}$$

Imponendo questa condizione il potenziale scalare viene eliminato dalla (1.4), che assume la forma più semplice:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu\, \mathbf{J}_0 \tag{1.6}$$

I potenziali **A** e Φ soggetti alla (1.5) vengono detti "potenziali di Lorentz". Si noti che, a causa della (1.5), il potenziale scalare viene ottenuto immediatamente se si conosce la soluzione della (1.6). Infatti si ha:

$$\Phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu} \tag{1.7}$$

Eliminando il potenziale scalare dalla (1.2*a*) si ottiene la seguente relazione, che permette di dedurre il campo elettrico dal solo potenziale vettoriale:

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu} - j\omega\,\mathbf{A} \tag{1.8}$$

In definitiva il calcolo di **E** e **H** viene ricondotto alla determinazione di **A**, cioè alla soluzione della (1.6).

Le componenti cartesiane del laplaciano di un vettore sono uguali al laplaciano delle componenti dello stesso vettore. Pertanto, proiettando entrambi i membri della (1.6) sugli assi, si ottengono tre equazioni del tipo:[1]

$$\nabla^2 A_\alpha + k^2 A_\alpha = -\mu\, J_{0\alpha} \qquad (\alpha = x, y, z) \tag{1.9}$$

Nello studio della radiazione le (1.9) sono definite in tutto lo spazio. Le correnti differiscono da zero solo in una regione limitata.

7.2 Potenziale vettoriale in un un mezzo illimitato

La soluzione della (1.9) non è unica. Infatti, nota una soluzione particolare, è possibile ottenerne un'altra aggiungendo ad essa una soluzione qualsiasi dell'equazione omogenea

1 Le equazioni del tipo (1.9) prendono il nome di equazioni di Helmoltz inomogenee.

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

che ammette infinite soluzioni. Ad esempio, come il lettore può facilmente verificare, l'equazione omogenea è soddisfatta da qualunque funzione d'onda piana del tipo

$$\psi = \psi_0\, e^{-jk\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}$$

Affinché la (1.9) abbia una sola soluzione bisogna imporre opportune condizioni, derivanti da considerazioni fisiche. Precisamente, poiché nel problema della radiazione l'unica sorgente del campo è la corrente impressa nel volume V, bisogna imporre le condizioni matematiche necessarie a escludere tutte le soluzioni che non hanno il significato di effetti di $\mathbf{J}_0$. Nell'Appendice G viene mostrato che l'unica soluzione dotata di questo significato è:

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V J_{0\alpha}(\mathbf{r}')\frac{e^{-jkR}}{R}\,dV' \qquad (\alpha = x,\ y,\ z) \tag{2.1}$$

Il significato dei simboli è chiarito dalla Figura 2.1. Le variabili d'integrazione sono le coordinate del punto $\mathbf{r}'$ ("punto sorgente") e R rappresenta la distanza fra $\mathbf{r}'$ ed $\mathbf{r}$ ("punto d'osservazione"). Si noti che 1/R diverge quando $\mathbf{r}'$ tende a $\mathbf{r}$; per questa ragione, quando il punto di osservazione è interno alla sorgente, l'integrale deve essere inteso nel senso del limite

$$\int_V = \lim_{V_0\to 0}\int_{V-V_0}$$

avendo indicato con V_0 un elemento infinitesimo di volume preso intorno a $\mathbf{r}$. La singolarità di 1/R è sufficientemente debole per assicurare l'esistenza del limite e la sua indipendenza dalla forma di V_0.

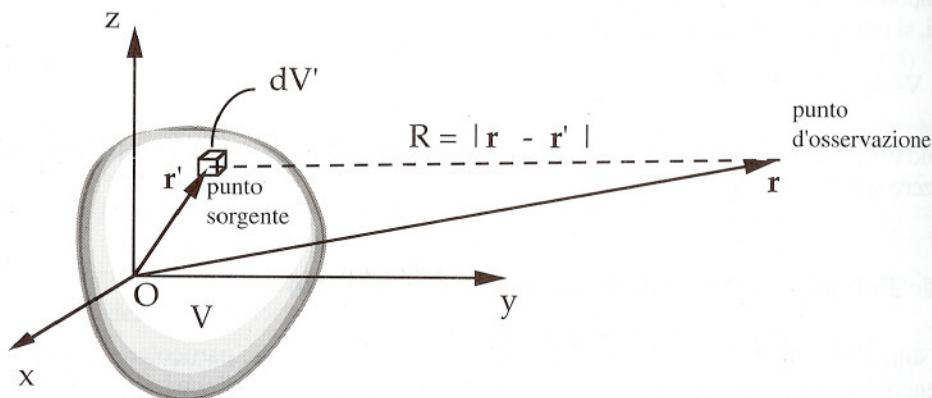



Figura 2.1

Poiché l'espressione (2.1) è identica per le tre componenti di **A**, si può anche scrivere:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\frac{e^{-jkR}}{R}dV' \tag{2.2}$$

Questa espressione rappresenta il potenziale vettoriale generato in un mezzo omogeneo, isotropo e illimitato, da sorgenti elettriche localizzate nella regione V. L'espressione è valida in ogni punto d'osservazione, interno o esterno a V.

Secondo la (2.2) **A** è ottenuto per sovrapposizione di infiniti contributi elementari del tipo

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')dV'\frac{e^{-jkR}}{R} = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')dV'\frac{e^{-\alpha R}\,e^{-j\beta R}}{R}$$

dove $\beta = \mathrm{Re}[k]$ e $\alpha = -\mathrm{Im}[k]$ coincidono con le costanti di fase e di attenuazione delle onde piane uniformi nel mezzo considerato. Evidentemente ciascun contributo elementare è un'onda sferica che si propaga dal punto sorgente verso l'infinito, con la stessa velocità di fase delle onde piane uniformi. Però la funzione d'onda (2.2), ottenuta per sovrapposizione delle onde elementari, generalmente non rappresenta un'onda sferica, né ha velocità di fase uguale in tutti i punti.

La (2.2) vale nel caso di una sorgente distribuita nel volume V. Molto spesso, però, bisogna considerare situazioni in cui le sorgenti sono correnti superficiali. Indicata con S la superficie su cui è concentrata la corrente e con $\mathbf{J}_s$ la densità della corrente superficiale, appare spontaneo estrapolare dalla (2.2) l'espressione da usare in questo caso rimpiazzando gli elementi di sorgente volumetrici con elementi superficiali, mediante la sostituzione:

$$\mathbf{J}_0\,dV \to \mathbf{J}_s\,dS$$

Così si ottiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\frac{e^{-jkR}}{R}dS' \qquad (\mathbf{r}' \in S,\ \mathbf{r} \notin S) \tag{2.3}$$

Il procedimento, pur non rigoroso, dà luogo a una espressione esatta. In effetti si può verificare che i campi dedotti dalla (2.3) soddisfano le equazioni di Maxwell e che il loro comportamento attraverso la lamina è quello corretto (Equazione 5.3, Capitolo 1). La verifica non è immediata e viene omessa per brevità.

7.3 Approssimazioni a grande distanza

Gli integrali (2.2) (2.3) possono essere sostituiti da integrali più semplici se ci si limita a considerare il campo a grande distanza dalla sorgente. In questo caso infatti è possibile fare certe approssimazioni che semplificano notevolmente la funzione da integrare. Il caso in cui

lo studio del campo a grande distanza ha maggiore interesse è quello in cui il mezzo ha attenuazione nulla (vuoto) o trascurabile (esempio aria). In questo caso si può scrivere

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

dove λ è la lunghezza d'onda delle onde piane uniformi alla frequenza di lavoro. Facendo riferimento alla Figura 3.1 si ha:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\chi} = r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r)\cos\chi}$$

dove r'/r è una quantità tanto minore quanto maggiore è la distanza fra il punto di osservazione e la sorgente. Sviluppando la radice in serie di potenze di r'/r si ottiene:

$$\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r)\cos\chi} = 1 - \cos\chi\left(\frac{r'}{r}\right) + \frac{\sin^2\chi}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + O\{(r'/r)^3\}$$

e quindi:

$$R = r - r'\,[\cos\chi - (r'/2r)\sin^2\chi + O\{(r'/r)^2\}]$$

Per fare le approssimazioni bisogna paragonare la distanza del punto d'osservazione all'estensione della sorgente, definita come il diametro D della più piccola sfera che contiene la sorgente stessa (Figura 3.1). Ponendo l'origine del sistema di riferimento al centro della sfera, la distanza è "grande" se $r \gg D$. La condizione $r \gg D$ implica $r'/r \ll 1$; pertanto, in base alla precedente espressione di R, si possono fare le seguenti approssimazioni:

$$1/R \approx 1/r \qquad (3.1a)$$

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr}\, e^{jk\,r'\cos\chi} \qquad (3.1b)$$

Si noti che nella (3.1*a*) è stata fatta l'approssimazione $R \approx r$, mentre nella (3.1*b*) si è posto $R \approx r - r'\cos\chi$; infatti nell'esponenziale non è lecito trascurare il termine $r'\cos\chi$, perché la quantità

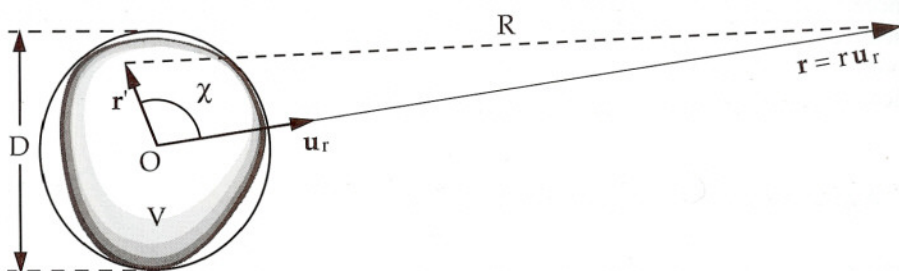



Figura 3.1

$$k\,r'\cos\chi = \frac{2\pi}{\lambda} r'\cos\chi$$

(da cui dipende la fase dei contributi dei vari elementi di sorgente) non tende a zero al crescere di r. L'approssimazione (3.1*a*) richiede soltanto che la distanza sia sufficientemente grande rispetto all'estensione della sorgente. Siccome l'errore che si compie nel porre $R \approx r$ non supera D/2, l'approssimazione è migliore del 5% se

$$r > 10\,D \tag{3.2}$$

L'errore di fase che si compie nell'approssimazione (3.1*b*) è

$$\Delta = k\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\chi + r'^2} - k(r - r'\cos\chi)$$

Calcolando il massimo di Δ al variare di χ si trova

$$\Delta_{max} = kr'^2/2r \;\le\; k(D/2)^2/2r = \pi D^2/4\lambda r.$$

Assumendo che sia ammissibile un errore di fase massimo di $\pi/8$, si deduce che l'approssimazione (3.1*b*) diviene accettabile se

$$r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

Se la (3.2) e la precedente condizione sono entrambe verificate, nelle espressioni (2.2) e (2.3) si può porre

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jkr'\cos\chi} = \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\,\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'} \tag{3.3}$$

dove $\mathbf{u}_r$ è il versore radiale nella direzione del punto di osservazione (vedi Figura 3.1). Così si ottiene:

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu\, e^{-jkr}}{4\pi r}\mathbf{N} \qquad (r > 10D,\; r > \frac{2D^2}{\lambda}) \tag{3.4}$$

dove **N** è il cosiddetto "vettore di radiazione", definito come segue:

$$\mathbf{N} = \int_V \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\, e^{jk\,\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'}\, dV' \qquad \text{(sorgente volumetrica)} \tag{3.5a}$$

$$\mathbf{N} = \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\, e^{jk\,\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'}\, dS' \qquad \text{(sorgente superficiale)} \tag{3.5b}$$

Il vettore di radiazione dipende dalla direzione in cui è posto il punto di osservazione, ma non dalla sua distanza. Pertanto, a distanze tali da rendere possibile l'approssimazione (3.4), per qualsiasi sorgente il potenziale dipende da r secondo e^{-jkr}/r. Invece la dipendenza dalla direzione d'osservazione, che è dettata da **N**, varia da caso a caso.

Gli integrali che forniscono **N** sono molto più semplici degli integrali (2.2) e (2.3). Pertanto il calcolo del potenziale è notevolmente semplificato se la distanza è tale da soddisfare le disuguaglianze indicate nella (3.4).

Se la distanza è sufficiente, **E** e **H** possono essere ottenuti sostituendo la (3.4) nelle (1.8) e (1.2*b*). La loro determinazione è facilitata se il gradiente, il rotore e la divergenza sono calcolati in un sistema di coordinate sferiche (Figura 3.2). In tale sistema **N** è funzione delle sole coordinate θ e ϕ del punto di osservazione e le componenti di **A** sono:

$$A_r \approx \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} N_r(\theta, \phi)$$

$$A_\theta \approx \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} N_\theta(\theta, \phi)$$

$$A_\phi \approx \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} N_\phi(\theta, \phi)$$

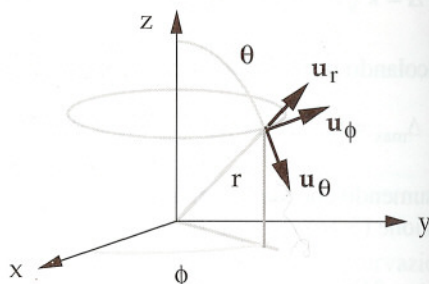



Figura 3.2

Mediante le espressioni (A.79, A.80, A.81) si trova che le componenti in coordinate sferiche di **E** e di **H** consistono nella somma di termini proporzionali $1/\lambda r$, $1/r^2$ e λ/r^3. Quando la distanza **r**, oltre a verificare le precedenti ineguaglianze, è anche molto maggiore di λ (esempio $r > 10\lambda$) i termini proporzionali $1/\lambda r$ dominano sugli altri. Considerando solo questi termini, e si ha:

$$\mathbf{E} \approx -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(N_\theta \mathbf{u}_\theta + N_\phi \mathbf{u}_\phi) \tag{3.6a}$$

$$\mathbf{H} \approx -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(-N_\phi \mathbf{u}_\theta + N_\theta \mathbf{u}_\phi) \tag{3.6b}$$

dove η è l'impedenza caratteristica del mezzo.

I vincoli imposti alla distanza dalle precedenti disuguaglianze sono ben evidenziati nel diagramma logaritmico di Figura 3.3, in cui sono riportate le rette corrispondenti a

$r = 10D$, $\quad r = 2D^2/\lambda \quad$ $r = 10\lambda$

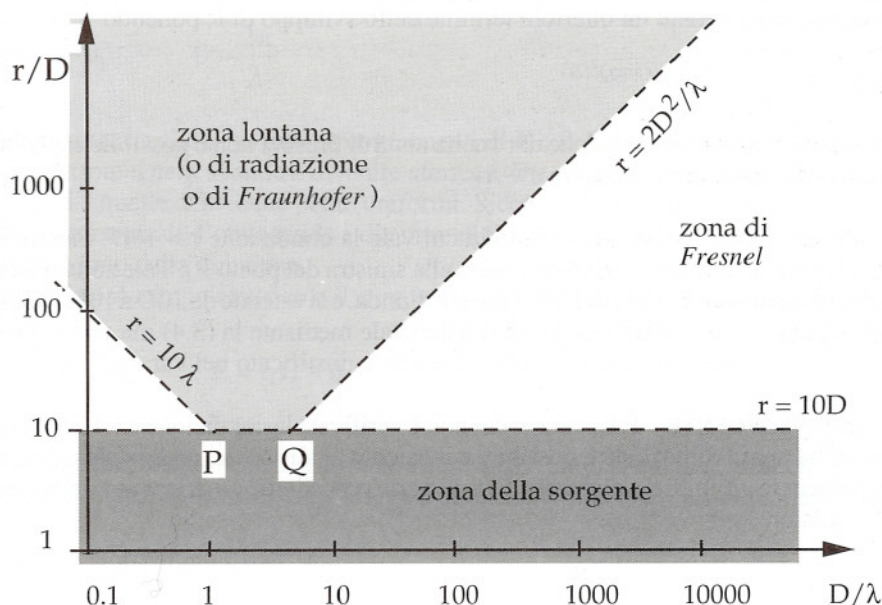



Figura 3.3

Ciascuna delle condizioni precedenti è verificata nella regione al disopra di una di queste rette. Si possono distinguere le seguenti zone:

ZONA LONTANA (O DI RADIAZIONE O DI FRAUNHOFER) È la zona in cui sono verificate le tre condizioni:

$$r > 10D \qquad r > 2D^2/\lambda \qquad r > 10\lambda \tag{3.7}$$

Tale zona è individuata dalla regione ombreggiata superiore. Si nota che il valore di r che segna l'inizio della zona lontana dipende dal valore del rapporto D/λ. Quando la sorgente è grande rispetto alla lunghezza d'onda la zona lontana inizia a distanze che possono essere molto maggiori di 10D. Ad esempio, nel caso $D/\lambda = 1000$ la zona lontana inizia alla distanza $r = 2000D$. Il calcolo del campo nella zona lontana è abbastanza semplice, richiedendo solo la determinazione di **N** e l'uso delle formule (3.6). Il campo nella zona lontana si chiama "campo lontano" ovvero "campo di radiazione". Il campo nella zona rimanente viene detto "campo vicino".

ZONA DI FRESNEL È la zona in cui sono verificate le condizioni $r > 10D$, $r > 10\lambda$ ma non è verificata la condizione $r > 2D^2/\lambda$. Tale zona cessa di esistere alla sinistra del punto Q, la cui ascissa è $D/\lambda = 5$. Quindi la zona di Fresnel esiste solo nel caso di sorgenti estese più di alcune lunghezze d'onda. In questa categoria rientrano quasi sempre le sorgenti ottiche e la maggior parte delle antenne a microonde e a onde millimetriche. Nella zona di Fresnel è lecita

l'approssimazione (3.1*a*) ma non la (3.1*b*); pertanto nell'approssimare la funzione e^{-jkR}, è necessario tenere in conto un ulteriore termine dello sviluppo di R ponendo

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr}\, e^{jk\,[r'\cos\chi\, -\, (r'\sin\chi)^2/2r]} \tag{3.8}$$

Poiché la fase è funzione sia di r che di r', nella zona di Fresnel non è possibile esplicitare la dipendenza da r attraverso il fattore e^{-jkr}/r.

ZONA DEI CAMPI REATTIVI È la zona in cui vale la condizione $r > 10D$ mentre non è verificata la condizione $r > 10\lambda$ (zona chiara alla sinistra del punto P). Tale zona esiste solo nel caso di sorgenti più piccole della lunghezza d'onda, e si estende da 10D a 10λ. Nella zona dei campi reattivi è lecito approssimare il potenziale mediante la (3.4) ma non è possibile usare le (3.6). Il nome attribuito a questa zona verrà giustificato nel Paragrafo 6.

ZONA DELLA SORGENTE È la zona in cui non è verificata la condizione $r > 10D$. In questa zona nessuna approssimazione è possibile e il calcolo analitico del potenziale e del campo diviene in genere un'impresa disperata. È necessario procedere numericamente con l'ausilio di un calcolatore.

7.4 Proprietà del campo lontano, radiazione

In un mezzo senza perdite il campo lontano è dato dalle (3.6). Se si escludono certe distribuzioni di sorgente del tutto eccezionali (per le quali N_θ e N_ϕ sono nulli) il campo lontano differisce da zero e, al crescere della distanza, decresce come 1/r. Inoltre **E** e **H** sono trasversali rispetto al versore radiale $\mathbf{u}_r$, con approssimazione tanto migliore quanto maggiore è la distanza.

Considerando una componente del campo, ad esempio

$$E_\theta \approx -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} N_\theta$$

si nota che la fase è data da:

$$-kr + \mathrm{Arg}(N_\theta) - \pi/2$$

Poiché $\mathrm{Arg}(N_\theta)$ dipende solo da θ e ϕ, il vettore d'onda è

$$\boldsymbol{\beta} = -\nabla[-kr + \mathrm{Arg}(N_\theta)] =$$

$$= k\,\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Arg}(N_\theta)\,\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\mathrm{Arg}(N_\theta)\,\mathbf{u}_\phi =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathbf{u}_r + \frac{\lambda}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Arg}(N_\theta)\,\mathbf{u}_\theta + \frac{\lambda}{2\pi r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\mathrm{Arg}(N_\theta)\,\mathbf{u}_\phi\right)$$

Poiché r è molto maggiore di λ si ha

$$\boldsymbol{\beta} \approx \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{u}_r \qquad \beta \approx \frac{2\pi}{\lambda}$$

Questo risultato, valido per tutte le componenti di **E** e di **H**, mostra che nella zona lontana l'onda elettromagnetica tende a divenire sferica e che essa ha lunghezza d'onda e velocità di fase pari a quelle delle onde piane uniformi. Siccome i campi a grande distanza tendono a divenire trasversali, l'onda tende a divenire di tipo TEM. Essa non è uniforme perché N_θ e N_ϕ dipendono dalla direzione.

Per le (3.6) il campo elettrico e il campo magnetico soddisfano le relazioni:

$$\mathbf{H} \approx \frac{\mathbf{u}_r \times \mathbf{E}}{\eta} \qquad \mathbf{E} \approx \eta \mathbf{H} \times \mathbf{u}_r \tag{4.1}$$

Poiché η è reale, relazioni analoghe sono valide per i campi istantanei, cosicché **E** e **H** sono perpendicolari fra loro e soddisfano la regola del cavatappi, come in un'onda piana uniforme.

Il vettore di Poynting è dato da

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \approx \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2\eta}\mathbf{u}_r \approx \eta \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{2}\mathbf{u}_r \approx \frac{\eta}{8\lambda^2}\frac{|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2}{r^2}\mathbf{u}_r$$

ovvero:

$$\mathbf{S} \approx \frac{K}{r^2}\mathbf{u}_r \tag{4.2}$$

dove

$$K = K(\theta, \phi) = \frac{\eta}{8\lambda^2}(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2) \tag{4.3}$$

Poiché nelle (3.6) sono stati trascurati termini che decrescono come $1/r^2$, la (4.2) è valida a meno di termini che decrescono almeno come $1/r^3$. Nella zona lontana il vettore di Poynting è reale ed è diretto radialmente nel verso centrifugo. Dunque, a grande distanza dalla sorgente, si ha un trasporto di energia verso l'infinito. Poiché il mezzo è senza perdite, alla potenza trasmessa verso l'infinito (potenza "irraggiata") corrisponde un'uguale potenza erogata dalla sorgente .

La potenza irraggiata viene determinata calcolando il flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera S con centro nell'origine e raggio tendente all'infinito (Figura 4.1); pertanto, ricordando che l'elemento di superficie sferica è dato da $dS = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$ si ha

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r \, dS = K(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

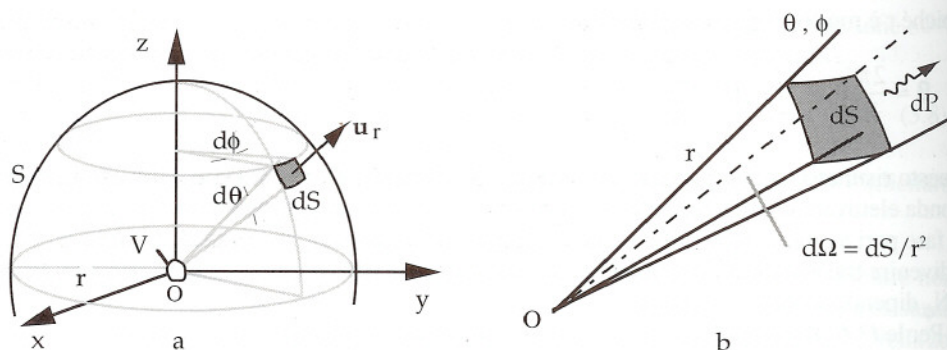



Figura 4.1

Dunque la potenza irraggiata dalla sorgente è data da:

$$P_{irr} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} K(\theta,\ \phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \qquad (4.4)$$

La (4.4) è una formula esatta: infatti, nel calcolo del flusso del vettore di Poynting, i termini che sono stati trascurati nella (4.2) non danno contributo perché decrescono più rapidamente di $1/r^2$.

La (4.2) deriva dalle espressioni (3.6), in cui sono stati trascurati termini che decrescono più rapidamente di 1/r. Dunque l'irraggiamento dipende solo dalla parte del campo che decresce come 1/r. È questa la ragione per cui il campo rappresentato dalle (3.6) viene detto "campo di radiazione".

La funzione $K = K(\theta, \phi)$ descrive l'irraggiamento nelle varie direzioni e prende il nome di "intensità di radiazione". Il suo significato fisico è chiarito dalle seguenti considerazioni. Sia $d\Omega$ l'angolo solido sotteso da un elemento di superficie sferica dS preso nella zona lontana, alla distanza r e intorno a una generica direzione θ, ϕ (Figura 4.1*b*); poiché $d\Omega = dS/r^2$ la potenza che attraversa dS è data da

$$dP = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r \, dS = \frac{K}{r^2} dS = K \, d\Omega$$

e risulta indipendente da r; dunque tutte le sezioni trasversali che sottendono lo stesso angolo solido $d\Omega$ sono attraversate dalla stessa potenza. Ciò significa che nella zona di radiazione la potenza elettromagnetica è - per così dire - incanalata dentro le regioni angolari infinitesime in cui può essere suddiviso tutto lo spazio intorno alla sorgente. Dall'espressione precedente si deduce:

$$K = \frac{dP}{d\Omega} \qquad [\text{W/sterad}] \qquad (4.5)$$

e quindi *l'intensità di radiazione rappresenta la potenza irraggiata per unità di angolo solido*. Il diagramma polare che riporta l'intensità di radiazione, normalizzata rispetto al suo valore massimo, fornisce un'immagine visiva di come la potenza irraggiata dalla sorgente viene distribuita nelle varie direzioni. Per questa ragione esso viene detto "diagramma di radiazione". Ad esempio il diagramma di radiazione rappresentato nella Figura 4.2 è quello di una sorgente che irraggia simmetricamente intorno all'asse z e che concentra la radiazione prevalentemente intorno al semiasse positivo.
Dalla (3.6*a*) si deduce che nella zona di radiazione l'ampiezza e il vettore di polarizzazione del campo elettrico sono dati rispettivamente da:

$$|\mathbf{E}| \approx \frac{\eta}{2\lambda r}\sqrt{|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}e^{j\chi} \approx -j\frac{N_\theta\,\mathbf{u}_\theta + N_\phi\,\mathbf{u}_\phi}{\sqrt{|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2}}e^{j(\chi - kr)}$$

Poiché nella definizione del vettore di polarizzazione la fase χ può essere scelta arbitrariamente (vedi Paragrafo 11, Capitolo 1), è lecito porre $\chi = kr$. Così risulta:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\theta,\ \phi) \approx -j\frac{N_\theta\,\mathbf{u}_\theta + N_\phi\,\mathbf{u}_\phi}{\sqrt{|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2}} \tag{4.7}$$

e inoltre

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{p}|\mathbf{E}|e^{-jkr} \qquad \mathbf{H} \approx \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}\frac{|\mathbf{E}|}{\eta}e^{-jkr} \tag{4.8}$$

Si noti che, nella zona di radiazione, la polarizzazione è identica in tutti i punti di una stessa semiretta radiale.

Mediante la (4.3) l'ampiezza del campo elettrico può essere espressa in funzione dell'intensità di radiazione e della distanza. Così si ottengono le seguenti espressioni che esprimono il campo lontano in funzione dell'intensità di radiazione e del vettore di polarizzazione nelle varie direzioni:

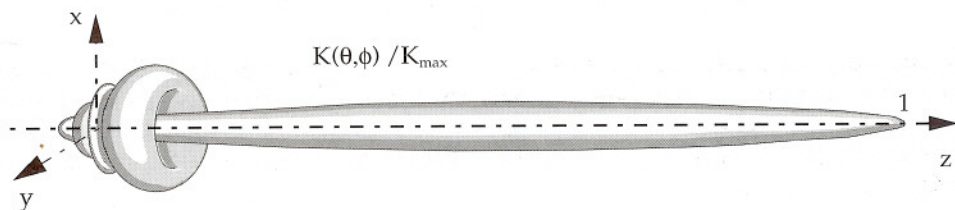



Figura 4.2

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{p}\sqrt{2\eta K}\,\frac{e^{-jkr}}{r} \qquad (4.9a)$$

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}\sqrt{\frac{2K}{\eta}}\,\frac{e^{-jkr}}{r} \qquad (4.9b)$$

7.5 Potenziale generato da piccole sorgenti

Una sorgente viene considerata "piccola" se le sue dimensioni sono molto minori della lunghezza d'onda ($D/\lambda << 1$). In questo caso il potenziale può essere calcolato mediante la (3.4), purché sia $r > 10D$ (l'altra condizione è automaticamente verificata). Nel calcolo del vettore di radiazione interviene l'esponenziale $e^{jk\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'}$, che può essere sviluppata in serie di potenze come segue:

$$e^{jk\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} = 1 + jk\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' + (jk\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')^2/2 + \ldots$$

Poiché $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' \leq D/2$ risulta

$$k\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' \leq \pi \;\; (D/\lambda) << 1$$

Pertanto, ricordando che $k = \omega/v$, si ottiene:

$$e^{jk\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} \approx 1 + jk\,\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r = 1 + j\frac{\omega}{v}\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r$$

e quindi:

$$\mathbf{N} \approx \int_V \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,dV' + j\frac{\omega}{v}\int_V \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r\,dV'$$

Dall'identità

$$\mathbf{u}_r \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}_0) = \mathbf{r}'\,\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{u}_r - \mathbf{J}_0\,\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r = \mathbf{r}'\,\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{u}_r + \mathbf{J}_0\,\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r - 2\,\mathbf{J}_0\,\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r$$

si deduce:

$$\mathbf{J}_0\,\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}_0) \times \mathbf{u}_r + \frac{\mathbf{r}'\,\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_0\,\mathbf{r}'}{2} \cdot \mathbf{u}_r$$

L'espressione diadica che appare nell'ultimo termine equivale a un tensore (vedi Appendice A) che ha le seguenti componenti:

$$\left(\frac{\mathbf{r}'\,\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_0\,\mathbf{r}'}{2}\right)_{\alpha\beta} = \frac{\alpha'\,\mathbf{J}_{0\beta} + \beta'\,\mathbf{J}_{0\alpha}}{2} \qquad (\alpha,\ \beta = x,\ y,\ z)$$

Sostituendo nell'espressione di $\mathbf{N}$ si trova:

$$\mathbf{N} \approx j\omega\,\mathbf{m}_e + \frac{j\omega}{v}\mathbf{m}_m \times \mathbf{u}_r - \frac{\omega^2}{v}\underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{u}_r \tag{5.1}$$

dove

$$\mathbf{m}_e = \frac{1}{j\omega}\int_V \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,dV' \tag{5.2}$$

$$\mathbf{m}_m = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,dV' \tag{5.3}$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2j\omega}\int_V (\alpha'\,\mathbf{J}_{0\beta} + \beta'\,\mathbf{J}_{0\alpha})\,dV' \qquad (\alpha,\ \beta = x,\ y,\ z) \tag{5.4}$$

La (5.1) mostra che, ai fini del calcolo del campo generato da una piccola sorgente a distanze molto maggiori delle sue dimensioni, la sorgente è completamente rappresentata dai vettori $\mathbf{m}_e$, $\mathbf{m}_m$ ("momento di dipolo elettrico" e "momento di dipolo magnetico") e dal tensore $\underline{\mathbf{Q}}$ ("tensore quadrupolare elettrico").

Il momento elettrico e il tensore quadrupolare possono differire da zero solo quando la densità di carica non è nulla (cioè quando $\mathbf{J}_0$ non è solenoidale). Infatti $\mathbf{m}_e$ e $\underline{\mathbf{Q}}$ possono anche essere espressi mediante le seguenti formule, che mettono in evidenza il loro collegamento con la densità di carica ρ_0 associata a $\mathbf{J}_0$:[1]

$$\mathbf{m}_e = \int_V \mathbf{r}'\,\rho_0(\mathbf{r}')\,dV' \qquad Q_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\int_V \alpha'\,\beta'\,\rho_0(\mathbf{r}')\,dV' \tag{5.5}$$

■ Ad esempio, per ricavare la componente

$$m_{ex} = \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{m}_e = \frac{1}{j\omega}\int_V \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{J}_0\,dV'$$

si procede come segue. Indicando con $\nabla' = \mathbf{u}_x(\partial/\partial x') + \mathbf{u}_y(\partial/\partial y') + \mathbf{u}_z(\partial/\partial z')$ l'operatore "nabla" riferito alle variabili d'integrazione x', y', z', si ha $\mathbf{u}_x = \nabla' x'$; pertanto sostituendo nella precedente espressione, e utilizzando il teorema della divergenza e l'equazione di continuità si ottiene:

---

1 Se le cariche sono distribuite in superficie gli integrali di volume vengono sostituiti da integrali di superficie. Questa osservazione vale anche per le (5.2-4), quando le correnti sono di tipo superficiale.

$$m_{ex} = \frac{1}{j\omega}\int_V (\nabla' x')\cdot \mathbf{J}_0\, dV' = \frac{1}{j\omega}\int_V \nabla'\cdot(x'\,\mathbf{J}_0)\, dV' - \frac{1}{j\omega}\int_V x'\,\nabla'\cdot\mathbf{J}_0\, dV' =$$

$$\frac{1}{j\omega}\int_{S_V} x'\,\mathbf{J}_0\cdot\mathbf{n}\, dS'_v + \int_V x'\rho_0\, dV' = \int_V x'\rho_0\, dV'$$

(l'integrale di superficie è nullo perché $\mathbf{J}_0$ differisce da zero solo all'interno della zona V). Relazioni analoghe valgono per le altre due componenti di $\mathbf{m}_e$. Pertanto:

$$\mathbf{m}_e = m_{ex}\mathbf{u}_x + m_{ey}\mathbf{u}_y + m_{ez}\mathbf{u}_z = \int_V (x'\,\mathbf{u}_x + y'\,\mathbf{u}_y + z'\,\mathbf{u}_z)\rho_0\, dV' = \int_V \mathbf{r}'\rho_0\, dV'$$

Un procedimento simile permette di ottenere l'espressione delle componenti del tensore quadrupolare (porre $\alpha' J_{0\beta} + \beta' J_{0\alpha} = \nabla'(a'b')\cdot\mathbf{J}_0$). ■

Usando la (3.4) si ottiene la seguente espressione del potenziale vettoriale generato da una piccola sorgente a distanze $r >> D$:

$$\mathbf{A} \approx \mu\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left(j\omega\,\mathbf{m}_e + \frac{j\omega}{v}\mathbf{m}_m \times \mathbf{u}_r - \frac{\omega^2}{v}\underline{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{u}_r \right) \qquad (5.6)$$

È interessante osservare che, per $r >> D$ (ad esempio $r > 10D$) il potenziale vettore (e quindi il campo) non dipende dai dettagli strutturali della sorgente, essendo determinato dalle quantità $\mathbf{m}_e$, $\mathbf{m}_m$ e $\underline{\mathbf{Q}}$, che possono essere uguali anche con sorgenti diverse. Per questa ragione l'osservazione del campo generato da piccole sorgenti, effettuata a distanze molto maggiori delle loro dimensioni, può solo fornire informazioni sui momenti elettrico e magnetico e sul tensore quadrupolare, ma non sulla effettiva struttura delle sorgenti.

Le precedenti considerazioni portano a interessanti conclusioni. La prima è che *il campo generato da una sorgente qualsiasi (anche estesa) a distanze molto maggiori della lunghezza d'onda è indipendente dalla struttura fine della sorgente*. Infatti, immaginando di dividere la sorgente in elementi piccoli rispetto alla lunghezza d'onda, il campo può essere pensato come sovrapposizione dei contribuiti dei vari elementi, che dipendono solo dai loro momenti elettrico e magnetico e dal tensore quadrupolare e non dai dettagli dell'andamento di $\mathbf{J}_0$ dentro i vari elementi. Ad esempio l'onda irraggiata dall'antenna indicata in Figura 5.1*a*,

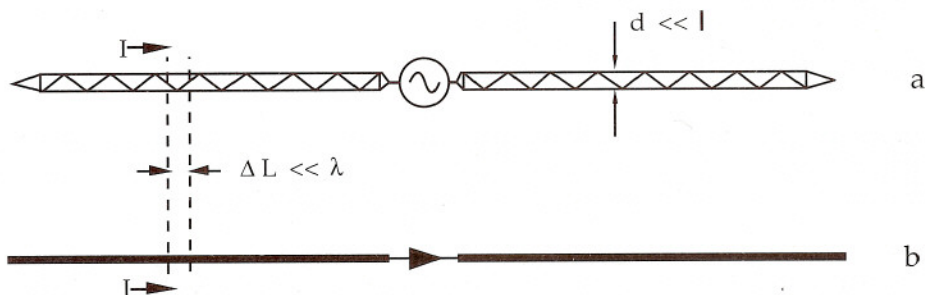



Figura 5.1

costituita da un traliccio metallico percorso da corrente, è indistinguibile da quella irraggiata dall'antenna filiforme indicata in Figura 5.1*b*, purché in ogni sezione trasversale l'intensità della corrente I sia uguale nel traliccio e nel filo; infatti si può mostrare che in questo caso i momenti elettrici di elementi corrispondenti, di lunghezza $\Delta L << \lambda$, sono uguali a $I\Delta L/j\omega$ sia nel traliccio che nel filo. La seconda conclusione, strettamente collegata alla precedente, è che *la sola osservazione dell'onda irraggiata da una sorgente monocromatica non fornisce informazioni sufficienti per riconoscerne dettagli strutturali a livelli di definizione più piccoli della lunghezza d'onda.*[1]

7.6 Dipolo hertziano

Il dipolo hertziano è la sorgente con la quale Hertz compì i sui celebri esperimenti sulla generazione delle onde elettromagnetiche. Nella versione di Hertz esso è costituito da un filo di lunghezza $d << \lambda$, che collega due sferette (vedi Figura 6.1). Queste si comportano come le armature di un condensatore, su cui sono localizzate due cariche oscillanti q e –q. Le sferette (che possono essere sostituite da altre strutture analoghe) si caricano e scaricano attraverso il filo, in cui fluisce la corrente I. Poiché le cariche localizzate sul filo sono trascurabili, la corrente è pressoché uguale in tutte le sezioni ed è data da $I = j\omega q$. È facile verificare che il momento magnetico e il tensore quadrupolare sono nulli, mentre non è nullo il momento elettrico. Schematizzando il dipolo con due cariche puntiformi poste alla distanza d, per le (5.2) e (5.5) si ha:

$$\mathbf{m}_e = \frac{1}{j\omega} I\, d\, \mathbf{u}_z = q\, d\, \mathbf{u}_z \tag{6.1}$$

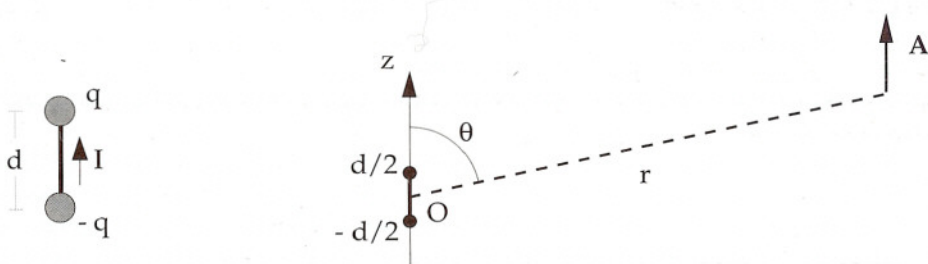



Figura 6.1

1 Questa è la ragione della limitazione del potere risolutivo di un microscopio ottico, mediante il quale è impossibile distinguere dettagli più piccoli della lunghezza d'onda. Per questa stessa ragione la materia appare continua se osservata nel visibile. Solo mediante l'osservazione a raggi X, che hanno lunghezza d'onda dell'ordine delle distanze interatomiche, può essere evidenziata la struttura cristallina dei solidi.

Conviene studiare il campo in un riferimento sferico, con origine al centro del dipolo e asse polare coincidente con il suo asse (Figura 6.1). Si ha:

$$\mathbf{N} = I\,d\,\mathbf{u}_z = I\,d(-\sin\theta\,\mathbf{u}_\theta + \cos\theta\,\mathbf{u}_r) \tag{6.2}$$

$$\mathbf{A} = \mu\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}I\,d\,\mathbf{u}_z = \mu\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}I\,d(-\sin\theta\,\mathbf{u}_\theta + \cos\theta\,\mathbf{u}_r) \qquad (r >> d) \tag{6.3}$$

Poiché le dimensioni del dipolo sono molto minori della lunghezza d'onda, la zona di radiazione inizia intorno a $r = 10\lambda$ (vedi Figura 3.3). Volendo calcolare il campo anche a distanza minore (ma comunque molto maggiore di d) bisogna usare le (1.8) e (1.2*b*). Svolgendo i calcoli in coordinate sferiche si ottiene:

$$E_r = \eta I\,d\left(\frac{1}{2\pi r^2} - j\frac{\lambda}{4\pi^2 r^3}\right)e^{-jkr}\cos\theta \tag{6.4a}$$

$$E_\theta = \eta I\,d\left(j\frac{1}{2\lambda r} + \frac{1}{4\pi r^2} - j\frac{\lambda}{8\pi^2 r^3}\right)e^{-jkr}\sin\theta \tag{6.4b}$$

$$H_\phi = I\,d\left(j\frac{1}{2\lambda r} + \frac{1}{4\pi r^2}\right)e^{-jkr}\sin\theta \tag{6.4c}$$

$$E_\phi = 0 \qquad H_r = H_\theta = 0$$

Nella zona di radiazione i termini in $1/r^2$ e $1/r^3$ sono trascurabili. In questa zona le uniche componenti significative sono:

$$E_\theta = j\eta\frac{I\,d}{2\lambda r}e^{-jkr}\sin\theta \qquad H_\phi = j\frac{I\,d}{2\lambda r}e^{-jkr}\sin\theta \tag{6.5}$$

Naturalmente, sarebbe stato possibile ricavare direttamente queste ultime formule usando le (3.6) e la (6.2).

Le (6.4) mostrano che le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze con centro sull'asse del dipolo, giacenti su piani perpendicolari al dipolo. Il campo magnetico è trasversale rispetto alla direzione di propagazione. Il campo elettrico giace sui piani passanti per l'asse del dipolo e ha componente radiale non nulla; nella zona di radiazione, però, essa diviene trascurabile rispetto a E_θ. Dunque l'onda è di tipo TM, ma tende a divenire TEM a grande distanza. L'andamento delle linee di forza del campo elettrico in un istante particolare è indicato nella Figura 6.2*a*.

L'intensità di radiazione è data da:

$$K = K(\theta,\ \phi) = \frac{\eta}{8\lambda^2}|N_\theta|^2 = \frac{\eta}{8}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 |I|^2\sin^2\theta \tag{6.6}$$

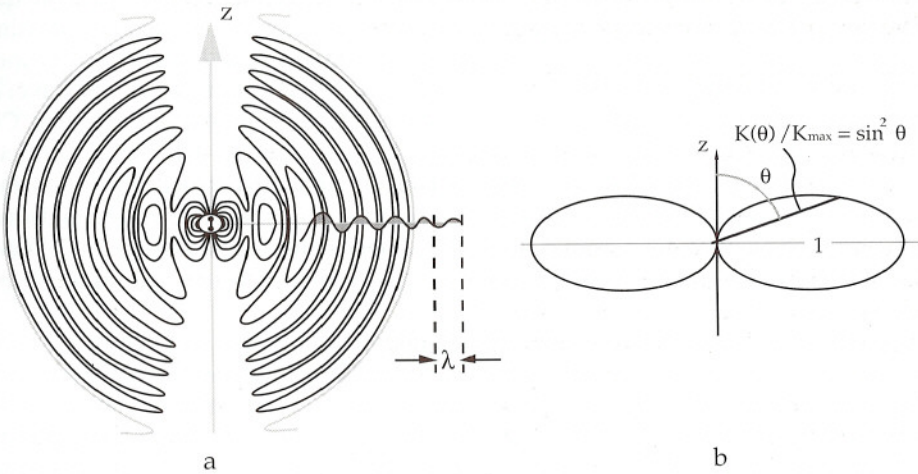



Figura 6.2

Pertanto il diagramma di radiazione è simmetrico rispetto all'asse del dipolo. Il suo andamento su di un piano passante per l'asse è mostrato in Figura 6.2*b*. L'intensità di radiazione è massima in direzione perpendicolare al dipolo e nulla in direzione dell'asse.

Usando la (4.4) si ottiene la seguente espressione della potenza irraggiata:

$$P_{irr} = \frac{\eta\pi}{3}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 |I|^2 \tag{6.7}$$

Siccome $d/\lambda << 1$, potenze irraggiate significative possono aversi solo con correnti piuttosto intense. Ad esempio se $d/\lambda = 1/10$ per irraggiare 100 W nel vuoto bisogna avere una corrente di circa 5 A.

Se il dipolo è molto piccolo esiste una zona in cui $d << r << \lambda$. In questa zona è lecito porre

$$e^{-jkr} = e^{-j2\pi r/\lambda} \approx 1$$

Sostituendo nelle (6.4), poiché nella zona considerata si ha $\lambda/r >> 1$, i termini dominanti sono quelli che contengono le potenze più alte di r. Trascurando gli altri termini si ottengono le seguenti approssimazioni in prossimità del dipolo:

$$E_r = -j\frac{\eta\lambda I d}{4\pi^2 r^3}\cos\theta = \frac{qd}{2\pi\varepsilon}\frac{\cos\theta}{r^3} \tag{6.8a}$$

$$E_\theta = -j\frac{\eta\lambda I d}{8\pi^2 r^3}\sin\theta = \frac{qd}{4\pi\varepsilon}\frac{\sin\theta}{r^3} \qquad (d << r << \lambda) \tag{6.8b}$$

$$H_\phi = \frac{I d}{4\pi r^2}\sin\theta \tag{6.8c}$$

Il campo elettrico e il campo magnetico sono formalmente identici ai campi generati da un dipolo statico e da un elemento di corrente continua rispettivamente. Pertanto, in prossimità del dipolo, il campo elettrico e il campo magnetico oscillano in fase, il primo con le cariche, l'altro con le correnti, e assumono, in ogni istante, lo stesso valore dei campi statici che verrebbero prodotti dalle cariche e dalle correnti considerate in quello stesso istante. Ciò è evidenziato nella Figura6.2*a*, dove si vede che le linee di forza del campo elettrico in prossimità del dipolo tendono ad assumere l'andamento caratteristico delle linee di forza del campo generato da un dipolo statico. Quando un campo variabile nel tempo ha andamento molto prossimo a quello di un campo stazionario, viene detto "quasi stazionario". Dunque a distanze piccole rispetto alla lunghezza d'onda il campo generato dal dipolo è quasi stazionario.

In prossimità del dipolo lo sfasamento fra il campo elettrico e il campo magnetico è di circa $\pi/2$, cosicché la parte immaginaria del vettore di Poynting è molto maggiore della parte reale. Per questo la densità della potenza reattiva, che nella zona di radiazione è trascurabile rispetto a quella della potenza attiva, diviene preponderante in prossimità del dipolo. Questi risultati, validi per tutte le sorgenti di piccole dimensioni, giustificano il nome di "zona dei campi reattivi" dato alla regione che si estende fino a $r = 10\lambda$.

7.7 Campo di radiazione generato da una spira

Un'altra sorgente molto semplice è costituita da una spira circolare di raggio $a << \lambda$ in cui circola una corrente sinusoidale I, uguale in tutte le sezioni della spira (Figura 7.1*a*). Per studiare il campo conviene usare un sistema di riferimento con origine al centro della spira, e asse polare coincidente con il suo asse.

La densità di corrente è diretta secondo $\mathbf{u}_\phi$, ma non dipende da ϕ; quindi essa è solenoidale e la densità di carica è nulla. Pertanto risulta $\mathbf{m}_e = 0$, $\mathbf{Q} = 0$. Nel calcolo del momento magnetico si può considerare la corrente concentrata sulla circonferenza media della spira (Figura 7.1*b*) ponendo

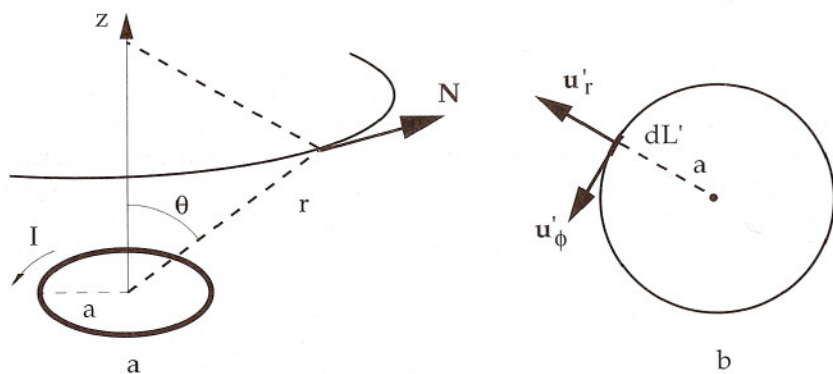



Figura 7.1

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,dV' = I\,\mathbf{u}'_\phi\;dL'$$

dove dL' è un elemento lineare della spira e $\mathbf{u}'_\phi$ è il versore tangente all'elemento. Poiché $\mathbf{r}' = a\mathbf{u}'_r$, il momento magnetico è dato da:

$$\mathbf{m}_m = \frac{1}{2}\int_{spira} a\mathbf{u}'_r \times I\,\mathbf{u}'_\phi\;dL' = \mathbf{u}_z\frac{aI}{2}\int_{spira} dL' = \mathbf{u}_z\frac{aI}{2}2\pi a = \pi a^2 I\,\mathbf{u}_z \tag{7.1}$$

Pertanto:

$$\mathbf{N} = j\omega\frac{\mathbf{m}_m \times \mathbf{u}_r}{v} = jk\pi a^2 I\,\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_r = j\frac{2\pi^2 a^2}{\lambda} I \sin\theta\,\mathbf{u}_\phi \tag{7.2}$$

Usando le (3.6) si ottengono le seguenti espressioni del campo nella zona di radiazione:

$$\mathbf{E} \approx \eta\frac{\pi^2 a^2}{\lambda^2} I \frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\,\mathbf{u}_\phi \qquad \mathbf{H} \approx -\frac{\pi^2 a^2}{\lambda^2} I \frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\,\mathbf{u}_\theta \tag{7.3}$$

Le linee di forza del campo elettrico sono circonferenze giacenti su piani paralleli alla spira, con centro sul suo asse. L'intensità di radiazione è:

$$K = \frac{\eta}{8\lambda^2}|N_\phi|^2 = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^4 |I|^2 \sin^2\theta \tag{7.4}$$

Il diagramma di radiazione è identico a quello del dipolo. L'intensità di radiazione è massima sul piano della spira e nulla sull'asse.

Utilizzando la formula precedente si trova la seguente espressione della potenza irraggiata:

$$P_{irr} = \frac{\eta\pi}{12}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 |I|^2 \tag{7.5}$$

Anche nel caso della spira per irraggiare potenze significative sono necessarie correnti molto intense. Ad esempio se la lunghezza della spira è 1/10 di lunghezza d'onda, per irraggiare 100 W nel vuoto è necessaria una corrente di circa 100A. Paragonando questo risultato con quello trovato nel paragrafo precedente per un dipolo elettrico della stessa lunghezza, si vede che a parità di potenza irraggiata la corrente nella spira deve essere molto più intensa di quella che si ha nel dipolo elettrico. Ciò significa che a parità di corrente l'irraggiamento della spira è molto più debole di quello del dipolo elettrico.

La (7.5) permette di comprendere perché nello studio dei circuiti a bassa frequenza è lecito ignorare l'irraggiamento. Ad esempio, se si considera una spira di diametro 1 m in cui circola la corrente di 1 A alla frequenza di 50 Hz ($\lambda = 6000$ km), la potenza irraggiata è assolutamente insignificante ($7.4 \cdot 10^{-24}$ W).

7.8 Effetto delle perdite

Se il mezzo è dissipativo si ha $jk = \alpha + j2\pi/\lambda$ dove α e λ sono la costante d'attenuazione e la lunghezza d'onda delle onde piane uniformi. Lo studio del campo a grande distanza dalla sorgente interessa solo nel caso di mezzi a bassa perdita, ad esempio nell'aria. In questo caso l'approssimazione (3.1*b*) diviene:

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr}\, e^{-jk\, r'\cos\chi} = e^{-\alpha r}\, e^{-j2\pi r/\lambda}\, e^{\alpha r'\cos\chi}\, e^{j2\pi\, r'\cos\chi/\lambda}$$

Poiché $r'\cos\chi \leq D/2$, se il prodotto α D è tanto piccolo da poter assumere

$$e^{\alpha D/2} \approx 1 \tag{8.1}$$

si ha pure $e^{\alpha r'\cos\chi} \approx 1$. Quindi è lecito porre:

$$e^{-jkR} \approx e^{-\alpha r}\, e^{-j2\pi r/\lambda}\, e^{j2\pi\, r'\cos\chi/\lambda} = e^{-\alpha r}\, e^{-j2\pi r/\lambda}\, e^{j(2\pi/\lambda)\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'}$$

In definitiva, se l'attenuazione su una distanza pari alla dimensione della sorgente è trascurabile, per tener conto delle perdite basta modificare la (3.4) come segue:

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu\, e^{-\alpha r}\, e^{-j2\pi r/\lambda}}{4\pi r}\mathbf{N} \qquad \left(r > 10D,\ r > \frac{2D^2}{\lambda},\ e^{\alpha D/2} \approx 1\right)$$

Questa espressione differisce dalla (3.4) per il fattore $e^{-\alpha r}$ (il vettore di radiazione viene calcolato mediante le (3.5), ponendo $k = 2\pi/\lambda$, come se non ci fossero perdite). Conseguentemente il campo nella zona di radiazione decresce almeno come $e^{-\alpha r}/r$ mentre tutte le sue altre proprietà rimangono identiche a quelle che si hanno in assenza di perdite.

A causa dell'attenuazione la potenza ΔP che fluisce attraverso un angolo solido di apertura $\Delta\Omega$ non è la stessa ad ogni distanza. Si ha infatti:

$$\Delta P = e^{-2\alpha r}\, K\, \Delta\Omega$$

dove K è sempre dato dalla (4.3). ΔP si annulla all'infinito, perché l'energia dell'onda viene assorbita dal mezzo man mano che essa si propaga. L'attenuazione sulla distanza d è data da

$$10\ \log\frac{(\Delta P)_r}{(\Delta P)_{r+d}} = 8.68\,\alpha\, d = \alpha_{db}\, d \qquad [db]$$

7.9 Campo generato da sorgenti magnetiche

L'introduzione di sorgenti equivalenti - sia di tipo elettrico che magnetico - facilita in alcuni casi lo studio della radiazione. Per questo è utile determinare anche il campo generato da correnti magnetiche, agenti in un mezzo isotropo, omogeneo, illimitato.

Se le uniche correnti impresse sono di tipo magnetico le equazioni di Maxwell e le condizioni sulle lamine assumono la forma:

$$-\nabla\times\mathbf{E} = j\omega\,\mu\,\mathbf{H} + \mathbf{M}_0 \qquad \nabla\times\mathbf{H} = j\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E}$$

$$-\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = \mathbf{M}_s \qquad \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = 0$$

Se si confrontano queste equazioni con quelle che si hanno quando le sorgenti sono elettriche, cioè

$$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\,\mu\,\mathbf{H}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{J}_s \qquad -\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$$

si osserva che da un gruppo di equazioni si passa all'altro facendo le seguenti sostituzioni:

caso delle sorgenti elettriche		*caso delle sorgenti magnetiche*
$\mathbf{J}_0$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{M}_0$
$\mathbf{J}_s$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{M}_s$
$\mathbf{E}$	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{H}$
$\mathbf{H}$	$\Leftrightarrow$	$-\mathbf{E}$
ε	$\Leftrightarrow$	μ
μ	$\Leftrightarrow$	ε

Tabella 9.1 Campo generato da sorgenti elettriche o magnetiche

Sorgenti elettriche	*Sorgenti magnetiche*
$\mathbf{E} = \dfrac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu} - j\omega\mathbf{A}$	$\mathbf{H} = \dfrac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}}{j\omega\varepsilon\mu} - j\omega\mathbf{F}$
$\mathbf{H} = \dfrac{\nabla\times\mathbf{A}}{\mu}$	$\mathbf{E} = -\dfrac{\nabla\times\mathbf{F}}{\varepsilon}$
$\mathbf{A} = \dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,e^{-jkR}}{R}dV'$ (*)	$\mathbf{F} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\mathbf{M}_0(\mathbf{r}')\,e^{-jkR}}{R}dV'$ (*)

(*) Le formule dei potenziali si riferiscono al caso di sorgenti distribuite nei volumi. Nel caso di sorgenti superficiali gli integrali di volume sono sostituiti da analoghi integrali di superficie.

Dunque il problema della determinazione del campo generato dalla sorgenti magnetiche è "duale" rispetto a quello già risolto per le sorgenti elettriche; infatti i due problemi sono retti da equazioni formalmente identiche, cosicché la soluzione di uno è deducibile da quella dell'altro con una semplice sostituzione di simboli. La Tabella 9.1 mostra le espressioni del campo generato dalle sorgenti magnetiche (colonna destra) dedotte da quelle della colonna sinistra facendo le sostituzioni suddette. Il vettore **F** (potenziale vettoriale magnetico) è il duale di **A**. Si noti che applicando la dualità k rimane immutato mentre η viene trasformato in $1/\eta$.

La Tabella 9.2 riporta le espressioni del campo nella zona di radiazione e delle altre grandezze connesse. Le espressioni relative al caso delle sorgenti magnetiche sono ottenute per dualità da quelle trovate nei Paragrafi 4 e 5. Nel caso delle sorgenti magnetiche il vettore di radiazione elettrico **N** viene sostituito dal vettore di radiazione magnetico **L**.

Si noti che nell'applicare la dualità le relazioni che collegano i campi e il vettore di Poynting all'intensità di radiazione rimangono immutate. Tali relazioni, quindi, valgono per entrambi i tipi di sorgente.

Tabella 9.2 Campo di radiazione

Sorgenti elettriche	*Sorgenti magnetiche*
$\mathbf{N} = \int_V \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\, e^{jk\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'}\, dV'$ (*)	$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{M}_0(\mathbf{r}')\, e^{jk\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'}\, dV'$ (*)
$\mathbf{E} \approx -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(N_\theta \mathbf{u}_\theta + N_\phi \mathbf{u}_\phi)$	$\mathbf{H} \approx -j \frac{e^{-jkr}}{2\eta\lambda r}(L_\theta \mathbf{u}_\theta + L_\phi \mathbf{u}_\phi)$
$\mathbf{H} \approx -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(N_\theta \mathbf{u}_\phi - N_\phi \mathbf{u}_\theta)$	$\mathbf{E} \approx j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(L_\theta \mathbf{u}_\phi - L_\phi \mathbf{u}_\theta)$
$K = \frac{\eta}{8\lambda^2}(\lvert N_\theta\rvert^2 + \lvert N_\phi\rvert^2)$	$K = \frac{1}{8\eta\lambda^2}(\lvert L_\theta\rvert^2 + \lvert L_\phi\rvert^2)$
$\mathbf{p} = -j \frac{N_\theta \mathbf{u}_\theta + N_\phi \mathbf{u}_\phi}{\sqrt{\lvert N_\theta\rvert^2 + \lvert N_\phi\rvert^2}}$ (**)	$\mathbf{p} = -j \frac{L_\phi \mathbf{u}_\theta - L_\theta \mathbf{u}_\phi}{\sqrt{\lvert L_\theta\rvert^2 + \lvert L_\phi\rvert^2}}$ (**)
$\mathbf{S} = \frac{K}{r^2}\mathbf{u}_r$ $\quad$ $\mathbf{E} = \mathbf{p}\sqrt{2\eta K}\,\frac{e^{-jkr}}{r}$	$\mathbf{H} = \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}\sqrt{\frac{2K}{\eta}}\,\frac{e^{-jkr}}{r}$

(*) Le espressioni di **N** e **L** si riferiscono al caso di sorgenti distribuite nei volumi. Nel caso di sorgenti superficiali gli integrali di volume sono sostituiti da analoghi integrali di superficie.

(**) Le due espressioni di **p** non sono duali perché **p** rappresenta il vettore di polarizzazione del campo elettrico in entrambi i casi.

7.10 Condizioni all'infinito

Si è visto che se il mezzo è omogeneo e isotropo e se le sorgenti sono tutte collocate al finito, **E** e **H** vanno a zero all'infinito con rapidità almeno pari a 1/r. Si ha inoltre:

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{E} = \eta\, \mathbf{H} + O(1/r^2) \qquad (10.1a)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{E}/\eta + O(1/r^2) \qquad (10.1b)$$

dove $O(1/r^2)$ indica termini che vanno a zero almeno come $1/r^2$. Tali proprietà vengono dette "condizioni di radiazione". Si noti che le condizioni suddette implicano che le componenti radiali di **E** e di **H** vadano a zero almeno come $1/r^2$. Infatti, ad esempio, la (10.1*a*) indica che **H** è costituito da un contributo trasversale ($\mathbf{u}_r \times \mathbf{E}/\eta$) e da un altro contributo (che include la componente radiale) che va a zero almeno come $1/r^2$.

Le considerazioni riportate di seguito indicano che *le condizioni di radiazione sopra specificate valgono anche quando il mezzo non è omogeneo, purché le disomogeneità e le sorgenti siano confinate in una regione finita.*

■ Siano ε_∞ e μ_∞ i valori costanti assunti dalle permeabilità elettrica e magnetica all'esterno di V. Le equazioni di Maxwell possono essere riscritte come segue:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_\infty \mathbf{E} + \mathbf{J}'_0 \qquad -\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu_\infty \mathbf{H} + \mathbf{M}'_0 \qquad (10.2)$$

dove:

$$\mathbf{J}'_0 = \mathbf{J}_0 + j\omega(\varepsilon - \varepsilon_\infty)\mathbf{E} \qquad \mathbf{M}'_0 = \mathbf{M}_0 + j\omega(\mu - \mu_\infty)\mathbf{H} \qquad (10.3)$$

Le (10.2) sono formalmente analoghe alle equazioni di Maxwell in un mezzo omogeneo di permeabilità ε_∞ e μ_∞. in cui agiscono le correnti $\mathbf{J}'_0$, $\mathbf{M}'_0$, che differiscono da zero solo nel volume V. Dunque il campo a grande distanza può essere rappresentato utilizzando le espressioni della Tabella 9.2, introducendo negli integrali che definiscono **N** e **L** le correnti $\mathbf{J}'_0$, $\mathbf{M}'_0$, invece delle sorgenti effettive. Benché le espressioni di **E** e di **H** così ottenute non permettano di calcolare i due vettori ($\mathbf{J}'_0$ ed $\mathbf{M}'_0$ dipendono a loro volta dal campo), esse mostrano che il comportamento del campo all'infinito è quello stesso che si ha in un mezzo omogeneo illimitato. ■

Le (10.1) possono essere viste come una particolare forma di condizioni di impedenza/ammettenza valide su una superficie sferica S_∞, di raggio tendente all'infinito, che contorna la regione in cui si vuole determinare il campo. Per questa ragione il teorema di unicità vale anche nel caso di regioni illimitate, purché si assuma che all'infinito vengano soddisfatte le condizioni di radiazione. Ad esempio, nei problemi illustrati nella Figura 10.1 la determinazione del campo richiede in ogni caso che vengano imposte le condizioni di radiazione; inoltre, nel caso di Figura 10.1*a*, bisogna imporre la condizione di Leontovic (o di parete elettrica) sulla superficie del corpo metallico; nei casi di Figura 10.1*b*, *c*, in cui le sorgenti sono all'esterno della zona d'interesse, bisogna fornire una condizione inomogenea su S (componenti tangenziali di **E** o di **H**). Si noti che, nel caso di Figura 10.1*c*, anche S si estende all'infinito; perché il problema sia ben posto, le componenti tangenziali devono essere assegnate, rispettando la condizione di radiazione (la componente radiale deve annullarsi almeno come $1/r^2$, quella trasversale almeno come $1/r$).

Le regole di equivalenza considerate nel Paragrafo 3 del Capitolo 4, discendendo direttamente dal teorema di unicità, sono pure applicabili in regioni illimitate.

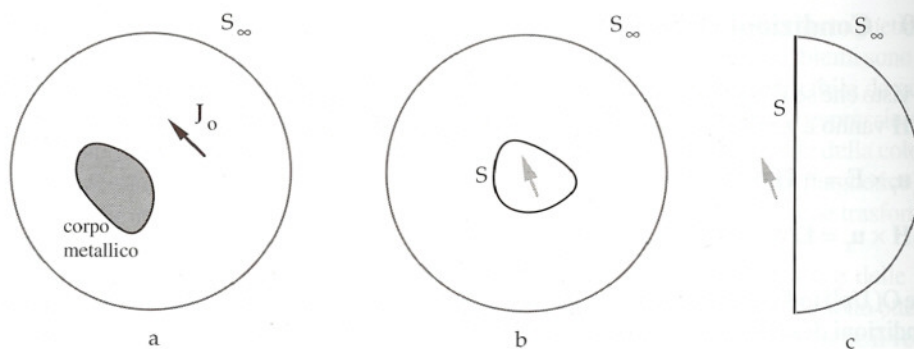



Figura 10.1

Anche il teorema di reciprocità (Equazione 4.1, Capitolo 4) continua a valere quando si considerano regioni illimitate. In questo caso il contorno S_V è costituito in tutto o in parte da S_∞. È facile mostrare che i due integrali estesi a S_∞ sono uguali fra loro e si elidono; pertanto, *quando il teorema di reciprocità viene applicato a una regione illimitata, gli unici integrali di superficie da considerare sono quelli estesi agli eventuali contorni al finito* (ad esempio alla superficie S indicata nelle Figura 10.1*b*, *c*).

7.11 Campi simmetrici rispetto a un piano - regola delle immagini

Un campo vettoriale **V** simmetrico rispetto al piano x, y (Figura 11.1) può presentare i seguenti due tipi di simmetria:

a) simmetria pari

$V_x(x, y, z) = V_x(x, y, -z) \quad V_y(x, y, z) = V_y(x, y, -z) \quad V_z(x, y, z) = -V_z(x, y, -z)$

b) simmetria dispari

$V_x(x, y, z) = -V_x(x, y, -z) \quad V_y(x, y, z) = -V_y(x, y, -z) \quad V_z(x, y, z) = V_z(x, y, -z)$

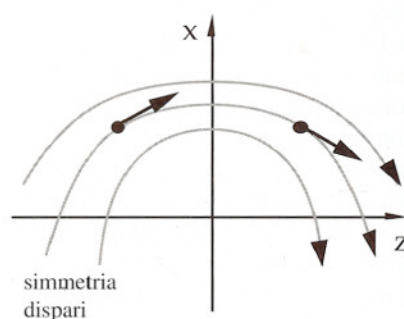
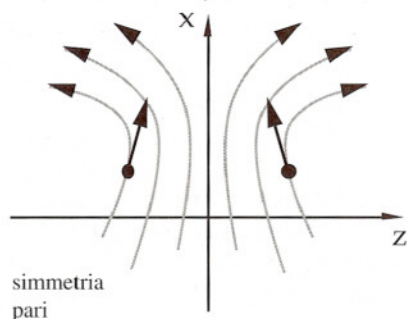



Figura 11.1

Si può affermare quanto segue:

Correnti elettriche (magnetiche) simmetriche rispetto a un piano, agenti in un mezzo omogeneo isotropo illimitato, generano campi simmetrici. La simmetria del campo elettrico (magnetico) è dello stesso tipo di quella delle correnti, quella del campo magnetico (elettrico) è di tipo opposto.

■ Ad esempio se $\mathbf{J}_0$ ha simmetria pari, i campi di corrente

$$\mathbf{J}_0 = J_{0x}(x, y, z)\mathbf{u}_x + J_{0y}(x, y, z)\mathbf{u}_y + J_{0z}(x, y, z)\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{J}'_0 = J_{0x}(x, y, -z)\,\mathbf{u}_x + J_{0y}(x, y, -z)\,\mathbf{u}_y - J_{0z}(x, y, -z)\,\mathbf{u}_z$$

coincidono e devono quindi generare lo stesso campo **E**, **H**. Dunque **E** e **H** devono soddisfare le equazioni di Maxwell sia con $\mathbf{J}_0$ che con $\mathbf{J}'_0$. Ad esempio, devono valere entrambe le equazioni

$$\frac{\partial H_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(x, y, z)}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_x(x, y, z) + \begin{cases} J_{0x}(x, y, z) & (11.1a) \\ J_{0x}(x, y, -z) & (11.1b) \end{cases}$$

Trasformando z in -z nella seconda equazione si ottiene

$$\frac{\partial H_z(x, y, -z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(x, y, -z)}{\partial(-z)} = j\omega\varepsilon E_x(x, y, -z) + J_{0x}(x, y, z)$$

ovvero :

$$\frac{\partial H_z(x, y, -z)}{\partial y} - \frac{\partial[-H_y(x, y, -z)]}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_x(x, y, -z) + J_{0x}(x, y, z)$$

Questa equazione coincide con la (11.1a) se risulta

$$H_z(x, y, -z) = H_z(x, y, z) \qquad H_y(x, y, -z) = -H_y(x, y, z) \qquad E_x(x, y, -z) = E_x(x, y, z)$$

Analogamente, partendo dalle altre equazioni si ottengono le relazioni di simmetria per le altre componenti di **E** e di **H**. ■

I campi a simmetria dispari attraversano perpendicolarmente il piano di simmetria (vedi Figura 11.1). Dunque, *sul piano di simmetria, il campo generato da sorgenti elettriche a simmetria dispari soddisfa la condizione di parete elettrica* $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. *La stessa condizione è verificata dal campo generato da sorgenti magnetiche a simmetria pari (Figura 11.2).*

Figura 11.2

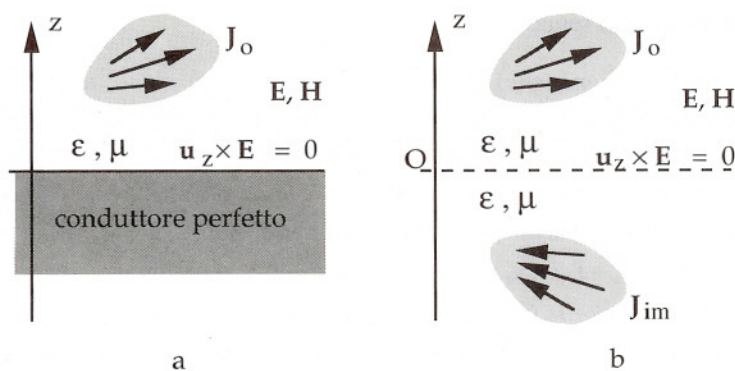



Figura 11.3

Il fatto che correnti elettriche a simmetria dispari creino una condizione di parete elettrica sul piano di simmetria può essere sfruttato per semplificare il calcolo del campo generato da sorgenti elettriche agenti in un semispazio delimitato da una parete piana perfettamente conduttrice (Figura 11.3*a*). La condizione al contorno derivante dalla presenza della parete conduttrice è identica a quella che si ha sul piano z = 0 nella situazione di Figura 11.3*b*. In questa situazione il mezzo è uguale in tutto lo spazio e si hanno le correnti $\mathbf{J}_{im}$ che, assieme a $\mathbf{J}_0$, costituiscono un campo di corrente a simmetria dispari. I campi nel semispazio $z > 0$ sono identici nelle due situazioni, perché il mezzo, le sorgenti e le condizioni al contorno sono identiche. Le correnti $\mathbf{J}_{im}$ sono le "immagini" delle correnti effettivamente agenti nel semispazio superiore.
Quando le sorgenti sono di tipo magnetico si può seguire un criterio analogo. In questo caso le correnti immagine $\mathbf{M}_{im}$ formano un campo di corrente a simmetria pari con le correnti $\mathbf{M}_0$ effettivamente agenti nel semispazio superiore (Figura 11.4).

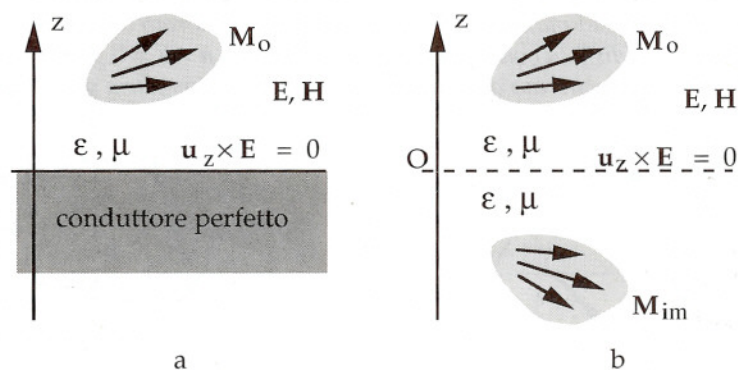



Figura 11.4

In conclusione vale la seguente

REGOLA DELLE IMMAGINI: *Il campo generato da una sorgente agente in un semispazio contenente un mezzo omogeneo isotropo, delimitato da una parete piana perfettamente conduttrice, è identico a quello che verrebbe generato nello stesso semispazio dalla sorgente e dalla sua immagine, agenti in un mezzo illimitato di caratteristiche uguali a quelle del mezzo esistente nel semispazio d'interesse. Le sorgenti effettive e le immagini costituiscono un campo a simmetria dispari nel caso di sorgenti elettriche, a simmetria pari nel caso di sorgenti magnetiche.*

Il teorema delle immagini permette di ridurre lo studio del campo in presenza del piano conduttore a quello del campo generato dalla sorgente e dalla sua immagine in tutto lo spazio. Il campo può quindi essere determinato usando i metodi illustrati nei paragrafi precedenti. Il campo prodotto dalla sorgente effettiva in assenza del piano conduttore rappresenta il campo incidente, quello prodotto dall'immagine rappresenta il campo riflesso. Le immagini costituiscono un nuovo esempio di sorgenti equivalenti.

ESEMPIO Il campo generato da un dipolo hertziano perpendicolare ad un piano conduttore e posto alla distanza $h = \lambda_0/2$ da esso (Figura 11.5*a*) si riduce al calcolo del campo nella situazione di Figura 11.5*b*. La dimensione dell'intera sorgente (dipolo reale + immagine) non è piccola rispetto alla lunghezza d'onda ($D \approx \lambda_0$). La zona di radiazione inizia alla distanza di circa 10λ (vedi Figura 3.3).
Il campo di radiazione viene calcolato come segue:

$$\mathbf{N} = \int_{\text{dipolo}} \mathbf{J}\, e^{jk\mathbf{r}'\cdot\mathbf{u}_r}\, dV + \int_{\text{immagine}} \mathbf{J}\, e^{jk\mathbf{r}'\cdot\mathbf{u}_r}\, dV = \mathbf{u}_z Id\, e^{jkh\,\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_r} + \mathbf{u}_z Id\, e^{jkh(-\mathbf{u}_z)\cdot\mathbf{u}_r} =$$

$$\mathbf{u}_z Id\,(e^{j\pi\cos\theta} + e^{-j\pi\cos\theta}) = \mathbf{u}_z 2Id\cos(\pi\cos\theta)$$

Dunque:

$$N_\theta = -2Id\cos(\pi\cos\theta)\sin\theta \qquad E_\theta = j\frac{\eta_0 Id}{\lambda_0}\frac{e^{-jkr}}{r}\cos(\pi\cos\theta)\sin\theta$$

$$K = \frac{\eta_0}{2}\left(\frac{Id}{\lambda_0}\right)\cos^2(\pi\cos\theta)\sin^2\theta \qquad (0 \le \theta < \pi/2)$$

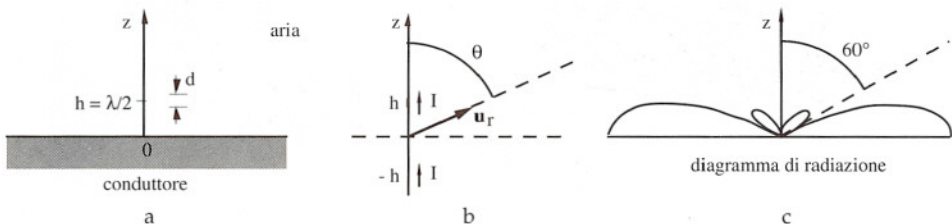



Figura 11.5

Il diagramma di radiazione è simmetrico rispetto all'asse z (Figura 11.5*c*). Si ha uno zero di radiazione nella direzione $\theta = 60°$. Esso è dovuto all'interferenza distruttiva fra l'onda incidente irradiata dal dipolo e quella riflessa dal conduttore. Un altro zero si ha nella direzione dell'asse perché in tale direzione è nulla l'intensità di entrambe le onde. È appena il caso di osservare che l'intensità di radiazione non è data dalla somma delle intensità di radiazione delle due sorgenti considerate separatamente: questo perché - si ricordi - la sovrapposizione degli effetti è lecita per i campi, ma non per le grandezze energetiche.

Le sorgenti immagine possono anche essere introdotte in situazioni particolari in cui i piani conduttori sono più d'uno. Ad esempio la Figura 11.6 mostra che il campo generato nel diedro compreso fra i semipiani conduttori π_1 e π_2, a 90° o 60° fra loro, può essere calcolato sostituendo i piani con tre o cinque immagini rispettivamente. Infatti i sistemi di sorgenti considerati nelle Figura 11.6 *b*, *d* hanno simmetria dispari sia rispetto al piano π_1 che al piano π_2 e danno quindi luogo a campi che soddisfano le corrette condizioni al contorno.[1]

La Figura 11.7 illustra l'applicazione del teorema delle immagini a elementi di corrente paralleli al piano conduttore e posti a ridosso di esso. L'immagine della corrente elettrica è opposta all'elemento effettivamente esistente e ne annulla il campo, poiché la distanza fra i due elementi è infinitesima. Quindi l'elemento di corrente elettrica non genera alcun campo.

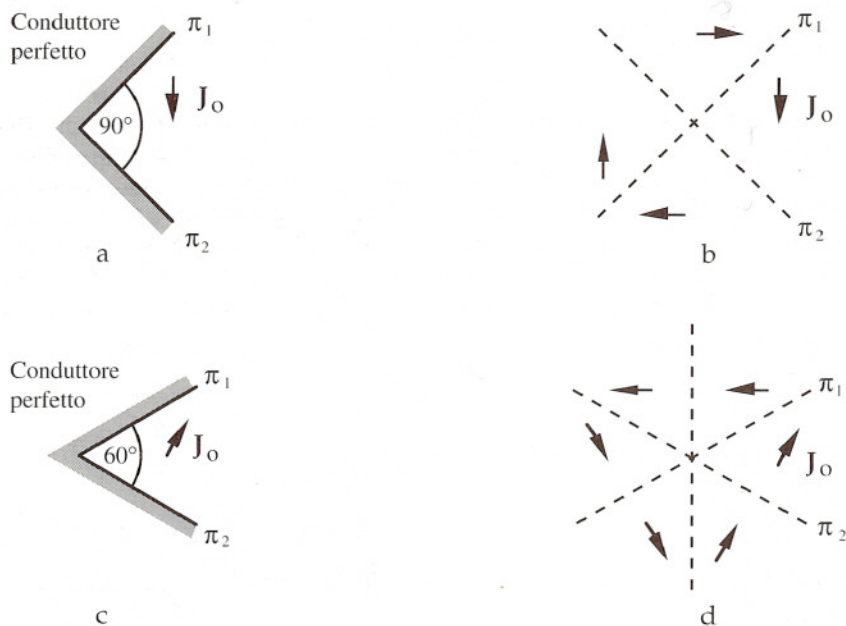



Figura 11.6

1 È possibile considerare le immagini in tutti i casi in cui l'angolo fra i semipiani conduttori è un sottomultiplo di π.

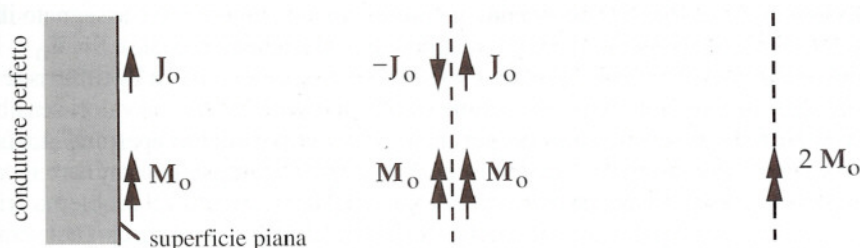



Figura 11.7

Al contrario, l'immagine della corrente magnetica è identica alla corrente effettiva; quindi il campo che si ha a destra del conduttore è uguale a quello che verrebbe generato nello spazio libero da un elemento di corrente magnetica di intensità doppia. Queste considerazioni si applicano anche a lamine di corrente elettrica o magnetica, poste a ridosso del piano conduttore. La lamina elettrica non genera campo, quella magnetica dà luogo ad un campo uguale a quello che una lamina di densità doppia genera nel mezzo illimitato.

7.12 Radiazione da un'apertura

Si voglia determinare il campo nel semispazio $z > 0$, essendo noto il campo elettrico (o magnetico) tangenziale al piano $z = 0$. Nel semispazio che interessa il mezzo è omogeneo, isotropo e senza perdite; le sorgenti del campo, non meglio precisate, sono tutte collocate nell'altro semispazio. Questo problema si presenta in molti casi di notevole interesse, come ad esempio nello studio del campo trasmesso attraverso un'apertura praticata in uno schermo piano (Figura 12.1*a*), ovvero nello studio del campo prodotto da un'antenna a riflettore prossima al piano $z = 0$, che determina su tale piano una distribuzione nota di un campo tangenziale (Figura 12.1*b*).

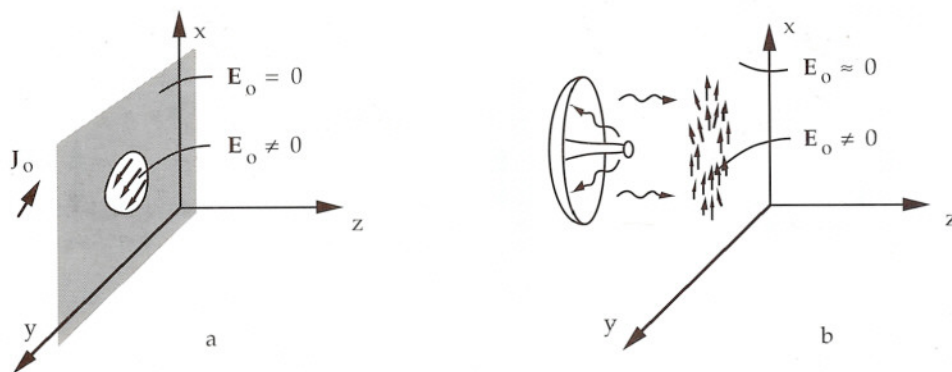



Figura 12.1

La successiva trattazione fa riferimento al caso in cui sul piano $z = 0$ è assegnato il campo elettrico (quando è assegnato il campo magnetico la trattazione è duale). Sia $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(x,y)$ il campo elettrico tangenziale al piano $z = 0$. Nel caso di Figura 12.1*a* $\mathbf{E}_0$ differisce da zero solo sull'apertura; in molti altri casi - come quello di Figura 12.1*b* - ha valori sensibili solo su una porzione limitata del piano che, per analogia, viene pure detta "apertura". La funzione $\mathbf{E}_0(x, y)$, detta "illuminazione", costituisce un dato sufficiente per determinare il campo.

Applicando l'equivalenza descritta nella Figura 3.2 del Capitolo 4 il problema originario (Figura 12.2*a*) viene trasformato in quello di Figura 12.2*b*, in cui il campo nel semispazio d'interesse viene considerato come effetto della lamina di corrente magnetica

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{u}_z$$

posta a ridosso di una parete elettrica. Infine, usando la regola delle immagini, la parete elettrica può essere rimossa raddoppiando la densità della lamina (Figura 12.2*c*). In quest'ultima situazione la lamina di densità

$$2\mathbf{M}_S = 2\,\mathbf{E}_0 \times \mathbf{u}_z \tag{12.1}$$

agisce in un mezzo isotropo illimitato, cosicché il campo di radiazione può essere calcolato utilizzando le formule della Tabella 9.2.
Si ha:

$$\mathbf{E} \approx j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(L_\theta\,\mathbf{u}_\phi - L_\phi\,\mathbf{u}_\theta) \tag{12.2}$$

dove L_θ e L_ϕ sono due delle componenti del vettore di radiazione magnetico generato dalla corrente $2\mathbf{M}_S$, cioè:

$$\mathbf{L} = 2\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0(x,\ y)\times\mathbf{u}_z\, e^{jk\,\mathbf{u}_r\cdot(\mathbf{u}_x x+\mathbf{u}_y y)}\,dx\,dy$$

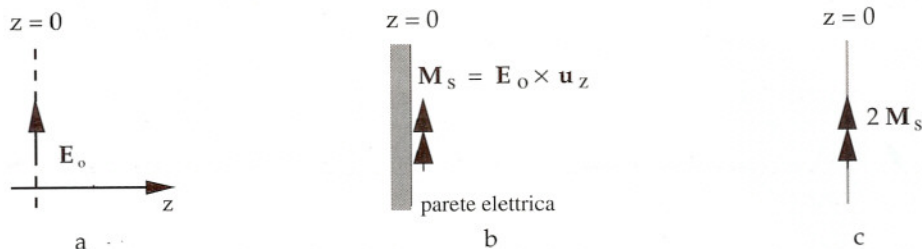



Figura 12.2

Ponendo

$$u = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_x = \sin\theta\cos\phi \qquad v = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_y = \sin\theta\sin\phi \tag{12.3}$$

il precedente integrale assume la forma:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(u, v) = 2\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0(x, y) \times \mathbf{u}_z \, e^{jk(ux+vy)} \, dx\, dy$$

(si noti che u e v sono i coseni direttori della semiretta che congiunge il punto d'osservazione con l'origine, rispetto agli assi x e y). Poiché:

$$\mathbf{E}_0(x, y) \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x \, E_{0y}(x, y) - \mathbf{u}_y \, E_{0x}(x, y)$$

si ha:

$$L_x = 2\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0y}(x, y) e^{jk(ux+vy)} \, dx\, dy = 4\pi e_y(-ku, -kv) \tag{12.4a}$$

$$L_y = -2\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0x}(x, y) e^{jk(ux+vy)} \, dx\, dy = -4\pi e_x(-ku, -kv) \tag{12.4b}$$

$$L_z = 0$$

dove sono state introdotte le trasformate di Fourier (vedi Appendice F) delle due componenti dell'illuminazione:

$$e_x(\xi, \psi) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0x}(x, y) e^{-j(\xi x + \psi y)} \, dx\, dy$$

$$e_y(\xi, \psi) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0y}(x, y) e^{-j(\xi x + \psi y)} \, dx\, dy \tag{12.5}$$

Passando dalle componenti cartesiane di **L** a quelle in coordinate sferiche (vedi formule A.91) si ottiene:

$$L_\theta = 4\pi \left[\cos\varphi \, e_y(-ku, -kv) - \sin\varphi \, e_x(-ku, -kv)\right] \cos\theta$$

$$L_\varphi = -4\pi \left[\sin\varphi \, e_y(-ku, -kv) + \cos\varphi \, e_x(-ku, -kv)\right] \tag{12.6}$$

Introducendo queste espressioni nella (12.2) si ottiene il campo elettrico nella zona di radiazione. L'intensità di radiazione viene ottenuta usando la formula (vedi Tabella 9.2):

$$K = \frac{1}{8\eta\lambda^2}(|L_\theta|^2 + |L_\phi|^2) \tag{12.7}$$

Le (12.5) vengono dette "spettri dell'illuminazione" e le variabili ξ, ψ vengono dette "variabili spettrali". La dipendenza del campo lontano da θ e ϕ è dettata dalla forma degli spettri all'interno del cerchio di raggio k, con centro nell'origine del piano ξ, ψ (Figura 12.3); infatti il campo dipende dai valori degli spettri nel punto di coordinate

$$\xi = -ku = -k \sin\theta \cos\phi$$

$$\psi = -kv = -k \sin\theta \sin\phi.$$

la cui distanza dall'origine è

$$k \sin\theta \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = k \sin\theta \leq k$$

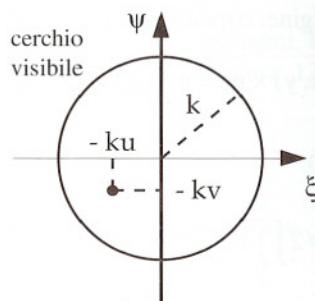



Figura 12.3

Quindi, ai fini del calcolo del campo lontano, interessano solo le parti di spettro che ricadono nel cerchio suddetto (cerchio visibile). Esse costituiscono le cosiddette "parti visibili" degli spettri, dato che da esse soltanto dipende il campo osservabile a grande distanza dall'apertura. Illuminazioni diverse, ma con spettri coincidenti all'interno del cerchio visibile, danno luogo allo stesso campo di radiazione. Pertanto esse sono indistinguibili se osservate a grande distanza. Come si vedrà nel Paragrafo 16, illuminazioni siffatte differiscono solo nei dettagli fini, apprezzabili su distanze minori della lunghezza d'onda. Si ritrova quindi il solito risultato: l'osservazione del campo di radiazione non permette di apprezzare la struttura fine dell'illuminazione, a livelli di definizione minori della lunghezza d'onda.

7.13 Irraggiamento da un'apertura rettangolare illuminata uniformemente

Si desidera calcolare il campo irraggiato dall'apertura rettangolare indicata nella Figura 13.1, nell'ipotesi che essa sia illuminata da un campo elettrico costante, polarizzato nella direzione x. L'illuminazione è definita come segue:

$$E_{0x}(x, y) = \begin{cases} E_0 = \text{cost.} & \text{dentro l'apertura} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad E_{0y} = 0$$

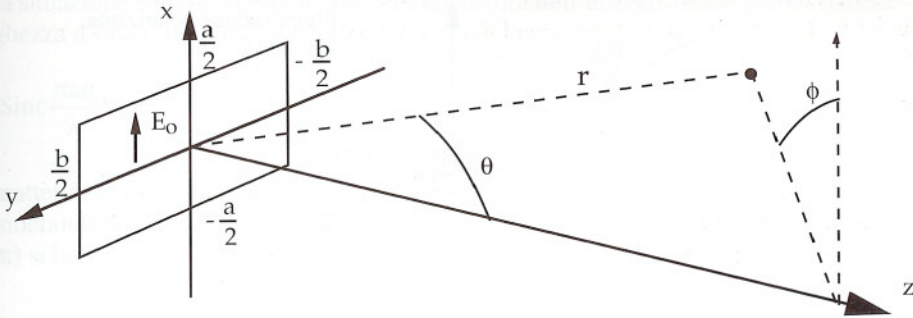



Figura 13.1

Un'illuminazione di questo tipo si può ottenere (almeno approssimativamente) in un'apertura rettangolare praticata su uno schermo opaco, quando un'onda piana uniforme polarizzata secondo x incide perpendicolarmente sulla parete posteriore dello schermo.
Calcolando la trasformata di E_x si ottiene facilmente

$$e_x(\xi,\ \psi) = \frac{E_0\, ab}{2\pi} \mathrm{Sinc}(a\xi/2)\ \mathrm{Sinc}(b\psi/2) \qquad (\mathrm{Sinc}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \sin x/x)$$

Inoltre si ha $e_y = 0$. Pertanto:

$$L_\theta = -2\, E_0\, ab \sin\phi \cos\theta\ \mathrm{Sinc}(aku/2)\ \mathrm{Sinc}(bkv/2)$$

$$L_\phi = -2\, E_0\, ab \cos\phi\ \mathrm{Sinc}(aku/2)\ \mathrm{Sinc}(bkv/2)$$

Dunque, nella zona di radiazione il campo elettrico e l'intensità di radiazione sono dati da:

$$\mathbf{E} \approx jE_0\, ab \frac{e^{-jkr}}{\lambda r}(\cos\phi\, \mathbf{u}_\theta - \sin\phi \cos\theta\, \mathbf{u}_\phi)\mathrm{Sinc}\frac{\pi au}{\lambda}\mathrm{Sinc}\frac{\pi bv}{\lambda} \tag{13.1}$$

$$K \approx \frac{E_0^2}{2\eta}\frac{a^2b^2}{\lambda^2}(\cos^2\phi + \sin^2\phi\cos^2\theta)\mathrm{Sinc}^2\frac{\pi au}{\lambda}\mathrm{Sinc}^2\frac{\pi bv}{\lambda} \tag{13.2}$$

Se si considera un diverso sistema di coordinate sferiche in cui l'asse polare coincide con l'asse y (Figura 13.2), si può mostrare che

$$\cos\phi\, \mathbf{u}_\theta - \sin\phi\cos\theta\, \mathbf{u}_\phi = \sin\theta'\, \mathbf{u}'_\phi$$

dove l'apice denota quantità riferite al nuovo sistema. Pertanto il campo elettrico è tangente alle circonferenze giacenti su piani paralleli a x, z con centro sull'asse y. Il campo magnetico, dato da $\mathbf{H} = \mathbf{u}_r \times \mathbf{E}/\eta$, è diretto secondo $\mathbf{u}'_\theta$. Sia $\mathbf{E}$ che $\mathbf{H}$ sono polarizzati linearmente.

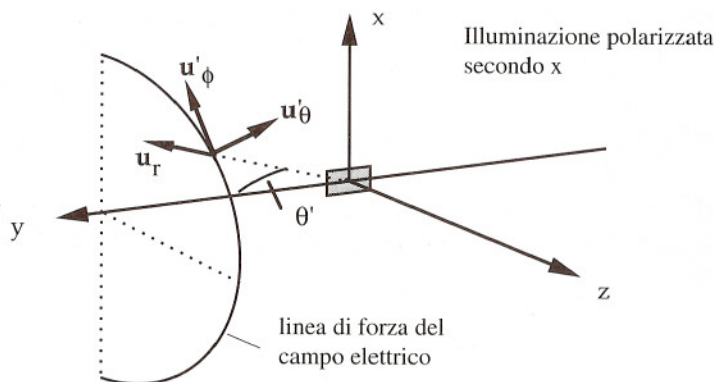



Figura 13.2

L'andamento della funzione Sinc(X) è quello indicato in Figura 13.3. Se le dimensioni dell'apertura sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda si ha

$$\frac{\pi a u}{\lambda} << \pi \qquad \frac{\pi b v}{\lambda} << \pi \qquad \mathrm{Sinc}\frac{\pi a u}{\lambda} \approx \mathrm{Sinc}\frac{\pi b v}{\lambda} \approx 1$$

e quindi:

$$\mathbf{E} \approx \mathrm{j} E_0 \, ab \frac{e^{-jkr}}{\lambda r} \sin\theta' \, \mathbf{u}'_\phi \qquad (a << \lambda, \; b << \lambda) \tag{13.3}$$

Dunque, se l'apertura è piccola rispetto alla lunghezza d'onda, il campo è costante lungo ciascuna linea di forza. In questo caso l'intensità di radiazione è proporzionale a $\sin^2\theta'$ ed è quindi sensibile anche in direzioni molto discoste dall'asse z. Ad esempio l'intensità di radiazione nella direzione x è uguale a quella che si ha nella direzione z (per entrambe le direzioni si ha $\theta' = 90°$).

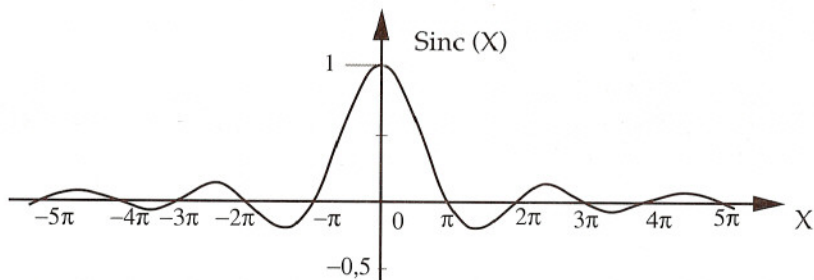



Figura 13.3

La situazione cambia molto quando le dimensioni dell'apertura sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda. In questo caso l'andamento del prodotto

$$\mathrm{Sinc}\frac{\pi a u}{\lambda}\mathrm{Sinc}\frac{\pi b v}{\lambda} \tag{13.4}$$

è caratterizzato da un picco localizzato intorno all'asse z ($u = v = 0$). Ad esempio, considerando il valore assoluto del prodotto nelle direzioni giacenti sul piano xz ($\phi = 0$ e $\phi = \pi$) si ha:

$$v = 0 \qquad u = \pm \sin\theta \qquad \left|\mathrm{Sinc}\frac{\pi a u}{\lambda}\mathrm{Sinc}\frac{\pi b v}{\lambda}\right| = \left|\mathrm{Sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)\right|$$

Il diagramma polare che rappresenta questa funzione al variare di θ è ottenuto con la costruzione di Figura 13.4. La figura evidenzia l'esistenza di un picco intorno all'asse z, e di un certo numero di direzioni di zero θ_1, θ_2, ...

L'angolo compreso fra le due direzioni di zero che delimitano il picco principale è

$$\Delta_{xz} = 2\theta_1$$

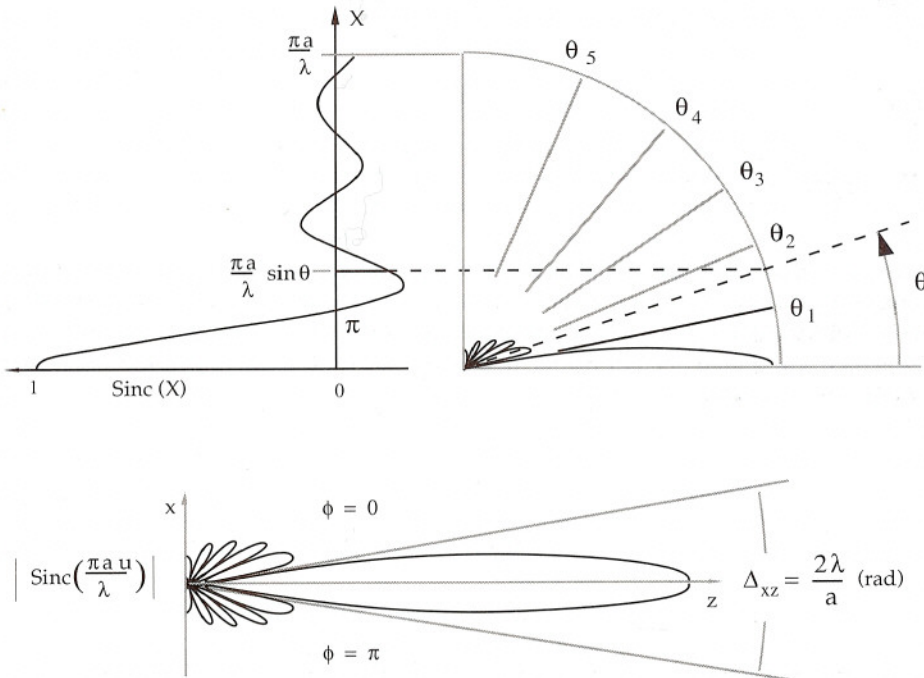



Figura 13.4

Il valore di θ_1 viene determinato dalla condizione

$$\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_1 = \pi$$

e quindi:

$$\theta_1 = \arcsin \lambda/ a$$

Se il lato *a* è molto maggiore della lunghezza d'onda si ha $\theta_1 \approx \lambda/a$ e quindi risulta:

$$\Delta_{xz} \approx 2\lambda/a \qquad [rad] \qquad (a >> \lambda) \qquad (13.5)$$

Se si considera la (13.4) nel semipiano yz si ottiene un andamento analogo. Sul piano yz il picco della funzione è compreso nell'angolo:

$$\Delta_{yz} \approx 2\lambda/b \qquad [rad] \qquad (b >> \lambda) \qquad (13.6)$$

Si vede che se le dimensioni dell'apertura sono molto maggiori della lunghezza d'onda il picco della funzione (13.4) occupa una regione angolare molto piccola (ad esempio nel caso di un'apertura di lati $a = b = 100\lambda$ si ha $\Delta_{xz} = \Delta_{yz} \approx 0.02\text{rad} \approx 1.15°$). Si vede inoltre che al di fuori del picco il valore assoluto della (13.4) decresce rapidamente. Pertanto, se si considera l'espressione dell'intensità di radiazione (13.2), si comprende che la radiazione è intensa solo in direzioni molto prossime all'asse. Dunque la potenza irraggiata è principalmente confinata in un "fascio", la cui ampiezza angolare sui piani xz e yz è data dalle (13.5) e (13.6). La Figura 13.4 evidenzia l'esistenza di altre direzioni in cui si hanno massimi locali dell'intensità di radiazione. Nelle direzioni corrispondenti a questi massimi l'intensità di radiazione è però molto minore di quella che si ha nel fascio.

Se si considerano aperture di forma diversa da quella rettangolare e/o illuminazioni non uniformi (*ma con fase costante*), si vede che in ogni caso lo spettro dell'illuminazione ha un picco nell'origine del piano ξ, ψ. Ne consegue che l'intensità di radiazione è massima nella direzione $u = v = 0$, cioè nella direzione dell'asse z. Si vede inoltre che il picco è tanto più stretto quanto maggiori sono le dimensioni dell'apertura rispetto alla lunghezza d'onda. Dunque i risultati trovati per l'apertura rettangolare illuminata uniformemente valgono qualitativamente anche per altri tipi di apertura e/o di illuminazione. In ogni caso *il fascio è concentrato in un angolo solido tanto minore quanto più le dimensioni dell'apertura sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda.* In ottica le dimensioni delle aperture sono spesso grandissime rispetto alla lunghezza d'onda e l'ampiezza del fascio è quasi sempre molto piccola.

I risultati ottenuti spiegano il ben noto fenomeno della diffrazione. Ad esempio, se l'apertura è costituita da un foro praticato su uno schermo opaco su cui incide normalmente un'onda luminosa monocromatica piana (Figura 13.5) l'intensità di radiazione osservabile nella regione di Fraunhofer differisce da zero in quasi tutte le direzioni, anche se la massima intensità si ha intorno alla direzione perpendicolare al foro. Questo fatto è evidenziato dalla figura di diffrazione che si può osservare proiettando la luce trasmessa dal foro su di uno schermo posto a grande distanza.

$$L_\theta = -4\pi a^2 E_0 \frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\cos\theta\sin\phi \qquad L_\phi = -4\pi a^2 E_0 \frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\cos\phi$$

$$\mathbf{E} = j\frac{2\pi a^2 E_0}{\lambda}\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}(\cos\phi\,\mathbf{u}_\theta - \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{u}_\phi) \tag{14.2}$$

$$K = \frac{2(\pi a^2 E_0)^2}{\eta\lambda^2}\left(\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right)^2(\cos^2\phi + \cos^2\theta\,\sin^2\phi) \tag{14.3}$$

Il vettore $\cos\phi\,\mathbf{u}_\theta - \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{u}_\phi$ è quello stesso che appare nella (13.1). La polarizzazione è quindi identica a quella considerata nel paragrafo precedente (vedi Figura 13.2).

L'andamento della funzione $J_1(X)/X$ è indicato nella Figura 14.2. Poiché la funzione è massima in $X = 0$, la radiazione è massima per $\theta = 0$, cioè nella direzione dell'asse z. L'intensità di radiazione è nulla nelle direzioni θ_p per cui

$$ka\sin\theta_p = x_{1p}$$

dove x_{1p} indica il p-esimo zero di J_1. Pertanto il lobo principale del diagramma di radiazione è contenuto dentro un cono di apertura

$$\Delta = 2\theta_1 = 2\arcsin\frac{x_{11}}{ka} = 2\arcsin\frac{0.61\lambda}{a}$$

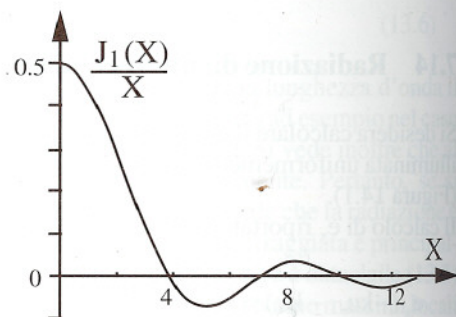



Figura 14.2

Se il raggio dell'apertura è molto maggiore della lunghezza d'onda, l'angolo Δ è molto piccolo e si ha:

$$\Delta \approx 1.22\,\lambda/a \quad [\text{rad}] \qquad (a \gg \lambda) \tag{14.4}$$

Questo risultato conferma che il fascio è tanto più stretto quanto maggiori sono le dimensioni dell'apertura.

Se l'apertura è di grandi dimensioni, la parte più significativa del diagramma di radiazione è compresa in una zona angolare per cui:

$$\cos\theta \approx 1 \qquad \cos^2\phi + \cos^2\theta\,\sin^2\phi \approx \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

Dunque, per la (14.3), K è praticamente indipendente da ϕ e il diagramma di radiazione è pressoché simmetrico intorno all'asse z.

■ CALCOLO DI e_x - Si ha:

$$e_x(-ku,\ -kv) = \frac{E_0}{2\pi}\int_S e^{jk(ux+vy)}\,dx\,dy = \frac{E_0}{2\pi}\int_S e^{jk\mathbf{s}\cdot\bar{\mathbf{r}}}\,dS$$

dove $\bar{\mathbf{r}} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$, $\mathbf{s} = u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y$ ed S indica l'apertura (Figura 14.3). Indicato con χ l'angolo fra $\bar{\mathbf{r}}$ ed $\mathbf{s}$, si ha:

$$\mathbf{s}\cdot\bar{\mathbf{r}} = \bar{r}\,s\cos\chi = \bar{r}\sqrt{u^2+v^2}\cos\chi = \bar{r}\sin\theta\cos\chi$$

Pertanto, usando come variabili d'integrazione le coordinate polari $\bar{r}$, χ risulta:

$$e_x(-ku,\ -kv) = \frac{E_0}{2\pi}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\bar{r}\sin\theta\cos\chi}\,\bar{r}\,d\bar{r}\,d\chi$$

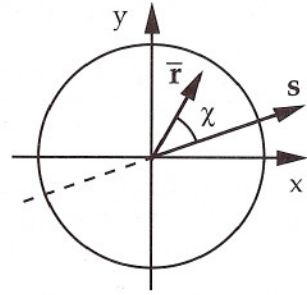



Figura 14.3

La formula (E.21) dell'Appendice E permette di calcolare l'integrale rispetto a χ. Risulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\bar{r}\sin\theta\cos\chi}\,d\chi = 2\pi J_0(k\bar{r}\sin\theta)$$

Quindi:

$$e_x(-ku,\ -kv) = E_0\int_0^a \bar{r}\,J_0(k\bar{r}\sin\theta)\,d\bar{r} = \frac{E_o}{(k\sin\theta)^2}\int_0^{ka\sin\theta} q\,J_0(q)\,dq$$

D'altro canto, per la (E.15) si ha:

$$q\,J_0(q) = J_1(q) + q\,J_1'(q) = \frac{d(q\,J_1)}{dq} \qquad \int q\,J_0(q)\,dq = q\,J_1(q) + \text{cost.}$$

Pertanto, calcolando l'integrale si ottiene la (14.1). ■

7.15 Campo in prossimità dell'apertura - approssimazione parassiale

Quando le dimensioni dell'apertura sono molto maggiori della lunghezza d'onda la zona di radiazione ha inizio a distanze che superano di molto le dimensioni dell'apertura stessa. Ad esempio, con un rapporto $D/\lambda > 1000$ (che in ottica corrisponde ad aperture di dimensioni maggiori di circa 1 mm) la zona di radiazione inizia a oltre 2000D. Spesso, specie nello studio dei sistemi ottici, interessa conoscere il campo a distanze minori, all'interno della zona di Fresnel o ancora più vicino all'apertura. Le formule ricavate nei paragrafi precedenti non sono utili a questo scopo e devono essere sostituite da espressioni più precise.

L'espressione esatta del campo, valida anche a ridosso dell'apertura, viene ottenuta partendo dall'espressione del potenziale **F** generato dalla corrente $2\mathbf{M}_s$ (vedi Figura 12.2*c*). Si ha:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0(x', y') \times \mathbf{u}_z \frac{e^{-jkR}}{R} dx' dy' \qquad (z > 0)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$$

Si noti che l'integrale è esteso a tutto il piano z = 0 (Figura 15.1), ma che la funzione da integrare ha valori sensibili solo sull'apertura.

Il campo elettrico in tutto il semispazio $z > 0$ viene ottenuto sostituendo nell'espressione

$$\mathbf{E} = -\frac{\nabla \times \mathbf{F}}{\varepsilon}$$

e scambiando l'ordine delle operazioni di derivazione e d'integrazione. Poiché il rotore viene calcolato rispetto alle coordinate del punto di osservazione, si ha:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}_0(x', y') \times \mathbf{u}_z \frac{e^{-jkR}}{R} \right) = -[\mathbf{E}_0(x', y') \times \mathbf{u}_z] \times \nabla \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right)$$

Si ottiene quindi la seguente espressione del campo elettrico, valida nell'intero semispazio $z > 0$:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}_0(x', y') \times \mathbf{u}_z] \times \nabla \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) dx' dy' \qquad (z > 0) \qquad (15.1)$$

È possibile semplificare la formula se ci si limita a considerare il campo a distanze $z >> \lambda/2\pi$. Infatti, introducendo il versore $\mathbf{u}_R$ indicato nella Figura 15.1 si ha:

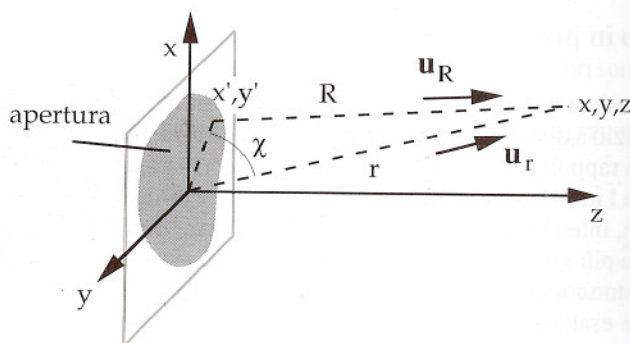



Figura 15.1

$$\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\nabla R=-\left(\frac{e^{-jkR}}{R^2}+\frac{jke^{-jkR}}{R}\right)\mathbf{u}_R=$$

$$-\left(\frac{1}{R}+\frac{j2\pi}{\lambda}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}\mathbf{u}_R\approx-\frac{j2\pi}{\lambda}\frac{e^{-jkR}}{R}\mathbf{u}_R$$

dato che $1/R \leq 1/z << 2\pi/\lambda$. Pertanto la (15.1) si riduce alla seguente espressione:

$$\mathbf{E}(x,\ y,\ z)\approx j\frac{1}{\lambda}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{u}_R\times[\mathbf{E}_0(x',\ y')\times\mathbf{u}_z]\frac{e^{-jkR}}{R}dx'\,dy' \qquad (z>>\lambda/2\pi) \quad (15.2)$$

Sviluppando il doppio prodotto vettoriale si vede che le componenti E_x ed E_y sono date dall'espressione:

$$E_\alpha(x,\ y,\ z)\approx j\frac{1}{\lambda}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{u}_R\cdot\mathbf{u}_z\,E_\alpha(x',\ y',\ 0)\ \frac{e^{-jkR}}{R}dx'\,dy' \qquad (\alpha=x,\ y)$$

dove, in luogo di $E_{0\alpha}(x', y')$, si è scritto $E_\alpha(x', y', 0)$.

Se il campo viene considerato a grande distanza dall'apertura e in direzione poco discosta dall'asse z (ad esempio entro ±7.5° dall'asse, come nella regione "parassiale" indicata nella Figura 15.2) si ha:

$$\mathbf{u}_R\cdot\mathbf{u}_z\approx 1 \qquad\qquad 1/R\approx 1/z$$

Inoltre, nel calcolo dell'esponenziale si può fare la seguente approssimazione:

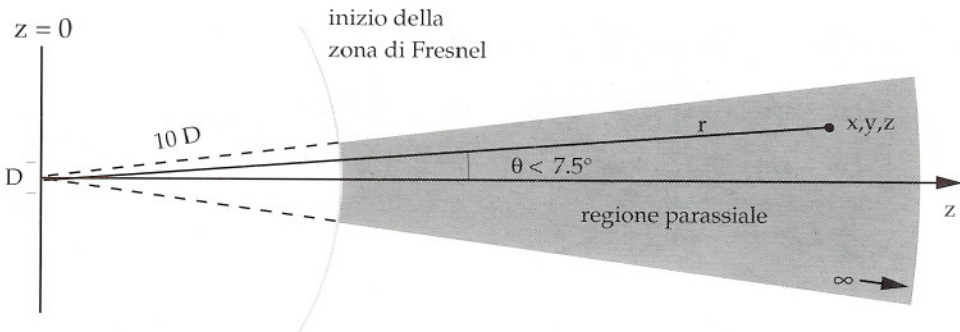



Figura 15.2

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{z^2}} \approx$$

$$z + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z}$$

Così si ottiene l'approssimazione "parassiale" del campo a grande distanza dall'apertura:

$$E_\alpha(x,\ y,\ z) \approx \frac{j\,e^{-jk(z+\frac{x^2+y^2}{2z})}}{\lambda z} \int\int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(x',\ y',\ 0)\, e^{-jk\frac{x'^2+y'^2}{2z}}\, e^{jk\frac{xx'+yy'}{z}}\, dx'\, dy'$$

$$(z >> D,\ z >> \lambda/2\pi,\ z >> \sqrt{x^2+y^2}) \qquad (15.3)$$

L'approssimazione "parassiale", è particolarmente utile per studiare nella zona di Fresnel il campo generato da aperture di grandi dimensioni, dato che, nelle più comuni condizioni di illuminazione, tali aperture generano un campo sensibile solo in direzioni poco discoste dall'asse.[1]

7.16 Sviluppo in onde piane

Partendo dalla (15.1), con il procedimento riportato successivamente, è possibile dedurre una rappresentazione integrale del campo molto diversa, detta "sviluppo in onde piane". In questa espressione l'integrale viene fatto rispetto alle variabili spettrali ξ, ψ invece che nel dominio delle variabili spaziali x', y'. Si ha:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}(\xi,\ \psi)\, e^{-j\mathbf{k}(\xi,\ \psi)\cdot\mathbf{r}}\, d\xi\, d\psi \qquad (z > 0) \qquad (16.1)$$

dove i vettori **k** ed **e** sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{k} = \begin{cases} -\xi\mathbf{u}_x - \psi\mathbf{u}_y + \sqrt{k^2-\xi^2-\psi^2}\,\mathbf{u}_z & \text{per } \xi^2+\psi^2 < k^2 \\ -\xi\mathbf{u}_x - \psi\mathbf{u}_y - j\sqrt{\xi^2+\psi^2-k^2}\,\mathbf{u}_z & \text{per } \xi^2+\psi^2 > k^2 \end{cases} \qquad (16.2)$$

---

1 Naturalmente la (15.3) vale anche nella regione di radiazione dove, a causa della condizione $z > 2D^2/\lambda$, è lecita l'ulteriore approssimazione:

$$e^{-jk(x'^2+y'^2)/2z} \approx 1$$

$$\mathbf{e}=\begin{cases} e_x\,\mathbf{u}_x+e_y\,\mathbf{u}_y+\dfrac{\xi e_x+\psi e_y}{\sqrt{k^2-\xi^2-\psi^2}}\mathbf{u}_z & \text{per } \xi^2+\psi^2<k^2 \\ e_x\,\mathbf{u}_x+e_y\,\mathbf{u}_y+j\dfrac{\xi e_x+\psi e_y}{\sqrt{\xi^2+\psi^2-k^2}}\mathbf{u}_z & \text{per } \xi^2+\psi^2>k^2 \end{cases} \tag{16.3}$$

(e_x ed e_y sono le trasformate definite dalle Equazioni 12.5).

Il vettore **k** può essere reale o complesso. All'interno del cerchio visibile **k** è reale, ha modulo costante (pari a $k = 2\pi/\lambda$) e, al variare di ξ e di ψ, assume tutte le possibili direzioni nel semispazio $z > 0$ (vedi Figura 16.1*a*). All'esterno del cerchio visibile la parte reale di **k** ha modulo maggiore di k ed assume tutte le possibili direzioni sul piano dell'apertura. La parte immaginaria è diretta secondo z e cresce al crescere di ξ e di ψ (Figura 16.1*b*). Inoltre, per le (16.2) e (16.3), in tutti i casi si ha:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=k^2 \qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{k}=0 \tag{16.4}$$

Queste considerazioni evidenziano che i contributi elementari

$$\frac{1}{2\pi}\mathbf{e}\,d\xi\,d\psi\,e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

hanno tutte le caratteristiche del campo elettrico di un'onda piana, uniforme (nella regione visibile) o evanescente (altrove). Per questa ragione l'espressione (16.1) viene detta "sviluppo in onde piane".

Le onde uniformi si propagano in tutte le possibili direzioni nel semispazio $z > 0$; le onde evanescenti si propagano in tutte le possibili direzioni parallele al piano dell'apertura e, al crescere di z, la loro ampiezza decresce esponenzialmente come

$$e^{-\sqrt{\xi^2+\psi^2-k^2}\,z}$$

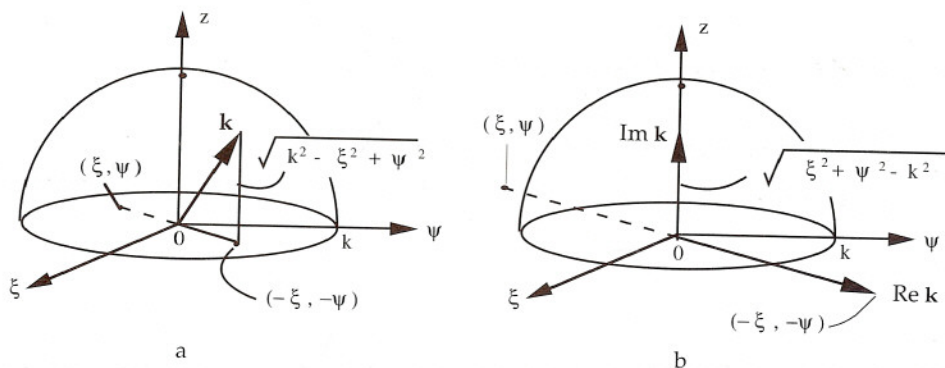



Figura 16.1

Dunque il contributo delle onde evanescenti può essere importante solo in prossimità del piano dell'apertura. Al crescere di z l'attenuazione delle onde evanescenti è talmente elevata da poter assumere che il campo sia determinato esclusivamente dalla onde uniformi. Questo fa comprendere perché solo la parte visibile dello spettro influisce sul campo di radiazione.

Le onde evanescenti hanno lunghezze d'onda minori di λ. Per questa ragione, i contributi evanescenti sono sensibili solo se l'illuminazione dell'apertura presenta variazioni brusche entro distanze dell'ordine di λ. Invece essi sono trascurabili nel caso di un'apertura di dimensioni molto maggiori della lunghezza d'onda, quando l'illuminazione varia lentamente e tende dolcemente a zero ai bordi dell'apertura.

▪ DEDUZIONE DELLA (16.1) - Per la formula (G.13) trovata nell'Appendice G, tenendo conto del fatto che $z > 0$ e $z' = 0$, si ha:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\kappa_z z}}{j\kappa_z} e^{j[\xi(x-x')+\psi(y-y')]} d\xi\, d\psi = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{j\kappa_z} e^{-j(\xi x'+\psi y')} d\xi\, d\psi$$

dove $\kappa_z = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \psi^2}$ (Re $\kappa_z \geq 0$, Im $\kappa_z \leq 0$). Pertanto:

$$\nabla\frac{e^{-jkR}}{R} = -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}\, e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\kappa_z} e^{-j(\xi x'+\psi y')} d\xi\, d\psi$$

Sostituendo nella (15.1) e scambiando l'ordine delle integrazioni, dopo semplici passaggi si ottiene la (16.1). ■

8
Antenne

I concetti generali esposti nel capitolo precedente trovano un'importante applicazione nello studio delle antenne, componenti essenziali dei sistemi elettronici che sfruttano le onde elettromagnetiche per trasmettere i segnali attraverso lo spazio libero. Mediante le antenne, infatti, le onde vengono trasmesse dai circuiti allo spazio (antenne trasmittenti) ovvero dallo spazio ai circuiti (antenne riceventi). Sebbene ad alta frequenza tutte le strutture aperte siano in grado di irraggiare o di captare energia elettromagnetica, le antenne si distinguono per l'efficienza con cui effettuano queste operazioni e per le loro proprietà direzionali, che permettono di irraggiare o di ricevere con maggiore intensità in certe direzioni prestabilite.

La struttura delle antenne varia molto secondo la frequenza d'impiego e il tipo di applicazione. Alle frequenze più basse le antenne sono prevalentemente costituite da dipoli metallici, mentre alle frequenze più alte, nella regione delle microonde e delle onde millimetriche, esse sono costituite da radiatori più facilmente collegabili con le guide d'onda (fenditure, trombe, ecc.). Nelle applicazioni in cui è richiesta un'elevata direzionalità (esempio radar, antenne per satelliti, antenne per radioastronomia) le antenne sono costituite da molti elementi radianti (schiere) e/o da strutture focalizzanti di tipo ottico (riflettori, lenti). In ogni caso, per ottenere un'alta direzionalità è necessario usare antenne di dimensioni molto maggiori della lunghezza d'onda, a volte veramente imponenti per dimensioni e complessità.

Nonostante la grande varietà strutturale, i concetti basilari su cui è fondato il funzionamento di tutte le antenne sono identici. Questo capitolo ha lo scopo di esporre tali concetti, di introdurre i parametri fondamentali che permettono l'utilizzazione delle antenne e, infine, di fornire una prima idea sulle problematiche inerenti alla loro progettazione.

Nell'ultima parte del capitolo viene mostrato che le proprietà delle antenne in ricezione sono strettamente legate a quelle in trasmissione, così che, note queste ultime, le prime sono immediatamente determinate. Per questa ragione la maggior parte del capitolo riguarda lo studio delle proprietà delle antenne trasmittenti. I primi due paragrafi sono dedicati ad introdurre i parametri fondamentali che caratterizzano le antenne (guadagno, polarizzazione e impedenza d'ingresso). I successivi sei paragrafi sono dedicati allo studio delle proprietà dei radiatori di uso più comune (dipoli, fenditure, guide troncate e trombe). I Paragrafi 9, 10, 11 sono dedicati ad esporre le idee basilari sul funzionamento delle schiere, mentre il Paragrafo 12 fornisce qualche idea sulle antenne a riflettore parabolico. I tre ultimi paragrafi riguardano le proprietà delle antenne riceventi.

8.1 Direttività e guadagno

Sia $K(\theta, \phi)$ l'intensità di radiazione prodotta da un'antenna trasmittente che irraggia la potenza P_{irr}. Se la potenza fosse distribuita uniformemente in tutte le direzioni l'intensità di radiazione sarebbe data da:

$$K_m = \frac{P_{irr}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} K(\theta, \phi)\, \text{sen}\,\theta\, d\theta$$

È evidente che K_m rappresenta il valore medio di $K(\theta, \phi)$. Poiché l'antenna concentra la radiazione intorno a certe direzioni, il rapporto fra l'intensità di radiazione massima (K_x) e l'intensità media è tanto maggiore quanto più la radiazione è concentrata, cioè - come si suol dire - quanto più l'antenna è "direttiva". Per questa ragione il rapporto

$$D = \frac{K_x}{K_m} = \frac{4\pi K_x}{P_{irr}}$$

prende il nome di "direttività" dell'antenna.

Una quantità simile alla direttività è il "guadagno", definito dall'espressione:

$$g_x = \frac{4\pi K_x}{P}$$

dove P è la potenza all'ingresso dell'antenna (potenza erogata dal generatore). A causa delle perdite nell'antenna, tale potenza supera quella irraggiata, così che il guadagno è minore della direttività. Più precisamente, introducendo la "efficienza di radiazione"

$$\xi = \frac{P_{irr}}{P}$$

e confrontando le definizioni del guadagno e della direttività si deduce:

$$g_x = \xi D$$

L'efficienza della maggior parte delle antenne è talmente elevata ($\xi \approx 1$) da poter confondere il guadagno con la direttività.

Il guadagno è una delle principali specifiche di un'antenna, perché permette di determinare l'intensità di radiazione massima, nota la potenza di alimentazione. Infatti, per la definizione del guadagno si ha:

$$K_x = \frac{P}{4\pi} g_x \tag{1.1}$$

La quantità $P/4\pi$ rappresenta l'intensità di radiazione che si otterrebbe se, in luogo dell'antenna in esame, si usasse un radiatore isotropico ideale, cioè un radiatore che irraggia l'intera potenza P uniformemente in tutte le direzioni. La (1.1) indica che l'antenna, grazie alla sua capacità di concentrare la radiazione, permette di ottenere un'intensità di radiazione massima che è g_x volte quella che si otterrebbe nel caso del radiatore isotropico. Questa considerazione giustifica l'uso del termine "guadagno".

Il guadagno g_x coincide con il massimo della funzione

$$g(\theta, \phi) = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{P} \tag{1.2}$$

detta "guadagno nella direzione θ, ϕ". Se $g(\theta, \phi)$ è nota, l'intensità di radiazione in una direzione qualunque può essere determinata in funzione della potenza di alimentazione mediante l'espressione:

$$K(\theta, \phi) = \frac{P}{4\pi} g(\theta, \phi) \tag{1.3}$$

Sostituendo nelle formule che forniscono il campo di radiazione in funzione dell'intensità di radiazione e del vettore di polarizzazione (vedi Tabella 9.2 del capitolo precedente) si ottiene:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{\eta P}{2\pi} g(\theta, \phi)}\, \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{p}(\theta, \phi) \tag{1.4a}$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \phi) = \mathbf{u}_r \times \mathbf{E}(r, \theta, \phi) / \eta \tag{1.4b}$$

Inoltre la densità della potenza irraggiata può essere espressa come segue:[1]

$$\mathbf{S}(r, \theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{P}{4\pi r^2} g(\theta, \phi) \mathbf{u}_r \tag{1.5}$$

Dunque il campo di radiazione prodotto da un'antenna alimentata con una potenza nota può immediatamente essere determinato se si conoscono le funzioni $g(\theta, \phi)$ e $\mathbf{p}(\theta, \phi)$. D'altro canto, dalle (1.1) e (1.2) si deduce:

$$g(\theta, \phi) = g_x \frac{K(\theta, \phi)}{K_x}$$

1 Normalmente le antenne irraggiano in aria o nel vuoto ($k = 2\pi/\lambda_0$, $\eta = \eta_0$). Se si desidera considerare l'attenuazione nell'aria (vedi Figura 3.1, Capitolo 2), la (1.5) va corretta moltiplicando per $e^{-2\alpha r}$. Analogamente il fattore di correzione da introdurre nella (1.4*a*) è $e^{-\alpha r}$. L'attenuazione verrà ignorata in tutte le successive considerazioni.

Pertanto $g(\theta, \phi)$ dipende da g_x e dal diagramma di radiazione.[1] Dunque *il guadagno* g_x, *il diagramma di radiazione e la polarizzazione caratterizzano completamente le proprietà di radiazione di un'antenna.* Questi sono i dati principali di cui è necessario disporre per caratterizzare le antenne come componenti di un sistema.

8.2 Impedenza d'ingresso

La Figura 2.1 rappresenta schematicamente un'antenna alimentata da un generatore. L'ingresso dell'antenna è posto sulla sezione AA' della guida (o linea) di alimentazione. La linea a destra di AA' viene considerata come parte integrante dell'antenna, assieme a tutti gli altri elementi circuitali che la collegano alla struttura radiante vera e propria (esempio adattatori di impedenza, reti di alimentazione degli elementi radianti di una schiera, ecc.). L'impedenza e la corrente all'ingresso dell'antenna sono indicati da $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ e I rispettivamente.

Il generatore, che è completamente schermato da un involucro conduttore, è delimitato dalla superficie chiusa S, indicata in tratteggio. La potenza apparente che attraversa S si riduce a quella che entra nell'antenna attraverso la sezione AA'. Essa è data da

$$\frac{R_{in}|I|^2}{2} + j\frac{X_{in}|I|^2}{2}$$

Scrivendo il bilancio delle potenze attive e reattive per la regione *esterna* a S, e ricordando che il flusso del vettore di Poynting attraverso la sfera all'infinito non è altro che la potenza irraggiata dall'antenna, si ha:

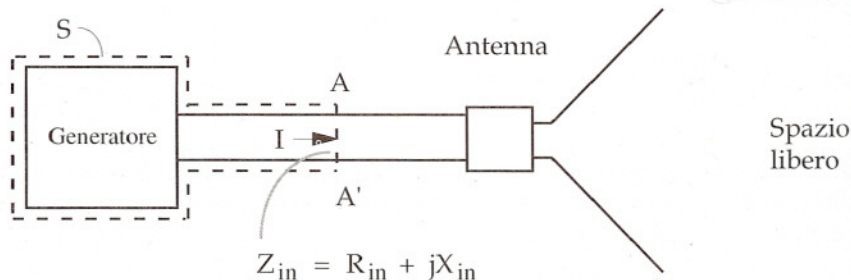



Figura 2.1

1 Spesso il guadagno viene espresso in decibel ($g_{db} = 10\log g$). In una direzione diversa da quella di massima radiazione risulta:

$g_{db}(\theta, \phi) = (g_x)_{db} - 10 \log(K_x/K(\theta, \phi))$

L'ultimo termine viene dedotto dal diagramma di radiazione, che spesso - specie nelle specifiche delle antenne direttive - è fornito in decibel.

$$w_{diss} - \frac{R_{in} |I|^2}{2} + P_{irr} = 0$$

$$2\omega (u_m - u_e) - \frac{X_{in} |I|^2}{2} = 0$$

In queste espressioni w_{diss} indica la potenza dissipata nella struttura dell'antenna; $u_m - u_e$ rappresenta lo scarto fra le energie magnetica ed elettrica medie accumulate nella regione esterna ad S. Ricavando R_{in} e X_{in} si ottiene:

$$R_{in} = \frac{2 w_{diss}}{|I|^2} + \frac{2P_{irr}}{|I|^2} \qquad X_{in} = \frac{4\omega (u_m - u_e)}{|I|^2}$$

Si osserva che la resistenza d'ingresso consiste di due contributi, uno collegato alle perdite l'altro alla radiazione; quest'ultimo contributo è dato da

$$R_r = \frac{2P_{irr}}{|I|^2} \tag{2.1}$$

e prende il nome di "resistenza di radiazione" dell'antenna. La resistenza di radiazione può effettivamente essere calcolata mediante la (2.1), perché P_{irr} dipende dal campo lontano, che spesso è noto in funzione di I.

Nella zona di radiazione le densità di energia elettrica e magnetica sono uguali. Si ha infatti:

$$\frac{\mu |\mathbf{H}|^2}{4} = \frac{\mu |\mathbf{E} / \eta|^2}{4} = \frac{\varepsilon |\mathbf{E}|^2}{4}$$

Pertanto la differenza $u_m - u_e$ dipende solo dal campo vicino che ha caratteristiche diverse nelle varie antenne. La reattanza d'ingresso è induttiva (capacitiva) se nel campo vicino - in particolare proprio nella regione occupata dall'antenna e nel tronco di linea d'ingresso che di essa fa parte - l'energia magnetica (elettrica) supera quella dell'altro tipo. Ad esempio, nel caso del dipolo hertziano, in cui l'andamento del campo vicino è simile a quello di un condensatore, la reattanza è capacitiva; analogamente, nel caso di un'antenna costituita da una o più spire di piccole dimensioni, la reattanza è induttiva. Se l'energia elettrica e magnetica si bilanciano la reattanza è nulla e l'antenna viene detta "risonante". Poiché l'andamento del campo dipende dalla frequenza la condizione di risonanza viene verificata solo a certe frequenze.

Il calcolo della reattanza richiederebbe l'esatta conoscenza del campo vicino, che raramente è noto. Per questa ragione l'importanza dell'espressione di X_{in} è prevalentemente concettuale.[1]

---

1 Si noti che, scegliendo opportunamente la posizione della sezione AA' sulla linea di alimentazione, l'impedenza d'ingresso può sempre essere resa reale. Inoltre, mediante un opportuno adattatore (da considerare come parte integrante dell'antenna) l'impedenza può essere sempre resa uguale all'impedenza caratteristica della linea di alimentazione.

Osservando che

$$w_{diss} + P_{irr} = P = P_{irr}/\xi$$

dall'espressione della resistenza d'ingresso si ottiene:

$$R_{in} = R_r/\xi$$

In molti casi la resistenza d'ingresso è circa uguale alla resistenza di radiazione, perché l'efficienza è pressoché unitaria.

8.3 Guadagno e resistenza di radiazione del dipolo hertziano

Nel capitolo precedente sono state trovate le espressioni dell'intensità di radiazione e della potenza irraggiata dal dipolo hertziano (Equazioni 6.6, 6.7). Sostituendo $\eta = 120\pi$ [Ω] nell'espressione della potenza e usando la (2.1) si ottiene

$$R_r = 80\,\pi^2\,(d/\lambda)^2 \qquad [\Omega] \tag{3.1}$$

dove d è la lunghezza del dipolo. Dall'espressione dell'intensità di radiazione e della potenza si ottiene:

$$D = 1.5 \qquad g_x = 1.5\,\xi \tag{3.2}$$

Il diagramma di radiazione (vedi Figura 6.2 del capitolo precedente) corrisponde alla funzione

$$K(\theta)/K_x = \sin^2\theta$$

La direttività del dipolo è molto bassa. Ciò dipende dal fatto che, escludendo le direzioni prossime all'asse, la radiazione è distribuita piuttosto uniformemente. Il vettore di polarizzazione coincide con $\mathbf{u}_\theta$, a parte un termine di fase dipendente dalla fase della corrente di alimentazione. Dunque la polarizzazione è lineare.

Poiché il rapporto d/λ è piccolo (minore di 1/10) la resistenza di radiazione è dell'ordine degli ohm o delle frazioni di ohm. Con valori così piccoli la potenza dissipata può non essere trascurabile rispetto a quella irraggiata. Dunque il dipolo hertziano è spesso un'antenna a bassa efficienza, specie quando d/λ è molto piccolo.

8.4 Antenna a spira

Le espressioni dell'intensità di radiazione e della potenza irraggiata da una spira circolare di raggio $a << \lambda$ sono state trovate nel capitolo precedente (Equazioni 7.4, 7.5). Da esse risulta:

$$R_r = 20\pi^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \qquad [\Omega]$$

$$D = 1.5 \qquad g_x = 1.5\,\xi$$

$$K(\theta)/K_x = \sin^2\theta$$

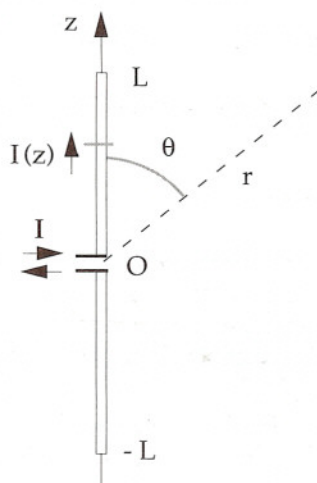
La direttività della spira e del dipolo hertziano sono identiche perché le due antenne hanno lo stesso diagramma di radiazione.

La resistenza di radiazione della spira è molto piccola, perché essa dipende dalla quarta potenza della lunghezza della spira rapportata alla lunghezza d'onda (ad esempio, se $2\pi a/\lambda = 1/5$, la resistenza di radiazione è di circa 0.3Ω). Pertanto l'antenna a spira ha bassa efficienza.

8.5 Dipoli di lunghezza paragonabile alla lunghezza d'onda

Queste antenne sono costituite da due bracci metallici allineati, alimentati al centro (Figura 5.1). La lunghezza L dei bracci è dell'ordine di λ mentre la dimensione trasversale è trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda. Per quest'ultima ragione, nel calcolo del campo lontano, è lecito considerare i bracci come conduttori filiformi, qualunque sia la loro reale struttura (tondini, tralicci, ecc.). Nella teoria elementare di seguito esposta, il campo lontano viene determinato assumendo che sia nota la funzione I(z) che rappresenta l'intensità della corrente sui bracci. Poiché il campo di radiazione è poco sensibile ai dettagli della sorgente, i risultati così ottenuti sono accettabili se l'ipotesi fatta sull'andamento di I(z) è ragionevole.

Figura 5.1

Per determinare l'andamento di I(z), Hallén[1] ha studiato in dettaglio la distribuzione della corrente in un modello di dipolo costituito da due cilindri conduttori infinitamente vicini (Figura 5.2*a*), eccitati da una sorgente agente nello spazio infinitesimo compreso fra i due cilindri. I risultati di

1 E. Hallén, *Theoretical Investigations into the Transmitting and Receiving Qualities of Antennae*, Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis, vol. 11, n. 4, 1938. Per una più facile consultazione vedi: R. E. Collin, F. J. Zucker, *Antenna Theory*, Cap. 8, McGraw-Hill Book Co. 1969.

questa analisi mostrano che l'andamento approssimativo della corrente è rappresentato dall'espressione

$$I(z) \approx I_0 \sin k(L - |z|) = I_0 \sin 2\pi \frac{L - |z|}{\lambda} \tag{5.1}$$

dove I_0 è una costante. Secondo questa espressione la corrente ha l'andamento di un'onda stazionaria con nodi alle estremità del dipolo e lunghezza d'onda λ (Figura 5.3). La (5.1) è tanto più accurata quanto più sottile è il dipolo. Gli errori maggiori si hanno in prossimità degli eventuali nodi intermedi dove, in realtà, la corrente è piccola ma non nulla. Il risultato di Hallén è confermato anche da altre analisi riguardanti strutture simili al dipolo, quali l'antenna biconica sottile indicata nella Figura 5.2*b* e l'antenna ellissoidale indicata nella Figura 5.2*c*.[1] Si noti che si può pensare di ottenere il dipolo divaricando la parte terminale di una linea bifilare a vuoto (Figura 5.3). È piuttosto stupefacente osservare che l'andamento della corrente nel dipolo coincide con quello della corrente nella parte terminale della linea, nonostante la divaricazione modifichi fortemente l'andamento del campo.

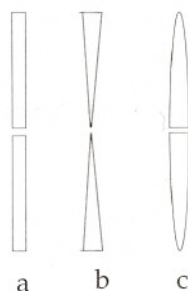



Figura 5.2

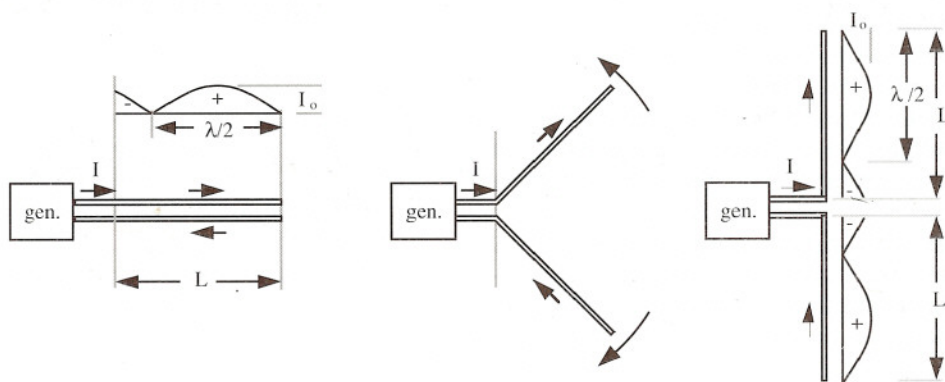



Figura 5.3

1 R. E. Collin, F.J. Zucker, *Antenna Theory*, part 1, Ch. 12, 13, McGraw-Hill Book Co. 1969.

Assumendo che la corrente abbia la forma (5.1) risulta:

$$\mathbf{N} = \mathbf{u}_z \int_{-L}^{L} I(z) e^{jkz\cos\theta} dz = \mathbf{u}_z I_0 \int_{-L}^{0} \sin k(L+z) e^{jkz\cos\theta} dz +$$

$$\mathbf{u}_z I_0 \int_{0}^{L} \sin k(L-z) e^{jkz\cos\theta} dz = \mathbf{u}_z \, 2 I_0 \frac{\cos(kL\cos\theta) - \cos kL}{k\sin^2\theta}$$

Poiché $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \cos\theta - \mathbf{u}_\theta \sin\theta$ si ottiene:

$$N_\theta = -2 I_0 \frac{\cos(kL\cos\theta) - \cos kL}{k\sin\theta} \qquad N_\phi = 0 \tag{5.2}$$

Assumendo che la fase di I_0 sia nulla, il vettore di polarizzazione è dato da

$$\mathbf{p} = \pm j \, \mathbf{u}_\theta \tag{5.3}$$

dove il segno dipende dalla direzione. Dunque il campo è polarizzato linearmente secondo $\mathbf{u}_\theta$. L'intensità di radiazione è:

$$K = \frac{\eta |N_\theta|^2}{8\lambda^2} = \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2} \left(\frac{\cos(kL\cos\theta) - \cos kL}{\sin\theta} \right)^2 \tag{5.4}$$

Il diagramma di radiazione è una figura di rivoluzione intorno all'asse z. Esso dipende dal valore di kL, ovvero - a parità di dipolo - dalla frequenza. La Figura 5.4 mostra la forma del

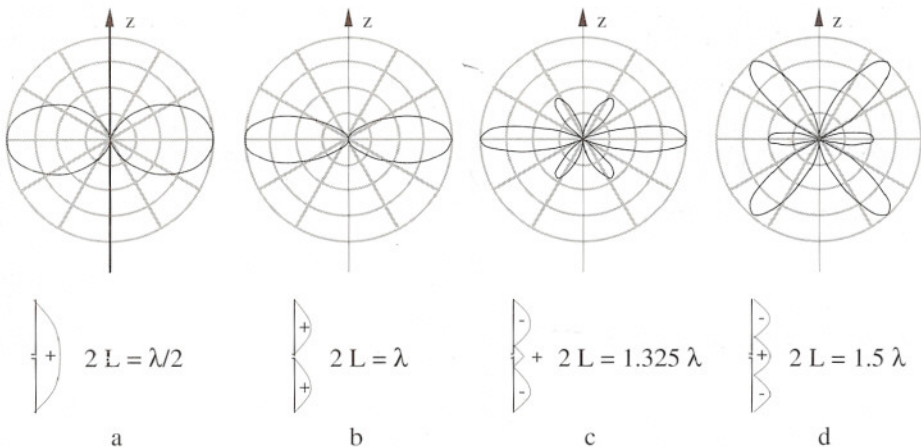



Figura 5.4

diagramma di radiazione in alcuni casi particolari. Nel caso $2L = \lambda/2$ (dipolo "in mezza onda", Figura 5.4*a*) il diagramma di radiazione è molto simile a quello del dipolo hertziano. Man mano che la frequenza cresce il diagramma prima si allunga (caso $2L = \lambda$, dipolo "in piena onda", Figura 5.4*b*) poi compaiono lobi secondari (Figura 5.4*c*) che successivamente divengono più intensi di quello perpendicolare al dipolo (Figura 5.4*d*).

La potenza irraggiata da un dipolo è data da:

$$P_{irr} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} K(\theta, \phi)\, \mathrm{sen}\theta\, d\theta = \frac{\eta |I_0|^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{[\cos(kL\cos\theta) - \cos kL]^2}{\sin\theta} d\theta$$

Calcolando l'integrale si trova:

$$P_{irr} = \frac{\eta |I_0|^2}{4\pi} \left\{ \gamma + \ln 2kL - Ci(2kL) + \frac{1}{2}(\sin 2kL)[Si(4kL) - 2Si(2kL)] + \frac{1}{2}(\cos 2kL)[\gamma + \ln(kL) + Ci(4kL) - 2Ci(2kL)] \right\} \tag{5.5}$$

dove $\gamma = 0.5772$ è la costante di Eulero e $Si(x)$, $Ci(x)$ sono il seno e coseno integrale:[1]

$$Si(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi \qquad Ci(x) \overset{\text{def}}{=} -\int_x^{\infty} \frac{\cos\xi}{\xi} d\xi$$

DIPOLO IN MEZZA ONDA In questo caso il massimo della corrente si ha al centro del dipolo (Figura 5.4*a*) e, quindi I_0 coincide con la corrente d'ingresso I. Poiché $2L = \lambda/2$ si ha $kL = \pi/2$; pertanto:

$$K = \frac{\eta |I|^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \tag{5.6}$$

L'intensità di radiazione è massima sul piano perpendicolare al dipolo. Si ha:

$$K_x = \frac{\eta |I|^2}{8\pi^2} \tag{5.7}$$

$$P_{irr} = \frac{\eta |I|^2}{8\pi} \{\gamma + \ln 2\pi - Ci(2\pi)\} = 2.44 \frac{\eta |I|^2}{8\pi} \tag{5.8}$$

---

1 Tabelle che riportano i valori delle funzioni Si(x) e Ci(x) sono reperibili in molti manuali, ad esempio: M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover publ., N.Y. 1968, p. 238.

Da queste espressioni si deduce:

$$R_r \approx 73.1\ \Omega \qquad D \approx 1.64$$

A parità di corrente, la potenza irraggiata dal dipolo in mezza onda è molto più elevata di quella irraggiata da un dipolo hertziano, mentre la potenza dissipata è dello stesso ordine di grandezza. Pertanto il dipolo in mezza onda ha un'efficienza molto più elevata ($\xi \approx 1$). Poiché la forma del diagramma di radiazione delle due antenne è pressoché identica, l'uso del dipolo in mezz'onda risulta conveniente solo per la maggiore efficienza. Il guadagno e la direttività sono circa uguali e si ha:

$$g_x \approx D = 1.64 \qquad g(\theta) \approx 1.64 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Il vettore di polarizzazione è $\mathbf{p} = -j\mathbf{u}_\theta$.

DIPOLO IN PIENA ONDA In questo caso (Figura 5.4*b*) si ha $2L = \lambda$. Risulta:

$$K = \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos(\pi\cos\theta)+1}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{\eta |I_0|^2}{2\pi^2}\frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

L'intensità di radiazione è massima sul piano perpendicolare al dipolo. Si ha:

$$K_x = \frac{\eta |I_0|^2}{2\pi^2}$$

La potenza irraggiata è:

$$P_{irr} = 3.32\frac{\eta |I_0|^2}{8\pi}$$

Anche in questo caso la potenza irraggiata è tipicamente molto più elevata di quella dissipata e quindi l'efficienza è pressoché unitaria. Dalle espressioni precedenti risulta:

$$g_x \approx D \approx 4.82 \qquad g(\theta) \approx 4.82 \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Secondo la (5.1) la corrente dovrebbe avere un nodo al centro del dipolo (vedi Figura 5.4*b*). Pertanto, in base a questa approssimazione, la corrente d'ingresso dovrebbe essere nulla, cosa che è in evidente contrasto con l'esistenza di una potenza irraggiata. In realtà la corrente d'ingresso è molto minore di I_0, ma non è nulla. Pertanto, pur essendo possibile affermare

che la resistenza d'ingresso è elevata, non è possibile calcolarne il valore se non si dispone di un'espressione della corrente più accurata della (5.1).

8.6 Semidipoli

I semidipoli sono costituiti da un solo braccio e da un piano metallico, come mostrato nella Figura 6.1*a*. Il piano viene assimilato ad un conduttore perfetto. Lo stesso tipo di modellizzazione viene usato per lo studio approssimato delle antenne a semidipolo che si ergono sul suolo (Figura 6.1*b*). Nonostante la conducibilità del suolo sia molto minore di quella di un conduttore metallico, i risultati che si ottengono assimilando la superficie terrestre ad un conduttore perfetto sono spesso accettabili.[1]

Applicando la regola delle immagini i semidipoli vengono trasformati in dipoli che irraggiano nello spazio libero (Figura 6.2*a*, *b*). Naturalmente il presupposto è che il piano sia tanto esteso da poter essere considerato indefinito. A parità di corrente d'ingresso, l'intensità di radiazione prodotta dal semidipolo è uguale a quella del dipolo intero nel semispazio esterno al conduttore, mentre è nulla nel semispazio che comprende il conduttore (Figura 6.2*c*). Pertanto l'intensità di radiazione massima è uguale nei due casi mentre la potenza irraggiata dal semidipolo è la metà di quella che verrebbe irraggiata dal dipolo intero. Ne consegue che il guadagno del semidipolo è il doppio di quello del corrispondente dipolo e che la sua resistenza di radiazione è la metà. Ad esempio, se il semidipolo è lungo un quarto d'onda, facendo riferimento ai risultati ottenuti per il dipolo in mezz'onda si ottiene:

$$D = 2 \times 1.64 = 3.28 \qquad R_r = 73.1/2 = 36.55\ \Omega$$

$$g(\theta) \approx 3.28 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \qquad (0 \le \theta \le \pi/2)$$

a b

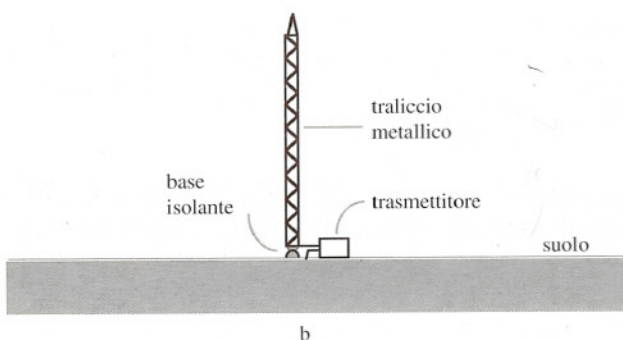
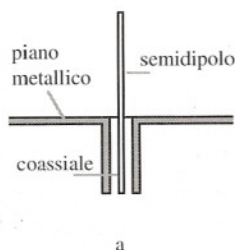



Figura 6.1

1 Nel Capitolo 9 si fa un breve cenno all'effetto della conducibilità finita del suolo.

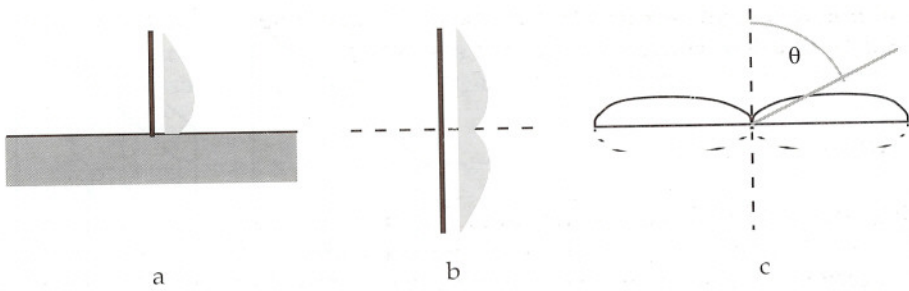
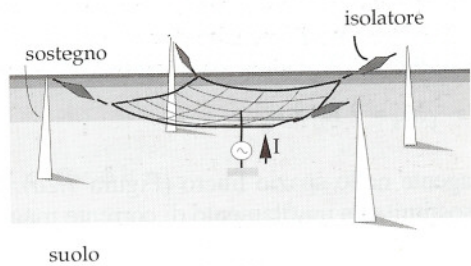



Figura 6.2

Un'antenna usata a bassa frequenza è quella indicata in Figura 6.3. Essa è costituita da una rete orizzontale di fili metallici che dista dal suolo molto meno di λ. La griglia è alimentata attraverso un filo percorso dalla corrente I. L'antenna somiglia ad un condensatore, le cui armature sono costituite dalla rete e dal suolo. La corrente I è praticamente costante lungo tutto il filo. È chiaro che, applicando la regola delle immagini, l'antenna si trasforma in un dipolo hertziano, caricato capacitivamente dalla griglia e dalla sua immagine.

Figura 6.3

La direttività è pari a $2 \times 1.5 = 3$ e quindi si ha:

$$g(\theta) = 3\,\xi\,\sin^2\theta \qquad (0 \le \theta \le \pi/2)$$

L'uso di antenne di questo tipo è limitato alle basse frequenze, quando i semidipoli, di lunghezza paragonabile a λ, avrebbero dimensioni eccessive.

8.7 Antenna a fessura risonante ("slot antenna")

Le antenne di questo tipo, spesso utilizzate nella banda delle microonde, consistono in una stretta fessura ricavata su di un piano metallico (Figura 7.1*a*), solitamente alimentata mediante una guida d'onda (Figura 7.1*b*, *c*). La posizione della fessura è tale da intercettare le linee di forza della corrente che si avrebbe nella parete della guida, in assenza della fessura stessa. Quando la frequenza è prossima al valore per cui la lunghezza d è circa mezza lunghezza d'onda, il campo sulla fessura diviene molto intenso (risonanza) e si ha un irraggiamento sensibile.

Detto $\mathbf{E}_0$ il campo elettrico sulla fessura e applicando l'equivalenza illustrata nella Figura 12.2 del capitolo precedente, si vede che il campo irraggiato dalla fessura può essere considerato come l'effetto di una lamina magnetica di densità

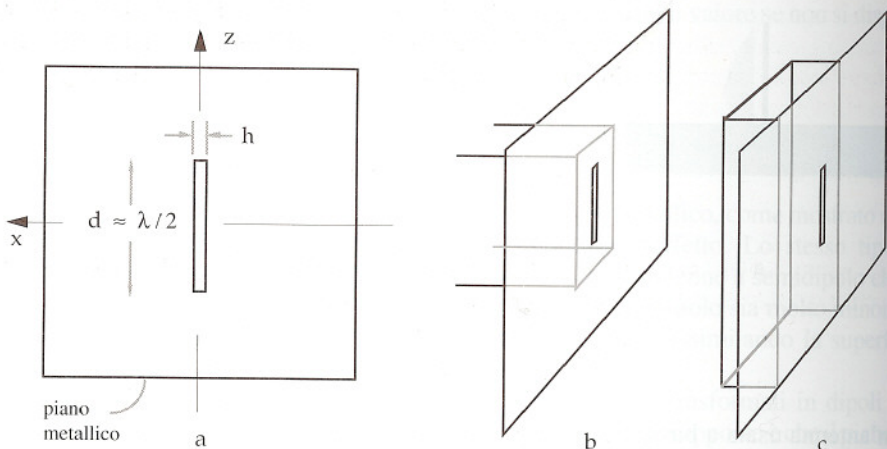



Figura 7.1

[A/m] $\mathbf{M}_s = 2\,\mathbf{E}_0 \times \mathbf{u}_y$

agente nello spazio libero (Figura 7.2*a*). Poiché h è molto piccolo la lamina può essere sostituita da un filamento di corrente magnetica (Figura 7.2*b*) di intensità

$$I_m(z) = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{u}_z \, dx = 2 \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z \, dx =$$

$$2 \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z \, dx = 2 \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u}_x \, dx = 2\,v(z)$$

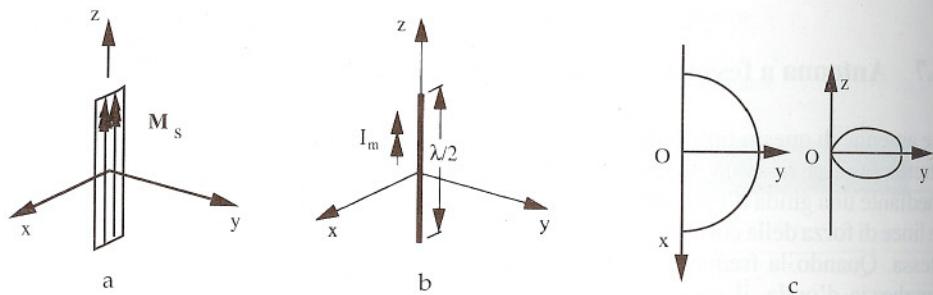



Figura 7.2

dove v(z) rappresenta la tensione esistente fra gli spigoli metallici in corrispondenza dell'ascissa z. Le considerazioni riportate alla fine del paragrafo mostrano che, quando la lunghezza della fessura è prossima a λ/2, è ragionevole assumere che la tensione abbia un andamento del tipo

$$v(z) = V\cos\frac{\pi z}{d} \tag{7.1}$$

dove V è la tensione al centro della fessura. Tale andamento è quello di un'onda stazionaria di tensione con due nodi posti sulle estremità della fessura.
Si ha:

$$I_m(z) = 2V\cos\frac{\pi z}{d}$$

L'andamento della corrente magnetica è analogo a quello della corrente elettrica in un dipolo in mezza onda. Pertanto, nel semispazio di interesse (y > 0), il campo prodotto dalla fessura può essere dedotto per dualità dal campo prodotto dal dipolo. Poiché la corrente magnetica al centro del filamento è pari a 2V, considerando l'espressione duale della (5.6) si ottiene:

$$K(\theta) = \frac{|V|^2}{2\pi^2\eta}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \qquad (0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < \pi)$$

Il diagramma di radiazione nei piani xy e zy è rappresentato nella Figura 7.2*c*. Il campo elettrico irraggiato dalla fessura è polarizzato come il campo magnetico irraggiato dal dipolo; pertanto il vettore di polarizzazione coincide con $\mathbf{u}_\phi$, a parte il solito termine di fase dipendente dalla fase di V. L'intensità di radiazione massima si ha sul piano xy e vale:

$$K_x = \frac{|V|^2}{2\pi^2\eta}$$

L'espressione della potenza irraggiata dalla fessura si ottiene per dualità dalla (5.8) (la potenza così ottenuta deve essere dimezzata perché la fessura irraggia nel solo semispazio y > 0). Si ottiene:

$$P_{irr} = \frac{1}{2}2.44\frac{|V|^2}{2\pi\eta}$$

Dalle precedenti espressioni si deduce:

$$g_x \approx D = 3.28 \qquad g(\theta) = 3.28\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

■ GIUSTIFICAZIONE DELLA (7.1) Sia $\mathbf{J}_s$ la corrente che si avrebbe nella guida di alimentazione, in corrispondenza della fenditura, qualora questa fosse assente. Per il criterio di equivalenza illustrato nella Figura 3.3 del Capitolo 4, il campo nel semispazio $y > 0$ può essere determinato considerando, in luogo delle effettive sorgenti, la densità di corrente equivalente $\mathbf{J}_s$ impressa sulla superficie della fenditura (Figura7.3*a*).

La fenditura può essere vista come una linea avente la sezione trasversale indicata nella Figura 7.3*b*, cortocircuitata alle due estremità ($z = \pm d/2$) e alimentata dalla corrente $\mathbf{J}_s$. Poiché, per ipotesi, la fessura intercetta le linee di flusso di $\mathbf{J}_s$, esiste una corrente di densità $i(z) = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{u}_x$ distribuita su tutta la lunghezza della linea e impressa trasversalmente fra i due conduttori (Figura 7.3*c*). Si trova abbastanza facilmente che la tensione dv generata lungo tutta la linea da un elemento di corrente $i(z')\,dz'$, localizzato fra z' e $z' + dz'$ (Figura 7.3*d*), ha la seguente espressione:

$$dv = \frac{jZ^0\, i(z')\, dz'}{\sin kd} \sin k(d/2 - z') \sin k(d/2 + z) \qquad (-d/2 < z < z')$$

$$dv = \frac{jZ^0\, i(z')\, dz'}{\sin kd} \sin k(d/2 + z') \sin k(d/2 - z) \qquad (z' < z < d/2)$$

dove Z^0 è l'impedenza caratteristica della linea. Se d è prossimo a $\lambda/2$ si ha:

$$kd \approx \pi \qquad \sin kd \approx \pi - kd$$

$$\sin k(d/2 - z') \sin k(d/2 + z) \approx -\cos\frac{\pi z'}{d} \cos\frac{\pi z}{d}$$

$$\sin k(d/2 + z') \sin k(d/2 - z) \approx -\cos\frac{\pi z'}{d} \cos\frac{\pi z}{d}$$

Pertanto:

$$dv \approx \frac{-jZ^0\, i(z')\, dz'}{\pi - kd} \cos\frac{\pi z'}{d} \cos\frac{\pi z}{d} \qquad (-d/2 < z < d/2)$$

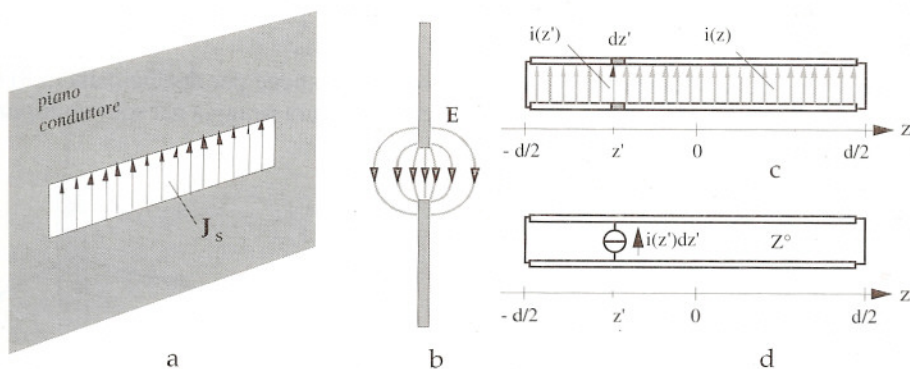



Figura 7.3

La tensione v(z), dovuta all'azione di tutti gli elementi di corrente, viene ottenuta integrando la precedente espressione rispetto a z', fra –d/2 e d/2. Così si ottiene la (7.1), dopo aver posto:

$$V = \frac{jZ^0}{kd - \pi} \int_{-d/2}^{d/2} i(z') \cos\frac{\pi z'}{d} dz'$$

V tende all'infinito quando kd tende a π, cosa che avviene quando la frequenza si avvicina a quella per cui λ/2 tende alla lunghezza della fenditura. Si ha quindi una situazione di risonanza simile a quella che si verifica in una cavità ideale (Paragrafo 5, Capitolo 6). In realtà, come in una cavità reale, il campo non diverge a causa delle perdite di energia. Nel caso della fenditura l'energia perduta non è solo quella dissipata, ma anche - e soprattutto - quella irraggiata nel semispazio y > 0. ■

8.8 Cenni sulle guide troncate e sulle antenne a tromba

Una guida d'onda troncata irradia attraverso l'estremità aperta. Il campo di radiazione potrebbe essere calcolato con i metodi visti nel capitolo precedente se si conoscesse, almeno approssimativamente, l'illuminazione sul piano dell'apertura. Purtroppo, anche se nella guida si propaga il solo modo dominante, prevedere quale sia l'illuminazione non è facile. Infatti il campo sull'apertura non coincide con quello del modo dominante, perché la discontinuità guida/spazio eccita sensibilmente i modi superiori della guida; inoltre, sulla rimanente parte del piano dell'apertura, non è lecito considerare nullo il campo tangenziale in prossimità dell'apertura. Dunque il calcolo del campo di radiazione non è così semplice come potrebbe sembrare a prima vista. Pertanto, ci si limita ad un breve cenno sulle proprietà della guida circolare troncata, rinviando ai testi di antenne per una discussione più approfondita.[1]

La Figura 8.1 mostra l'andamento tipico del diagramma di radiazione di una guida

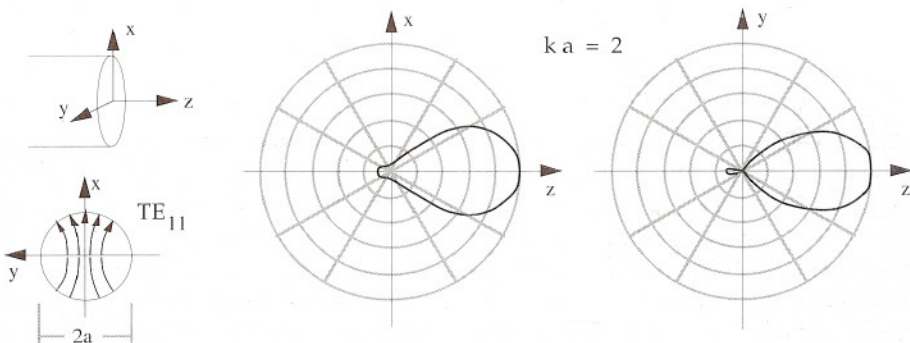



Figura 8.1

1 R.E. Collin, F.J.Zucker, *Antenna Theory*, part 1, Ch. 15, McGraw-Hill, Book Co., 1969.

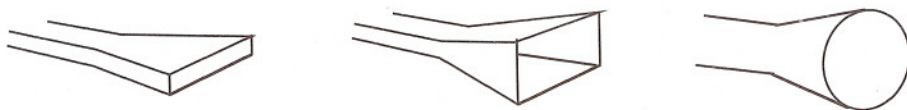



Figura 8.2

circolare troncata, in cui si propaga il solo modo TE_{11}. Si nota che la radiazione è piuttosto concentrata intorno all'asse della guida e che si ha irraggiamento apprezzabile anche all'indietro, nella regione $z < 0$.

Il guadagno di una guida circolare troncata in cui si propaga il modo TE_{11} è approssimativamente:

$$g_x = 10.5 \frac{\pi a^2}{\lambda^2} \tag{8.1}$$

Poiché la propagazione in guida è unimodale, il raggio non può essere arbitrario. Per questa ragione il guadagno è tipicamente compreso fra 6.5 e 9.5.

Il modo TE_{11} è degenere. Se viene eccitato solo il modo polarizzato nella direzione x (Figura 8.1) è evidente, per ragioni di simmetria, che su tutto l'asse z si ha polarizzazione lineare nella stessa direzione. Analogamente, se viene eccitato anche il modo polarizzato nella direzione di y, con ampiezza uguale e in quadratura, il campo è polarizzato circolarmente sia al centro della guida che su tutto l'asse z.

Le considerazioni del capitolo precedente, riguardo all'influenza delle dimensioni dell'apertura sulla concentrazione della radiazione, permettono di intuire che l'antenna diviene più direttiva se la parte terminale della guida viene gradualmente allargata. Le antenne di questo tipo prendono il nome di "trombe" (Figura 8.2). Esse hanno una direttività maggiore della semplice guida troncata e danno luogo ad una minore riflessione nella guida.

8.9 Antenne a schiera

I radiatori considerati finora sono poco direttivi (dipoli, fenditure, guide troncate) o moderatamente direttivi (trombe). Per questa ragione essi non sono adatti ad impieghi in cui è necessario concentrare la radiazione in angoli stretti (radar, antenne per ponti radio, antenne per diffusione televisiva, ecc.). Uno dei modi per ottenere elevate direttività è quello di realizzare antenne costituite da schiere di radiatori identici ed ugualmente orientati. Alimentando con ampiezza e fase opportune i singoli radiatori e scegliendo opportunamente la loro posizione, è possibile fare in modo che le onde da essi emesse interferiscano costruttivamente solo nell'intorno di certe direzioni, così da formare una fascio concentrato intorno ad esse.

La Figura 9.1 mostra esempi di schiere costituite da dipoli, fenditure, guide troncate. Nell'antenna di Figura 9.1*b* le fenditure sono alimentate direttamente attraverso una guida d'onda; negli altri due esempi l'alimentazione avviene attraverso una rete di linee o guide (non mostrata in figura) che fanno capo ad una sola porta (ingresso della schiera). In ogni caso

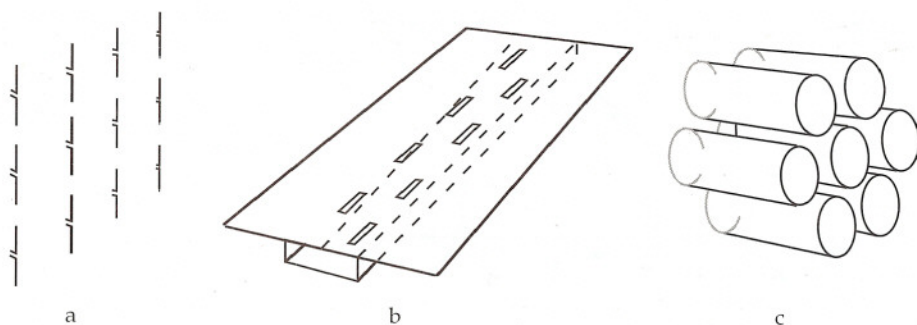



Figura 9.1

il sistema di alimentazione è progettato in modo tale da ottenere le volute relazioni di ampiezza e fase fra le "eccitazioni" dei singoli elementi (correnti d'ingresso nei dipoli, tensioni al centro delle fenditure, ecc.).[1]

Rispetto ad altri tipi di antenne ad elevata direttività (esempio antenne paraboliche, vedi Paragrafo 12) le schiere presentano i seguenti vantaggi: a) migliore possibilità di sagomare il diagramma di radiazione secondo le esigenze che si presentano in certe applicazioni; b) possibilità di modificare in maniera estremamente rapida la direzione del fascio, mediante il controllo elettronico della fase o della frequenza con cui vengono alimentati i singoli elementi (*phased arrays*); c) possibilità di irraggiare potenze molto elevate, inserendo opportuni amplificatori nella rete di alimentazione (uno per radiatore o gruppo di radiatori). A fronte di questi vantaggi si hanno notevoli complicazioni realizzative, specie nel caso delle grandi schiere, costituite da centinaia o migliaia di elementi.

Concettualmente una schiera di N radiatori è ottenuta traslando un "radiatore di riferimento" (Figura 9.2) secondo certi vettori $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$. Il radiatore di riferimento può essere ideale o può coincidere con uno degli elementi della schiera. Gli estremi O_1, O_2, ..., O_N dei vettori di traslazione occupano, nei vari radiatori, la stessa posizione che l'origine O occupa nel radiatore di riferimento. Essi rappresentano le "posizioni" dei vari radiatori.

Nella teoria elementare delle schiere si fa l'ipotesi che l'andamento delle correnti nei

1 Nel progetto dell'alimentazione la schiera deve essere considerata come un circuito a N-porte, caratterizzata da una opportuna matrice (es. matrice d'impedenza). Infatti, a causa dell'accoppiamento fra i radiatori (che può essere rilevante fra elementi vicini), le impedenze mutue non sono trascurabili. Ne consegue che l'impedenze vista all'ingresso di un radiatore differisce da quella di un identico radiatore isolato nello spazio libero e dipende dalla posizione occupata nella schiera. Nel caso delle schiere di radiatori da eccitare in fase mediante correnti di ampiezza comunque fissata, il progetto della rete di alimentazione può essere basato sull'uso di linee $\lambda/4$ in parallelo (Figura 3.7 del Capitolo 5), che garantiscono la corretta alimentazione, indipendentemente dai valori assunti dalle impedenze.

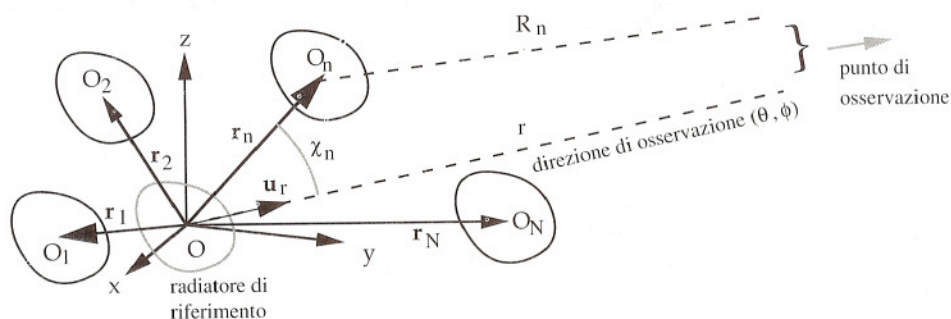



Figura 9.2

radiatori sia lo stesso di quello che si avrebbe nel radiatore di riferimento, isolato nello spazio libero.[1] Pertanto, pensando a correnti elettriche e indicando con $\mathbf{J}_0(\mathbf{r})$ la densità di corrente nel radiatore di riferimento, la densità di corrente nel radiatore n-esimo è:

$$\mathbf{J}_n = C_n\, \mathbf{J}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

dove C_n è una costante complessa. In altri termini, il campo di corrente nel radiatore n-esimo è ottenuto traslando quello del radiatore di riferimento, moltiplicandone l'ampiezza per $|C_n|$ e introducendo una variazione di fase pari alla fase di C_n.

I coefficienti $C_1, C_2, ..., C_N$ sono detti "coefficienti di eccitazione". C_n è uguale al rapporto (complesso) esistente fra l'eccitazione dello n-esimo elemento e l'eccitazione del radiatore di riferimento.

Il radiatore di riferimento, isolato nello spazio libero, produrrebbe nella zona di radiazione il campo:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{p}_0(\theta, \phi)\sqrt{2\eta K_0(\theta, \phi)}\,\frac{e^{-jkr}}{r}$$

($\mathbf{p}_0$ e K_0 sono il vettore di polarizzazione e l'intensità di radiazione). Poiché i radiatori che compongono la schiera differiscono da quello di riferimento solo per la posizione e per una diversa eccitazione, il campo generato dallo n-esimo radiatore è

$$\mathbf{E}_n = C_n\, \mathbf{p}_0(\theta, \phi)\sqrt{2\eta K_0(\theta, \phi)}\,\frac{e^{-jkR_n}}{R_n}$$

dove R_n è la distanza del punto di osservazione, presa a partire da O_n. Nella zona di radiazione

1 In realtà, la presenza dei radiatori vicini perturba più o meno fortemente la distribuzione delle correnti.

(che inizia ad una distanza dipendente dalle dimensioni dell'intera schiera) si possono fare le solite approssimazioni (vedi Figura 9.2):

$$1/R_n \approx 1/r \qquad kR_n \approx k(r - r_n \cos\chi_n) = kr - k\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{u}_r$$

Pertanto si ha:

$$\mathbf{E}_n = C_n e^{jk\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{u}_r} \mathbf{p}_0(\theta, \phi) \sqrt{2\eta K_0(\theta, \phi)} \frac{e^{-jkr}}{r} = C_n e^{jk\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{u}_r} \mathbf{E}_0$$

$\mathbf{E}_n$ ha la stessa polarizzazione di $\mathbf{E}_0$ e lo stesso tipo di dipendenza da θ e ϕ. La sua ampiezza è proporzionale all'ampiezza dell'eccitazione e la sua fase dipende, oltre che dalla fase dell'eccitazione, anche dalla posizione di O_n e dalla direzione di osservazione. Il campo generato dalla schiera è dato da:

$$\mathbf{E} = \sum_{1}^{N} {}_n \mathbf{E}_n = F \mathbf{E}_0 \tag{9.1}$$

dove:

$$F = F(\theta, \phi) = \sum_{1}^{N} {}_n C_n e^{jk\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{u}_r} \qquad \text{(fattore di schiera)} \tag{9.2}$$

Il fattore di schiera tiene conto dal fenomeno dell'interferenza fra i campi generati dai singoli elementi.

Sostituendo l'espressione di $\mathbf{E}_0$ nella (9.1) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}_0(\theta, \phi) e^{j\mathrm{Arg}[F]} \sqrt{2\eta |F|^2 K_0(\theta, \phi)} \frac{e^{-jkr}}{r} = \mathbf{p}(\theta, \phi) \sqrt{2\eta K(\theta, \phi)} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

dove

$$\mathbf{p}(\theta, \phi) = \mathbf{p}_0(\theta, \phi) e^{j\mathrm{Arg}[F(\theta, \phi)]} \tag{9.3a}$$

$$K(\theta, \phi) = K_0(\theta, \phi) |F(\theta, \phi)|^2 \tag{9.3b}$$

K e **p** sono l'intensità di radiazione e il vettore di polarizzazione della schiera. La polarizzazione è identica a quella del radiatore di riferimento, perché **p** e $\mathbf{p}_0$ differiscono solo per la fase. Invece il diagramma di radiazione della schiera è molto diverso da quello del singolo radiatore, perché la moltiplicazione per $|F|^2$ modifica profondamente l'andamento dell'intensità di radiazione.

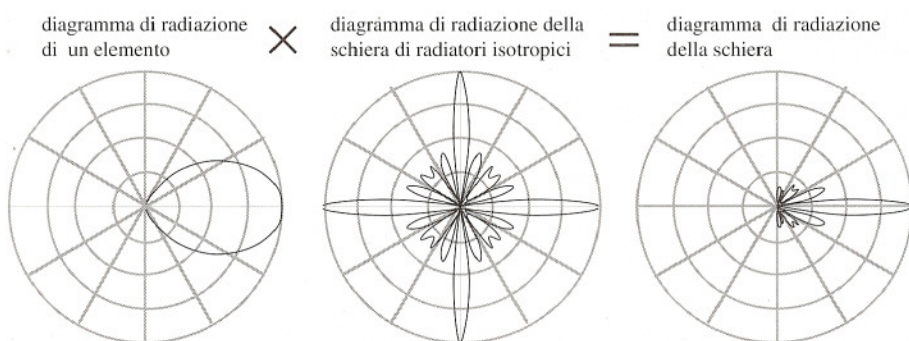



Figura 9.3

Se la schiera fosse costituita da radiatori isotropici (K_0 costante), il diagramma di radiazione sarebbe determinato solo da $|F|^2$. In una schiera reale, invece, il diagramma di radiazione dipende anche da quello del singolo radiatore. Infatti dalla (9.3*b*) si deduce la seguente

REGOLA DI KRAUSS: *Il diagramma di radiazione di una schiera può essere determinato riportando, direzione per direzione, i prodotti dei valori letti nel diagramma di radiazione del singolo elemento e nel diagramma di radiazione di una schiera di radiatori isotropici, posizionati ed eccitati come gli elementi della schiera reale. Il diagramma così ottenuto viene poi normalizzato rispetto al valore massimo.*

La Figura 9.3 serve ad illustrare la regola di Krauss. In questo esempio il diagramma dei radiatori isotropici presenta quattro lobi intensi, tre dei quali sono localizzati in direzioni in cui il singolo radiatore non irraggia, o irraggia molto debolmente. Applicando la regola di Krauss, si ottiene per la schiera un diagramma di radiazione che presenta un lobo principale piuttosto stretto e altri lobi di minore intensità (lobi secondari).

È opportuno sottolineare che i precedenti risultati non si applicano a sistemi costituiti da radiatori di tipo differente o diversamente orientati. Tali sistemi non sono classificabili come schiere e il campo deve essere calcolato caso per caso, sovrapponendo i contributi dei singoli radiatori.

8.10 Schiera lineare uniforme

Una schiera lineare uniforme è costituita da N radiatori allineati ed equispaziati (Figura 10.1). Lo studio della schiera è più semplice se si suppone che fra un radiatore e il successivo l'eccitazione subisca uno sfasamento costante. In questo caso, prendendo come radiatore di riferimento quello posto in O_1, si ha

$$C_1 = a_1 = 1, \qquad C_2 = a_2\, e^{-j\delta}, \dots, \qquad C_N = a_N\, e^{-j(N-1)\delta} \qquad (-\pi < \delta \le \pi)$$

I coefficienti a_n (reali positivi) determinano la distribuzione delle ampiezze delle eccitazioni e δ indica lo sfasamento fra elementi adiacenti. Posto l'asse z lungo la schiera si ha inoltre:

$$\mathbf{r}_1 = 0,\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{u}_z d,\ \dots,\ \mathbf{r}_N = \mathbf{u}_z(N-1)d$$

dove d è la spaziatura fra i radiatori.
Poiché $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = \cos\theta$, il fattore di schiera è dato da:

$$F = a_1 + a_2\, e^{j(kd\cos\theta - \delta)} + \dots + a_N\, e^{j(N-1)(kd\cos\theta - \delta)} \tag{10.1}$$

Esso è ovviamente simmetrico intorno all'asse della schiera. Se in una certa direzione si ha

$$kd\cos\theta - \delta = m2\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

il fattore di schiera assume la massima intensità possibile:

$$F_x = \sum_{1}^{N}{}_n\, a_n$$

In tale direzione i campi generati dai vari elementi si sommano in fase (interferenza costruttiva) e si ha un'elevata intensità di radiazione. A causa della simmetria di rivoluzione del fattore di schiera, le direzioni di interferenza costruttiva - se esistono - formano una o più superfici coniche, corrispondenti ai valori θ_m che soddisfano l'equazione

$$\cos\theta_m = \left(\frac{\delta}{2\pi} + m\right)\frac{\lambda}{d} \tag{10.2}$$

La radiazione della schiera risulta concentrata nelle direzioni prossime a tali superfici, intorno alle quali si formano lobi intensi del diagramma di radiazione.[1]

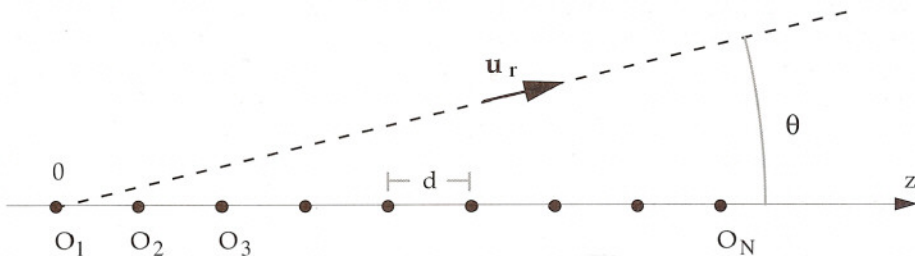



Figura 10.1

1 Naturalmente ciò richiede che l'intensità di radiazione del singolo elemento non sia trascurabile in queste direzioni.

La (10.2) non ammette soluzione se il valore assoluto del secondo membro supera 1. Poiché δ è compreso fra $-\pi$ e π, non esiste alcuna soluzione se non esiste quella per $m = 0$; pertanto è essenziale che lo sfasamento e la spaziatura vengano scelti in modo che la soluzione θ_0 esista. Intorno a θ_0 il diagramma di radiazione presenta il cosiddetto "lobo principale". Altri lobi di uguale intensità, intorno ad ulteriori direzioni di interferenza costruttiva, vengono detti "*grating lobes*".[1] La loro presenza è normalmente indesiderata.

Se la direzione del lobo principale è assegnata, il corretto puntamento viene ottenuto sfasando i radiatori di

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta_0 \tag{10.3}$$

Per escludere la presenza dei grating lobes basta che la (10.2) non ammetta soluzioni per $m = \pm 1$. Pertanto deve aversi:

$$\left|\frac{\delta}{2\pi} \pm 1\right|\frac{\lambda}{d} > 1$$

ovvero

$$\left(1 - \left|\frac{\delta}{2\pi}\right|\right)\frac{\lambda}{d} > 1$$

o ancora, eliminando δ mediante la (10.3):

$$d < \frac{\lambda}{1 + |\cos\theta_0|} \tag{10.4}$$

Fissata la direzione del lobo principale, il valore di d viene fissato in accordo alla (10.4) e quello dello sfasamento viene determinato mediante la (10.3). Si osserva che, per evitare la presenza dei grating lobes la spaziatura deve essere tanto minore quanto più la direzione del lobo principale è prossima all'asse della schiera.

Un caso particolare è quello delle cosiddette schiere *broadside*, che danno luogo all'interferenza costruttiva in direzioni perpendicolari all'asse ($\theta_0 = \pi/2$). Nelle schiere broadside i radiatori sono alimentati in fase ($\delta = 0$) e, per evitare i grating lobes, la loro spaziatura è minore di λ (tipicamente $d = 0.75\lambda$). La forma del diagramma di radiazione non può essere ulteriormente precisata, fino a quando non è fissato il numero degli elementi, il valore delle ampiezze delle eccitazioni e, naturalmente, il tipo di radiatore. La ragione fisica dell'interferenza costruttiva nelle direzioni perpendicolari all'asse è evidente: le distanze che separano i radiatori da un punto di osservazione posto a grande distanza sul piano

1 Sull'esistenza di molteplici direzioni d'interferenza è basato il funzionamento dei cosiddetti "reticoli di diffrazione" (*gratings*) usati in Ottica.

perpendicolare all'asse sono pressoché uguali, così che i fronti d'onda emessi dai vari radiatori impiegano lo stesso tempo a percorrerle; poiché le creste delle onde vengono emesse simultaneamente (a causa dell'alimentazione in fase), esse raggiungono simultaneamente il punto di osservazione, dando luogo all'interferenza costruttiva.[1]

Un altro caso particolare è quello delle cosiddette schiere *end-fire*. In queste schiere l'interferenza costruttiva ha luogo nella direzione dell'asse ($\theta_0 = 0$, ovvero $\theta_0 = \pi$). A questo scopo lo sfasamento fra i radiatori deve essere

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\pi d}{\lambda} & (\theta_0 = 0) \\ -\dfrac{2\pi d}{\lambda} & (\theta_0 = \pi) \end{cases} \tag{10.5}$$

Per evitare i grating lobes, la spaziatura fra i radiatori deve essere minore di $\lambda/2$. Il diagramma di radiazione di una schiera end-fire presenta un massimo, più o meno pronunciato, nella direzione dell'asse e nel verso delle fasi decrescenti. Le distanze che separano due elementi successivi da un punto di osservazione posto a grande distanza sul semiasse $z > 0$ differiscono di d; pertanto, se i radiatori fossero alimentati in fase, le creste delle onde arriverebbero nel punto di osservazione in tempi diversi - distanti d/c - e non si avrebbe l'interferenza desiderata. I ritardi vengono annullati facendo in modo che ogni radiatore oscilli in anticipo di d/c rispetto al radiatore successivo. Questo richiede che le alimentazioni siano sfasate proprio di $\delta = \omega(d/c) = 2\pi d/\lambda$.[2]

In tutti i casi la forma del diagramma di radiazione dipende dalle ampiezze dei coefficienti di eccitazione. Un caso semplice da studiare è quello in cui l'ampiezza è uguale per tutti gli elementi:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$$

Utilizzando la (10.3) è possibile riscrivere la (10.1) come segue:

$$F = 1 + e^{jkd(\cos\theta - \cos\theta_0)} + e^{2jkd(\cos\theta - \cos\theta_0)} + \ldots + e^{(N-1)jkd(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Usando l'identità

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{N-1} = \frac{a^N - 1}{a - 1} \qquad (\text{con } a = e^{jkd(\cos\theta - \cos\theta_0)})$$

---

1 La simultaneità dell'emissione e l'elevato irraggiamento in direzione laterale richiamano l'immagine di una bordata d'artiglieria navale (*broadside*).

2 Il progressivo ritardo nell'emissione e l'elevato irraggiamento nella direzione dell'allineamento evocano l'immagine del cosiddetto "fuoco di fila" (*end-fire*).

si ottiene:

$$F = \frac{e^{jNkd(\cos\theta - \cos\theta_0)} - 1}{e^{jkd(\cos\theta - \cos\theta_0)} - 1}$$

da cui:

$$F = \frac{\sin[N(kd/2)(\cos\theta - \cos\theta_0)]}{\sin[(kd/2)(\cos\theta - \cos\theta_0)]} e^{j(N-1)(kd/2)(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

In base alla (9.3*b*) l'intensità di radiazione della schiera è

$$K(\theta, \phi) = N^2 K_0(\theta, \phi) f(u - u_0) \tag{10.6}$$

dove

$$f(X) = \left(\frac{1}{N}\frac{\sin NX}{\sin X}\right)^2 \qquad u = \frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta \qquad u_0 = \frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta_0 \tag{10.7}$$

La funzione f(X) è periodica con periodo π, ed è caratterizzata dalla presenza di picchi di ampiezza unitaria posti intorno alle ascisse 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... (Figura10.2). In un periodo essa si annulla N−1 volte. I picchi sono tanto più stretti quanto maggiore è il numero degli elementi. Il diagramma polare che fornisce $f(u - u_0)$ in funzione di θ, rappresenta evidentemente il diagramma di radiazione nel caso di radiatori isotropici. Esso può essere ottenuto con la costruzione indicata nella Figura 10.3. Descritta una circonferenza di raggio $\pi d/\lambda$ con centro nell'origine dell'asse z, si disegna il diagramma di f(X) con l'asse delle ascisse parallelo a z e l'origine in corrispondenza della proiezione del punto P_0, preso sulla circonferenza nella direzione θ_0. Cosi facendo la proiezione del punto P, preso nella direzione θ, cade sull'ascissa $X = u - u_0$, cui corrisponde il valore di f nella stessa direzione.

La costruzione permette di comprendere che, per data spaziatura dei radiatori, il lobo

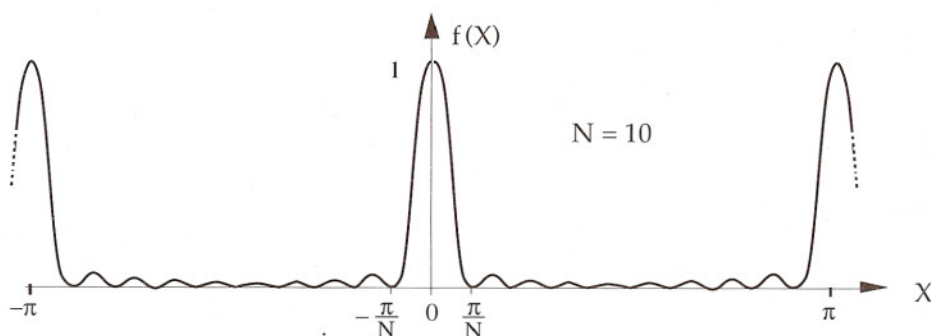



Figura 10.2

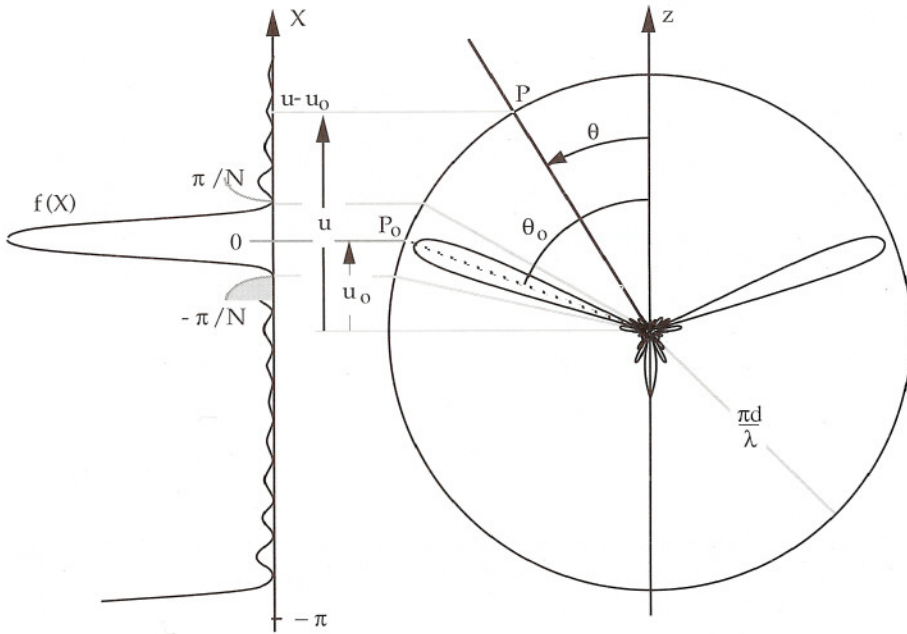



Figura 10.3

principale è tanto più stretto quanto maggiore è il numero degli elementi, quindi, quanto maggiore è l'estensione della schiera. Dunque, anche nel caso della schiera, vale il risultato generale visto nel capitolo precedente a proposito delle aperture: per concentrare la radiazione in un angolo ristretto è necessario usare sistemi radianti di grandi dimensioni.

Nel caso *broadside* (Figura 10.4*a*) il diagramma di radiazione di una schiera di radiatori isotropici costituita da un gran numero di elementi tende ad assumere la forma di un disco, intorno al piano normale alla schiera. L'angolo Δ fra le direzioni di zero che lo delimitano (vedi figura) viene ottenuto dalla relazione

$$\frac{\pi}{N} = \frac{\pi d}{\lambda}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2}\right) = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\frac{\Delta}{2}$$

Si ha:

$$\Delta = 2 \arcsin\frac{\lambda}{Nd} \tag{10.8}$$

Se il numero dei radiatori è molto grande, risulta $\lambda/Nd \ll 1$ e quindi:

$$\Delta \approx \frac{2\lambda}{Nd} \qquad [\mathrm{rad}] \tag{10.9}$$

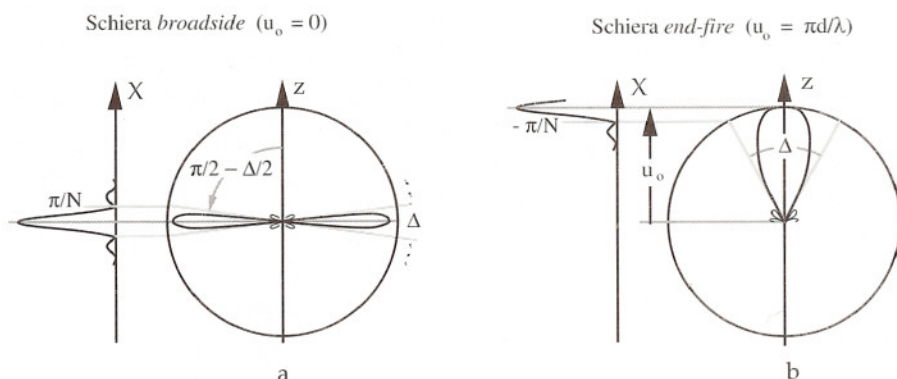



Figura 10.4

Poiché Nd è circa uguale alla lunghezza della schiera, il lobo principale è tanto più stretto quanto maggiore è il rapporto fra la lunghezza della schiera e la lunghezza d'onda. Ad esempio, nel caso di una schiera di 50 radiatori distanti $3\lambda/4$ il lobo principale è compreso in un angolo di circa 3°.

Nel caso *end-fire* il diagramma di radiazione della schiera di radiatori isotropici assume la forma "a sigaro" indicata nella Figura 10.4*b*. In questo caso l'apertura del lobo principale è determinata dall'equazione:

$$-\frac{\pi}{N} = \frac{\pi d}{\lambda}\cos\frac{\Delta}{2} - \frac{\pi d}{\lambda} = -\frac{\pi d}{\lambda} 2\sin^2\frac{\Delta}{4}$$

Si ottiene:

$$\Delta = 4\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{2Nd}} \tag{10.10}$$

Anche in questo caso l'apertura del lobo principale diminuisce al crescere della lunghezza della schiera.

Il diagramma di radiazione di una schiera reale dipende dalla forma del diagramma di radiazione degli elementi. Ad esempio, nel caso di una schiera broadside costituita da dipoli paralleli (Figura 10.5), il diagramma di radiazione presenta due lobi contrapposti, sia sul piano zy che sul piano xy. I lobi sul piano xy riproducono la forma del diagramma del dipolo sullo stesso piano, e quindi sono piuttosto larghi; invece i lobi sul piano zy dipendono dal fattore di schiera e possono essere molto stretti. Visto in tre dimensioni, il diagramma di radiazione ha la forma di due ventagli contrapposti.

Un esempio familiare di schiera end-fire è costituito dall'antenna Yagi-Uda (Figura 10.6), usata nelle bande VHF e UHF, specie come antenna ricevente televisiva. Questa antenna è costituita da una schiera di dipoli di lunghezza prossima a mezza onda. Uno dei radiatori (dipolo attivo) viene alimentato direttamente, mentre gli altri radiatori (dipoli passivi) sono

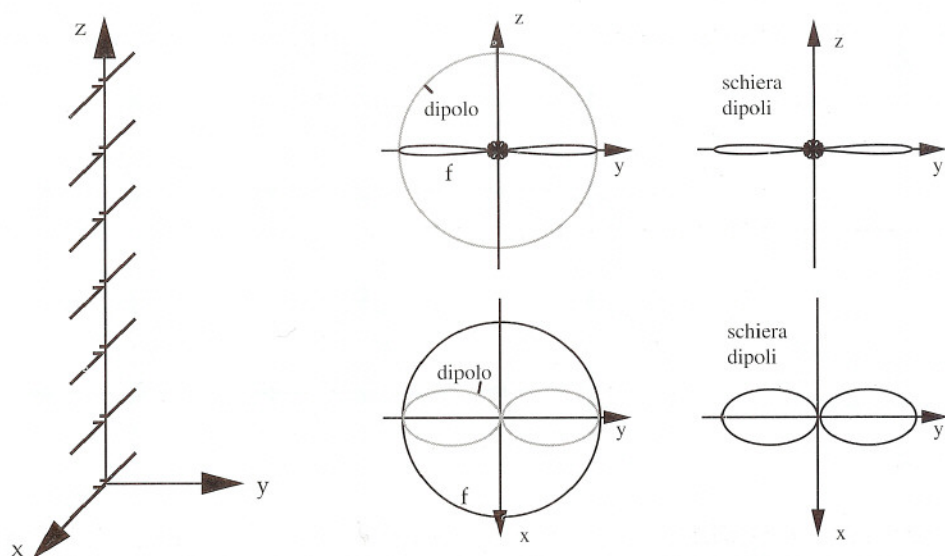



Figura 10.5

costituti da una barra metallica priva di terminali. In questi ultimi elementi, che possono essere considerati come dipoli chiusi in corto circuito, le correnti vengono indotte grazie all'accoppiamento con il dipolo attivo. Modificando leggermente le lunghezze dei dipoli passivi si può fare in modo che le fasi delle correnti indotte assumano i valori necessari a creare l'interferenza costruttiva nella direzione del semiasse $z > 0$. Poiché le variazioni di lunghezza necessarie a ottenere l'effetto desiderato sono molto piccole, tutti i dipoli possono essere sostanzialmente considerati uguali fra loro e l'antenna può essere vista come una schiera end-fire. La forma del diagramma di radiazione, ottenuta applicando la regola di Krauss è indicata nella Figura 10.6. L'antenna Yagi-Uda ha guadagni tipici dell'ordine di qualche decina.

Benché limitata a casi molto semplici, la discussione sulle schiere lineari ha messo in luce due importanti proprietà delle schiere in genere. La prima consiste nella possibilità di modificare la posizione del lobo principale agendo sullo sfasamento, ovvero sulla frequenza; infatti, dalla (10.2) si deduce:

$$\theta_0 = \arccos\frac{\delta\lambda}{2\pi d} \tag{10.11}$$

Questa possibilità è sfruttata nei *phased arrays*, in cui la fase (o la frequenza), viene fatta variare con sistemi di comando elettronico, in modo da variare con grande rapidità il puntamento del lobo principale. Ciò è molto utile in diverse applicazioni civili e militari (es. radio-aiuti per la navigazione aerea, radar, missilistica). La seconda proprietà consiste nel fatto che, agendo sulle ampiezze e le fasi dei coefficienti di eccitazione, è possibile ottenere una grande varietà di diagrammi di radiazione. Questa possibilità è sfruttata per realizzare

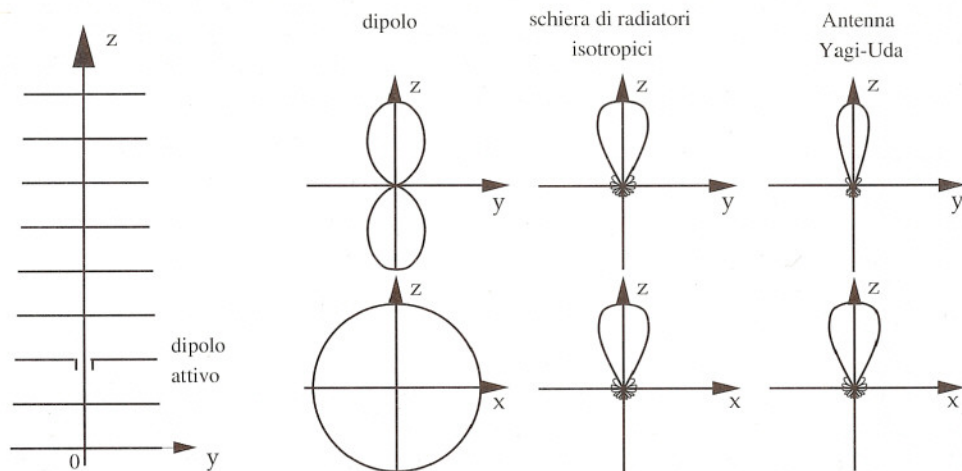



Figura 10.6

antenne con fasci conformati *ad hoc*, per venire incontro a particolari esigenze applicative; a questo scopo i coefficienti di eccitazione vengono determinati in modo da ottenere un diagramma di radiazione il più possibile prossimo a quello desiderato (sintesi della schiera). Non è questa la sede per addentrarsi in problemi specialistici come lo studio dei phased arrays o dei metodi di sintesi delle schiere, argomenti che vengono trattati nei testi dedicati alle antenne.

8.11 Antenne con dipoli e riflettori piani

La direttività di un dipolo può essere accresciuta ponendo parellamente ad esso un piano metallico distante un quarto d'onda (Figura 11.1*a*). Per la regola delle immagini un'antenna

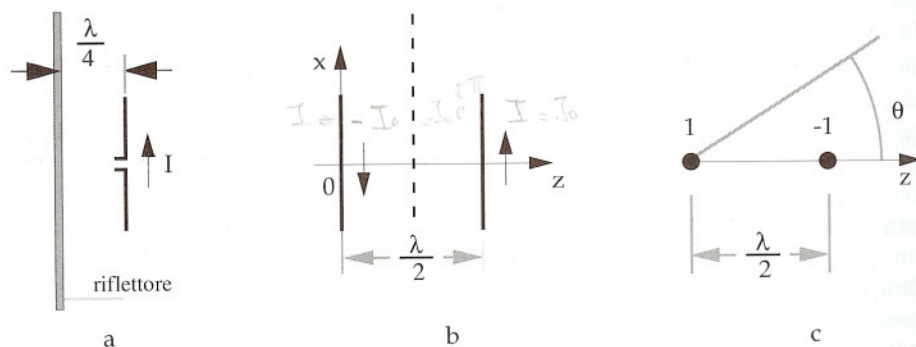



Figura 11.1

siffatta equivale alla schiera di due dipoli indicata nella Figura 11.1*b*. Poiché la corrente nel dipolo immagine è in opposizione di fase con quella del dipolo reale, i coefficienti di eccitazione sono 1 e −1. Il fattore di schiera può essere trovato mediante le formule del paragrafo precedente, ponendo N = 2, d = λ/2, δ = π. Per la (10.11) si ha:

$$\theta_0 = \arccos 1 = 0$$

Pertanto dalla (10.6) si deduce:

$$f = \frac{1}{4}\,\frac{\sin^2\pi(\cos\theta - 1)}{\sin^2\pi(\cos\theta - 1)/2} = \cos^2\left(\pi\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (0 \le \theta \le \pi/2)$$

L'andamento di f è rappresentato nella Figura 11.2. Applicando la regola di Krauss nei piani xz e yz, si ottengono i diagrammi di radiazione indicati.
Con lo stesso procedimento si trova il diagramma di radiazione di una schiera broadside del tipo indicato nella Figura 11.3, in cui i dipoli sono posti ad un quarto di lunghezza d'onda da un riflettore piano. Applicando la regola delle immagini si ottiene una coppia di schiere del tipo già incontrato nel paragrafo precedente (Figura 10.5), distanti fra loro mezza lunghezza d'onda e alimentate in controfase (Figura 11.3). Ciascuna schiera può essere considerata come un unico radiatore, che ha il diagramma di radiazione mostrato nella Figura 10.5. Pertanto il diagramma di radiazione della schiera con riflettore viene ottenuto applicando la regola di Krauss al diagramma di radiazione della singola schiera e al

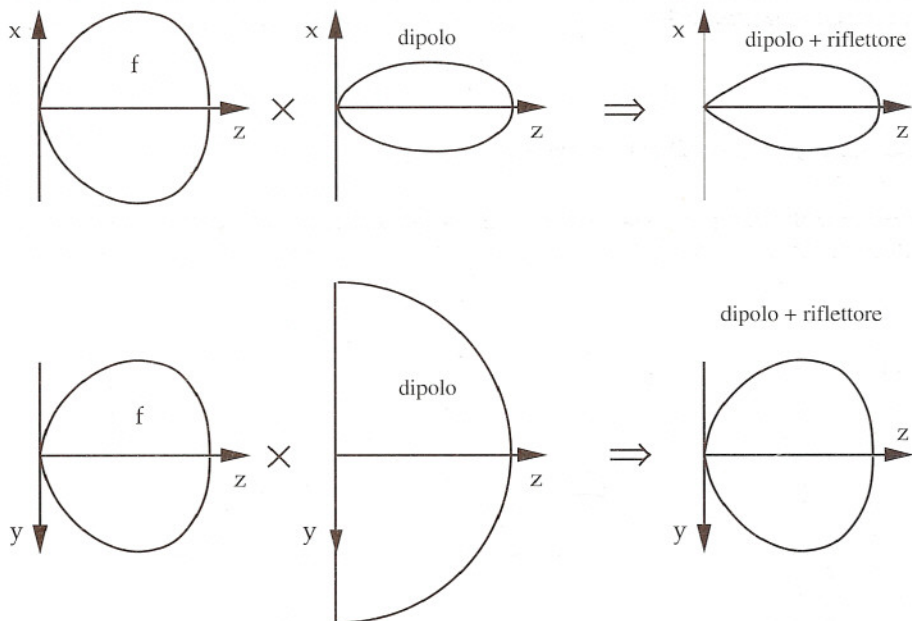



Figura 11.2

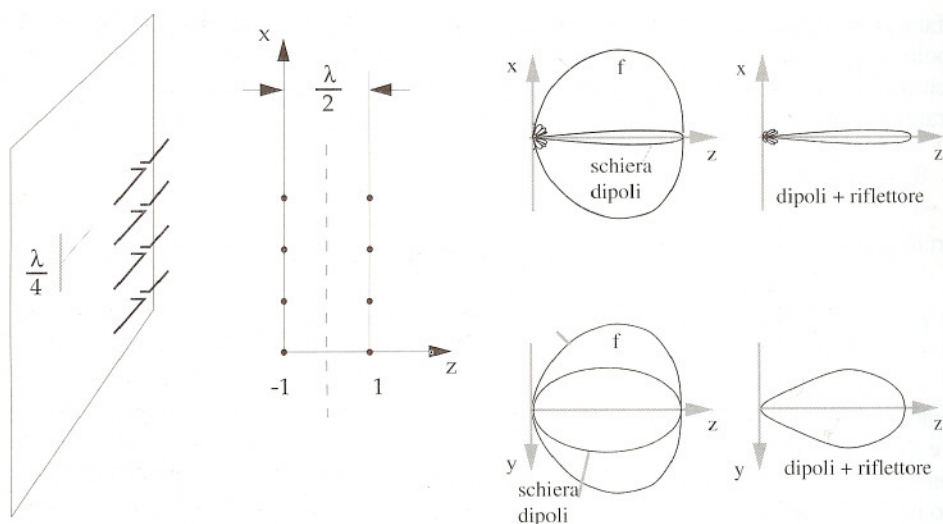



Figura 11.3

diagramma di radiazione dei due radiatori isotropici già considerati nella Figura 11.1*c*. Il procedimento è illustrato nella Figura 11.3. Considerazioni analoghe possono essere fatte quando si studiano dipoli (o schiere di dipoli) in posizione verticale o orizzontale posti in prossimità del suolo, se il suolo viene assimilato ad un conduttore perfetto. Il caso di un dipolo hertziano verticale posto all'altezza di mezza lunghezza d'onda è stato già trattato nell'esempio discusso nel Paragrafo 11 del capitolo precedente, senza usare la teoria delle schiere.

La regola delle immagini permette di trasformare in schiera anche l'antenna indicata nella Figura 11.4*a* (antenna con "riflettore ad angolo"). Essa è costituita da un dipolo e da un riflettore formato da due piani conduttori che formano un diedro ad angolo retto. Il dipolo giace sul piano bisettore del diedro ed è parallelo al suo spigolo. Applicando la regola delle immagini (vedi Figura 11.6 del capitolo precedente) l'antenna viene trasformata in una

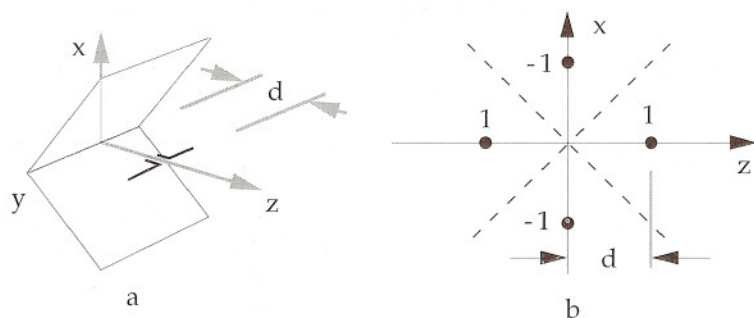



Figura 11.4

schiera di dipoli con le eccitazioni indicate in Figura 11.4*b*. Si lascia al lettore la determinazione del fattore di schiera e la verifica del fatto che esso presenta un massimo nella direzione z quando la distanza d è uguale a mezza lunghezza d'onda.

8.12 Cenni sulle antenne paraboliche

Nella banda delle microonde e delle onde millimetriche le antenne ad alta direttività sono spesso realizzate sfruttando un ben noto risultato dall'Ottica Geometrica: se una sorgente puntiforme viene collocata nel fuoco di un riflettore parabolico, i raggi riflessi dal riflettore sono paralleli e convogliano tutta l'energia intercettata dal riflettore nella direzione dell'asse. L'Ottica Geometrica è una teoria approssimata (vedi Capitolo 9) e i suoi risultati sono accettabili con le dovute cautele. In effetti si può ammettere che la radiazione riflessa si propaghi parallelamente all'asse solo in prossimità del riflettore; infatti, come già si sa, a grande distanza l'energia si propaga sempre in direzione radiale. Ciò nonostante si può prevedere che il grosso della radiazione riflessa è prevalentemente concentrata in un fascio, intorno all'asse del paraboloide.

La Figura 12.1 mostra un esempio di antenna a riflettore parabolico (più concisamente, "antenna parabolica"). In questo esempio la sorgente primaria (illuminatore) è una tromba posta sul fuoco del riflettore. I raggi riflessi determinano sulla superficie S (apertura) un'illuminazione del genere di quella mostrata in Figura 12.1. Sull'apertura, che è normale ai raggi, la fase dell'illuminazione è costante; infatti, secondo l'Ottica Geometrica, le superfici normali ai raggi sono equifase. L'intensità, invece, è generalmente variabile e dipende dalla forma del diagramma di radiazione dell'illuminatore.

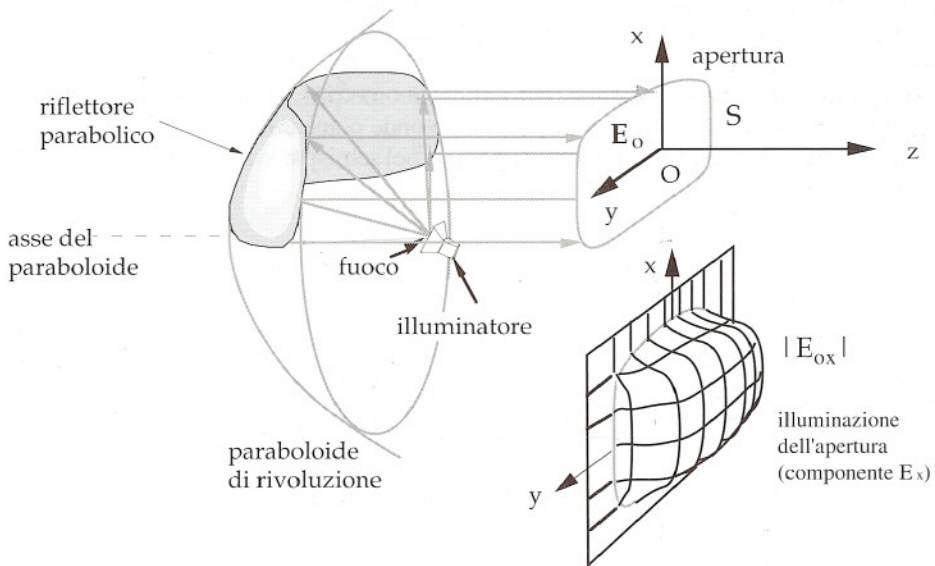



Figura 12.1

Come si vedrà nel successivo capitolo, l'Ottica Geometrica permette di ottenere una accettabile approssimazione dell'illuminazione, a patto che l'apertura sia collocata in prossimità del paraboloide e che tutte le dimensioni caratteristiche del riflettore (dimensioni della sezione trasversale, raggi di curvatura) siano molto maggiori della lunghezza d'onda. L'Ottica Geometrica però non è in grado di predire l'andamento del campo nella zona di radiazione. D'altro canto lo studio della radiazione può essere basato sul metodo esposto nel Paragrafo 12 del capitolo precedente, dove si è visto che il campo di radiazione dipende dalle trasformate di E_{0x} e E_{0y}. Dunque l'Ottica Geometrica può essere utilizzata per ottenere l'illuminazione dell'apertura, mentre il campo di radiazione può essere calcolato con il metodo ricordato.

Poiché la fase è costante lo spettro dell'illuminazione ha un picco sull'origine. La porzione del cerchio visibile occupata dal picco è tanto minore quanto maggiore è il rapporto fra le dimensioni dell'apertura e la lunghezza d'onda. Per questa ragione il diagramma di radiazione è caratterizzato da un lobo principale diretto secondo la direzione di z, tanto più stretto quanto maggiori sono le dimensioni del riflettore. Ciò è stato verificato nei casi particolari dell'apertura rettangolare e dell'apertura circolare illuminate uniformemente (Paragrafi 13 e 14, Capitolo 7).

In base alle (12.6) e (12.7) del capitolo precedente, l'intensità di radiazione nella direzione z è data da:

$$K_x = 2\pi^2 \frac{|e_x(0,0)|^2 + |e_y(0,0)|^2}{\eta\lambda^2} \tag{12.1}$$

dove:

$$e_x(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_S E_{0x}\, dS \qquad e_y(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_S E_{0y}\, dS \tag{12.2}$$

D'altro canto, nell'approssimazione dell'Ottica Geometrica, le onde sono di tipo TEM e soddisfano le stesse relazioni che valgono per le onde piane uniformi. Pertanto la potenza che attraversa l'apertura (cioè la potenza irraggiata nel semispazio $z > 0$) può essere calcolata come segue:

$$P_{irr} = \int_S \frac{|E_0|^2}{2\eta} dS = \frac{1}{2\eta}\int_S (|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2)\, dS \tag{12.3}$$

Se è possibile trascurare la radiazione che l'illuminatore invia direttamente nella zona posteriore al paraboloide, le (12.1) e (12.3) permettono di calcolare la direttività delle antenne a riflettore. La direttività è circa uguale al guadagno, perché le perdite sono trascurabili.

In particolare, nel caso ideale di un'apertura di forma arbitraria illuminata uniformemente si ha:

$$e_x(0,0) = \frac{E_{0x} A_{ap}}{2\pi} \qquad e_y(0,0) = \frac{E_{0y} A_{ap}}{2\pi}$$

dove A_{ap} è l'area dell'apertura. Ne consegue:

$$K_x = \frac{A_{ap}^{\ 2}}{2\eta\lambda^2}(|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2)$$

$$P_{irr} = \frac{A_{ap}}{2\eta}(|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2)$$

$$g_x \approx D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ap} \qquad (12.4)$$

Il guadagno è molto elevato, perché le dimensioni dell'apertura sono molto maggiori della lunghezza d'onda. Ad esempio se $A_{ap} = 1000\lambda^2$ si ha un guadagno di oltre 12000 (ovvero 40.8 db).

Le illuminazioni che si realizzano in pratica sono rastremate verso il bordo dell'apertura (Figura 12.2*a*). Questo dipende in primo luogo dal fatto che illuminazioni non rastremate richiederebbero l'uso di illuminatori con un lobo principale tanto largo da irraggiare direttamente nella zona retrostante il riflettore (Figura 12.2*b*), creando lobi posteriori intensi,

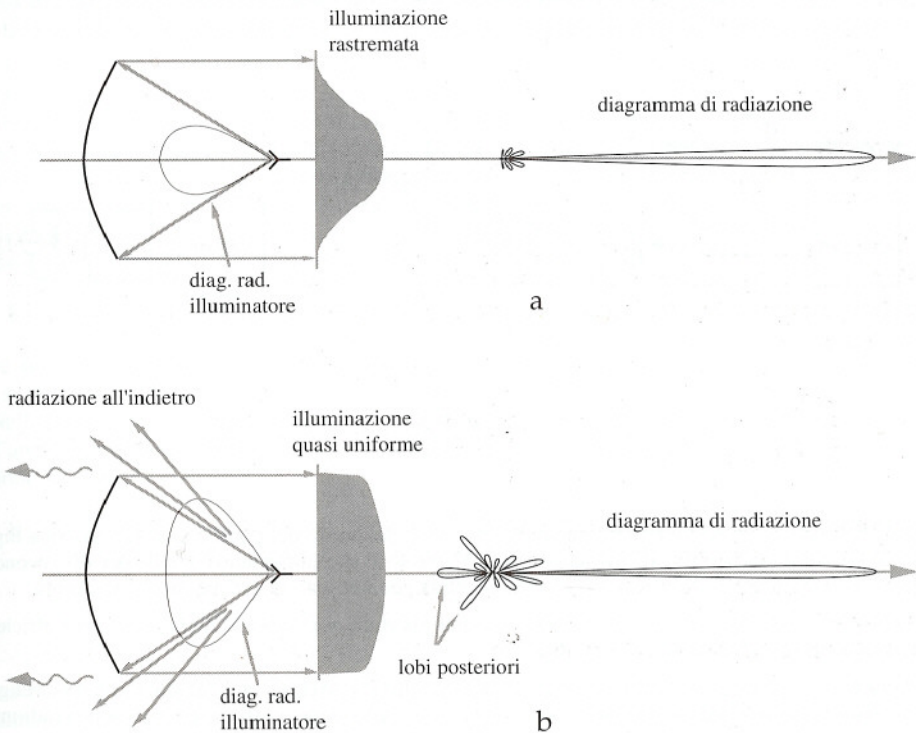



Figura 12.2

altamente deleteri in molte applicazioni.[1] In secondo luogo, la maggior "dolcezza" dell'illuminazione rastremata fa sì che, anche nella zona anteriore, i lobi laterali siano di livello minore. Con le illuminazioni rastremate il lobo principale del diagramma di radiazione risulta più largo di quello che verrebbe ottenuto con l'illuminazione uniforme. Per questo il guadagno è minore di quello fornito dalla (12.4) e si usa scrivere

$$g_x = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ap} \zeta \qquad (12.5)$$

dove ζ è un coefficiente minore di 1, detto "efficienza dell'apertura".[2] Comunemente ζ è dell'ordine di $0.5-0.7$. Nello studio di massima dei collegamenti radio, la (12.5) è molto utile per stimare le dimensioni delle antenne paraboliche.

8.13 Antenne riceventi

Un'antenna collegata ad un radioricevitore (Figura 13.1*a*), investita dalla radiazione emessa da una sorgente posta a grande distanza, "cattura" parte dell'energia incidente e la trasferisce al ricevitore. In questo caso l'antenna viene detta "ricevente". La sorgente può essere un'antenna trasmittente o qualsiasi altra fonte di radiazione.[3]

Il ricevitore e la guida (o linea) di collegamento con l'antenna sono schermati, di modo che il segnale arriva al ricevitore esclusivamente attraverso la porta S_0. Vista dal ricevitore,

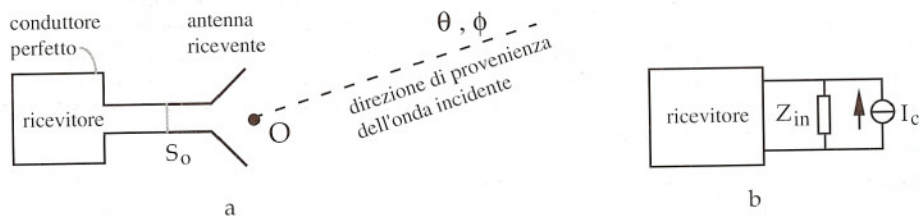



Figura 13.1

1 Se l'illuminatore emette intensamente nella direzione del bordo del paraboloide (come nella Figura 12.2*b*) si hanno anche effetti di diffrazione (vedi Capitolo 9) che aumentano il livello dei lobi secondari, anche nelle regione posteriore che - secondo l'ottica geometrica - dovrebbe restare in ombra.

2 E appena il caso di osservare che l'efficienza dell'apertura non ha nulla a che fare con l'efficienza dell'antenna, che è collegata alle perdite.

3 In questo testo si suppone che la sorgente sia monocromatica. In certe applicazioni le antenne vengono anche usate per ricevere segnali non coerenti (esempio radiazione termica). Esempi sono i radiometri (usati nel telerilevamento) e i radiotelescopi (usati nella moderna astronomia). Lo studio del comportamento in regime sinusoidale è essenziale per comprendere il funzionamento delle antenne anche in queste applicazioni.

l'antenna si comporta come un generatore, caratterizzato da una certa corrente di cortocircuito I_c e da una certa impedenza interna (Figura 13.1*b*). L'impedenza è quella che si vede all'ingresso dell'antenna quando manca la radiazione incidente; pertanto essa non è altro che l'impedenza Z_{in} di cui si è discusso nel Paragrafo 2. La corrente I_c è quella che si avrebbe alla porta S_0, chiusa in corto circuito; essa dipende dall'antenna e dal campo incidente, intendendo per campo incidente quello che si avrebbe nella zona dell'antenna, in *assenza* dell'antenna stessa e del ricevitore. Se si suppone che l'antenna e la sorgente del campo incidente siano collocate l'una nella zona di radiazione dell'altra si trova:

$$I_c = -j\lambda \sqrt{\frac{G_{in}\, g(\theta, \phi)}{\pi \eta}}\, \mathbf{p}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{E}_{inc} \tag{13.1}$$

dove:

$\mathbf{E}_{inc}$ è il campo elettrico incidente considerato nell'origine O del sistema di riferimento dell'antenna;

G_{in} è la conduttanza d'ingresso dell'antenna;

g, $\mathbf{p}$ sono il guadagno e il vettore di polarizzazione dell'antenna nella direzione θ, ϕ da cui proviene l'onda incidente.[1]

Il risultato è piuttosto sorprendente, perché mostra che *il comportamento dell'antenna in ricezione dipende dalle stesse quantità - il guadagno, il vettore di polarizzazione e l'impedenza d'ingresso - che caratterizzano l'antenna in trasmissione.*

■ DIMOSTRAZIONE DELLA (13.1) La dimostrazione è basata sul teorema di reciprocità, applicato in tutto lo spazio, escluso il volume V_r occupato dal ricevitore (Figura 13.2). Il punto P rappresenta la posizione dell'origine cui sono riferiti i parametri dell'antenna ricevente. L'origine O è localizzata nel volume della sorgente (V_s). La distanza r fra O e P è in realtà molto maggiore di quella che appare nella figura, dato che l'antenna e la sorgente sono l'una nella zona di radiazione dell'altra. Il teorema di reciprocità viene applicato considerando le due situazioni indicate nella Figura 13.2.

Nella situazione di Figura 13.2*a* la porta S_0 è in cortocircuito e il campo ($\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$) è creato da sorgenti $\mathbf{J}_0$, agenti nel volume V_s. Su S_0 si hanno i seguenti campi trasversali:

$$\mathbf{E}'_T = 0 \qquad \mathbf{H}'_T = I_c\, \mathbf{h} \tag{13.2}$$

dove $\mathbf{h}$ è il vettore magnetico del modo che si propaga nella guida e I_c è la corrente di cortocircuito che si vuole determinare.

Nella situazione di Figura 13.2*b* la sorgenti $\mathbf{J}_0$ sono assenti e il campo ($\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$) viene generato dall'antenna in esame, alimentata da sorgenti (non meglio specificate) agenti nella regione V_r. Sulla sezione S_0 si ha:

$$\mathbf{E}''_T = V\mathbf{e} \tag{13.3}$$

1 La fase del vettore di polarizzazione è quella che si ha in trasmissione, quando l'antenna viene alimentata con una tensione d'ingresso avente fase propria nulla. Questa precisazione serve solo a fornire l'esatto valore dello sfasamento fra I_c e il campo incidente, sfasamento che dipende dalla fase di $\mathbf{p}$. Se nel determinare $\mathbf{p}$ si assume una fase diversa dell'eccitazione, la fase di I_c è affetta da un errore che, comunque, è spesso irrilevante ai fini pratici.

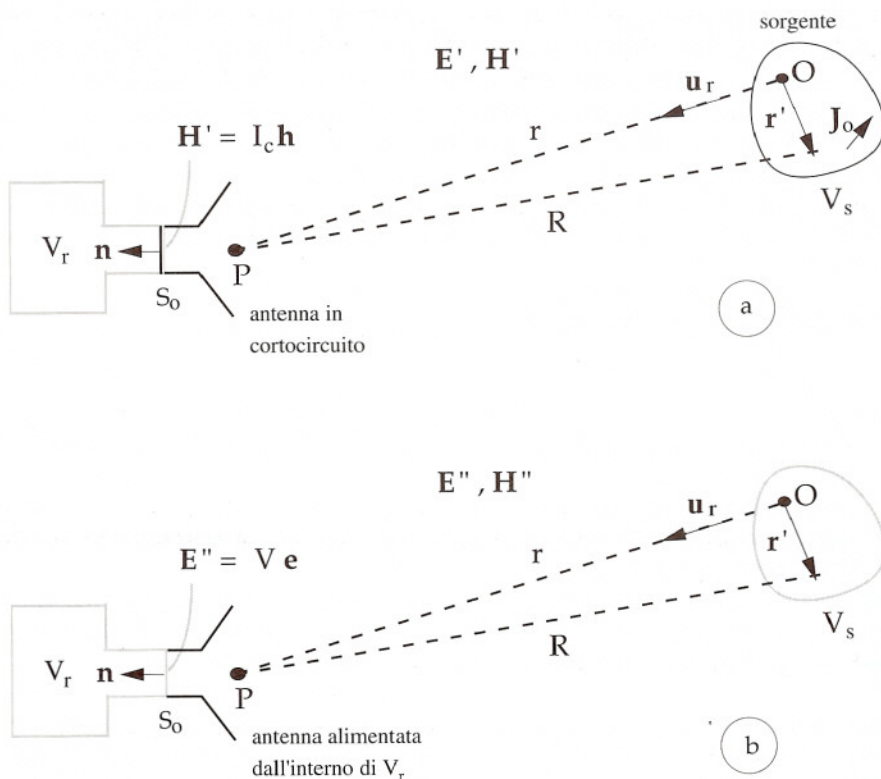



Figura 13.2

dove **e** rappresenta il vettore modale elettrico e V è la tensione all'ingresso dell'antenna. Senza perdere in generalità si può supporre che V sia reale. Pertanto, indicando con P la potenza all'ingresso dell'antenna si ha:

$$P = G_{in}\, V^2 / 2 \qquad V = \sqrt{\frac{2P}{G_{in}}} \tag{13.4}$$

Applicando il teorema di reciprocità si ottiene:

$$\int_{V_s} \mathbf{E}''(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\, dV_s = \int_{S_0} \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n}\, dS_0 = VI_c \int_{S_0} \mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}\, dS_0 = VI_c$$

Infatti l'integrale di superficie sul contorno di V_r si riduce all'integrale sulla porta S_0 (sia **E**' che **E**" sono normali al resto del contorno, che è posto sullo schermo del ricevitore). Utilizzando la precedente espressione e la (13.4) si ottiene:

$$I_c = \sqrt{\frac{G_{in}}{2P}} \int_{V_s} \mathbf{E}''(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\, dV_s \tag{13.5}$$

Il guadagno e il vettore di polarizzazione dell'antenna nella direzione del punto **r'**, sono praticamente uguali a quelli nella direzione della congiungente OP (g e $\mathbf{p}$) perché, a causa della grande distanza, il volume V_s viene visto da P sotto un angolo trascurabile. Pertanto, usando la (1.4*a*) si può scrivere:

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r}') = \sqrt{\frac{\eta P g}{2\pi}} \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{p}$$

(R è la distanza fra il punto **r'** e il punto P). Facendo le solite approssimazioni

$$1/R \approx 1/r \qquad kR \approx k(r - \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')$$

e sostituendo nella (13.5) si ottiene:

$$I_c = \sqrt{\frac{\eta G_{in} g}{\pi}} \frac{e^{-jkr}}{2r} \mathbf{p} \cdot \int_{V_s} \mathbf{J}_0(\mathbf{r}') e^{jk\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} dV_s = \sqrt{\frac{\eta G_{in} g}{\pi}} \frac{e^{-jkr}}{2r} \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} \tag{13.6}$$

dove **N** è il vettore di radiazione delle sorgenti $\mathbf{J}_0$, da cui dipende il campo $\mathbf{E}_{inc}$ che le sorgenti genererebbero nel punto P, in assenza dell'antenna e del ricevitore. Si ha infatti (vedi Equazione 3.6 del Capitolo 7):

$$\mathbf{E}_{inc} = -j\frac{\eta}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{2r} [\mathbf{N} - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{N})\mathbf{u}_r]$$

(il vettore in parentesi è proprio $N_\theta \mathbf{u}_\theta + N_\phi \mathbf{u}_\phi$). Osservando che $\mathbf{p}$ è ortogonale a $\mathbf{u}_r$, si ha:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{inc} = -j\frac{\eta}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{2r} \mathbf{p} \cdot \mathbf{N}$$

Ricavando $\mathbf{p} \cdot \mathbf{N}$ e sostituendo nella (13.6), si ottiene l'espressione finale di I_c. ■

8.14 Potenza ricevuta

La potenza che giunge al ricevitore dipende dalla potenza disponibile del generatore equivalente all'antenna. Se l'impedenza d'ingresso del ricevitore è adattata a quella dell'antenna ($Z_{ric} = Z_{in}^*$) la potenza disponibile viene integralmente trasferita al ricevitore. Normalmente questa condizione viene realizzata e, quindi, la potenza disponibile coincide con la cosiddetta "potenza ricevuta".[1] Dunque, ricordando la (6.4) del Capitolo 5, la potenza ricevuta è data da :

1 La potenza ricevuta è minore se l'antenna è disadattata. In questo caso essa viene ricavata utilizzando una delle espressioni che forniscono la potenza effettivamente erogata dal generatore in funzione della potenza disponibile (vedi Equazione 6.6 del Capitolo 5).

$$P_r = \frac{|I_c|^2}{8G_{in}} = \frac{\lambda^2 g(\theta, \phi)}{8\pi\eta} |\mathbf{p}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{E}_{inc}|^2 \tag{14.1}$$

D'altro canto il campo incidente può essere espresso in funzione dell'ampiezza e del vettore di polarizzazione:

$$\mathbf{E}_{inc} = \mathbf{p}_{inc} |\mathbf{E}_{inc}| e^{-j\chi}$$

dove la fase χ dipende dalla definizione di $\mathbf{p}_{inc}$. Sostituendo nella (14.1) si ottiene:

$$P_r = \frac{|I_c|^2}{8G_{in}} = \frac{\lambda^2 g(\theta, \phi)}{4\pi} |\mathbf{p}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{p}_{inc}|^2 \frac{|\mathbf{E}_{inc}|^2}{2\eta}$$

Introducendo la densità della potenza incidente

$$W_{inc} = \frac{|\mathbf{E}_{inc}|^2}{2\eta}$$

si perviene alla seguente espressione:

$$P_r = \tau\, A\, W_{inc} \tag{14.2}$$

dove:

$$A = A(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\theta, \phi) \qquad \textit{(area efficace dell'antenna)} \tag{14.3}$$

$$\tau = \tau(\theta, \phi) = |\mathbf{p}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{p}_{inc}|^2 \qquad \textit{(fattore di polarizzazione)} \tag{14.4}$$

Dalla discussione riportata in fondo al paragrafo risulta che il massimo valore del fattore di polarizzazione è 1. Il valore massimo viene ottenuto quando

$$\mathbf{p}_{inc} = \mathbf{p}^* e^{j\xi} \qquad \textit{(condizione di adattamento in polarizzazione)}$$

dove ξ è una fase arbitraria. Nel caso generale, in cui la polarizzazione dell'onda emessa dall'antenna è ellittica, il vettore di polarizzazione è del tipo

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 + j\mathbf{p}_2) e^{j\delta} \qquad (p_1^2 + p_2^2 = 1)$$

dove $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ sono vettori (reali) perpendicolari, di lunghezza proporzionale ai semiassi dell'ellisse di polarizzazione del campo elettrico. La condizione di adattamento in polarizzazione richiede

$$\mathbf{p}_{inc} = (\mathbf{p}_1 - j\mathbf{p}_2)\, e^{j(\xi - \delta)}$$

Pertanto l'ellisse di polarizzazione dell'onda incidente (vedi figura) deve essere identica per orientamento e per eccentricità a quella dell'onda che verrebbe emessa dall'antenna, usata in trasmissione. I versi di rotazione sono opposti, ma anche le onde si propagano in verso opposto; dunque i versi di rotazione, riferiti a quelli di propagazione, sono identici. Si può quindi concludere che *la condizione di adattamento in polarizzazione viene ottenuta quando la polarizzazione dell'onda incidente è identica a quella dell'onda che l'antenna produrrebbe in trasmissione, nella direzione di provenienza dell'onda incidente.*

Detto $\mathbf{u}_r$ il versore radiale nella direzione θ, ϕ il fattore di polarizzazione è nullo se

$$\mathbf{p}_{inc} = \mathbf{u}_r \times \mathbf{p}\, e^{j\xi}$$

Infatti, in questo caso risulta:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_{inc} = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{p}\, e^{j\xi} = 0$$

In questo caso le due ellissi di polarizzazione hanno la stessa eccentricità ma sono ruotate di 90° l'una rispetto all'altra. Inoltre i versi di rotazione, riferiti a quelli di propagazione, sono opposti.

Nel caso particolare in cui l'antenna emette in polarizzazione lineare (esempio $\mathbf{p} = \mathbf{u}_\theta$) si ha adattamento se l'onda incidente è pure polarizzata linearmente, nella stessa direzione; se invece la direzione è quella perpendicolare, la potenza ricevuta è nulla. Ad esempio, un'antenna a dipolo non riceve se il campo elettrico incidente è polarizzato linearmente in direzione perpendicolare al dipolo stesso. Nel caso particolare della polarizzazione circolare la condizione di adattamento richiede che le onde incidente ed emessa siano entrambe levogire o destrogire; invece la potenza ricevuta è nulla se un'onda è levogira e l'altra destrogira.

Quando l'antenna è adattata in polarizzazione la potenza ricevuta è pari al prodotto AW_{inc}. Il prodotto rappresenta la potenza che verrebbe intercettata da una superficie piana di area pari all'area efficace, perpendicolare alla direzione della radiazione incidente. Dunque si può

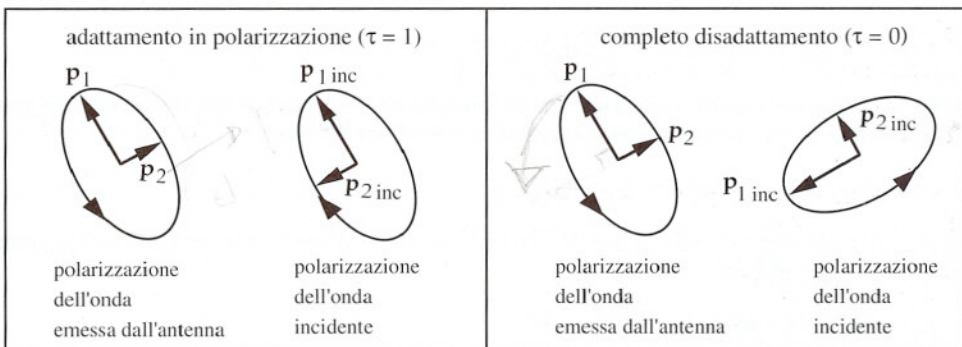



Figura 14.1

affermare quanto segue: *quando l'antenna è adattata in polarizzazione con l'onda incidente la potenza ricevuta è massima ed è uguale alla potenza che incide sull'area efficace. Poiché l'area efficace è proporzionale al guadagno, un'antenna è in grado captare una potenza maggiore quando l'onda incidente proviene dalle direzioni in cui l'antenna irraggia con maggiore intensità.*

È opportuno sottolineare che l'area efficace non ha alcuna relazione con la sezione trasversale dell'antenna, tranne che in casi particolari. Ad esempio, un dipolo in mezza onda molto sottile, pur presentando alla radiazione incidente una sezione trasversale di area trascurabile, ha in direzione perpendicolare all'asse l'area efficace:

$$A = 1.64 \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Invece in un'antenna parabolica l'area efficace nella direzione dell'asse è prossima all'area dell'apertura, che a sua volta è uguale alla sezione trasversale che il riflettore presenta alla radiazione incidente; infatti (vedi Equazione 12.5) si ha:

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} g_x = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{4\pi}{\lambda^2} \zeta A_{ap} = \zeta A_{ap}$$

Nel caso ideale $\zeta = 1$ l'area efficace sarebbe esattamente uguale a quella dell'apertura. In una simile antenna tutta la radiazione intercettata dal paraboloide (nella direzione dell'asse) verrebbe riflessa dentro l'illuminatore e la sua potenza verrebbe integralmente trasferita al ricevitore. In effetti, le antenna paraboliche reali trasmettono al ricevitore solo una parte (50% - 70%) della potenza che incide sul paraboloide.

■ CONDIZIONE DI ADATTAMENTO IN POLARIZZAZIONE I vettori di polarizzazione dell'antenna e della radiazione incidente, nella direzione θ, ϕ, possono sempre essere posti nella forma

$$\mathbf{p} = (\mathbf{u}_\theta \cos X + \mathbf{u}_\phi \sin X \; e^{j\psi'})\, e^{j\chi'} \qquad \mathbf{p}_{inc} = (\mathbf{u}_\theta \cos Y + \mathbf{u}_\phi \sin Y \; e^{j\psi''})\, e^{j\chi''}$$

Infatti, con opportuna scelta di X e Y (definiti fra 0 e $\pi/2$) e delle varie fasi, si ottengono tutti i possibili versori complessi, ortogonali alla direzione di propagazione $\mathbf{u}_r$. Sostituendo nella (14.4), si ottiene:

$$\tau = \cos^2 X \cos^2 Y + \sin^2 X \sin^2 Y + 2 \sin X \cos X \sin Y \cos Y \cos(\psi' + \psi'')$$

Poiché, per definizione, sinX, cosX, sinY, cosY non sono negativi, per ottenere il massimo valore di τ deve aversi $\psi'' = -\psi'$. In questo caso la precedente espressione diviene:

$$\tau = (\cos X \cos Y + \sin X \sin Y)^2 = \cos^2 (X - Y)$$

Il massimo ($\tau = 1$) viene ottenuto quando $Y = X$. In conclusione, il fattore di polarizzazione raggiunge il massimo valore quando:

$$\mathbf{p}_{inc} = (\mathbf{u}_\theta \cos X + \mathbf{u}_\phi \sin X \; e^{-j\psi'})\, e^{j\chi''} = \mathbf{p}^* \, e^{j\xi}$$

dove si è posto $\xi = \chi'' + \chi'$. ■

8.15 Formula di Friis

Si consideri un collegamento realizzato mediante due antenne, una trasmittente l'altra ricevente, poste alla distanza d (Figura 15.1). Siano g_1 e g_2 i guadagni delle due antenne nella direzione della congiungente. Si supponga inoltre che, in questa direzione, le due antenne abbiano la stessa polarizzazione. Se l'antenna 1 è alimentata da un trasmettitore di potenza P_{tr} la densità di potenza incidente sull'antenna 2 è:

$$W_{inc} = \frac{P_{tr}}{4\pi r^2} g_1$$

Se il ricevitore è adattato all'antenna 2 la potenza ricevuta è:

$$P_r = A_2 W_{inc} = \frac{P_{tr}}{4\pi r^2} g_1 A_2$$

Tenendo conto delle relazioni fra l'area efficace e il guadagno, il rapporto fra la potenza ricevuta e la potenza trasmessa è dato da:

$$\frac{P_r}{P_{tr}} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 g_1 g_2 \qquad \textit{(formula di Friis)} \qquad (15.1)$$

È evidente l'importanza della formula di Friis nello studio dei collegamenti radio.

■ La formula di Friis suggerisce un semplice metodo per misurare il guadagno di un'antenna. Si pongono due antenne uguali una di fronte all'altra, orientandole in maniera da ottenere il massimo rapporto fra la potenza ricevuta e quella trasmessa. In queste condizioni il guadagno delle due antenne nella direzione della congiungente è g_x. Dalla (15.1) si deduce immediatamente;

$$g_x = \frac{4\pi r}{\lambda} \sqrt{\frac{P_r}{P_{tr}}} \qquad (15.2)$$

Pertanto misurando la distanza e il rapporto fra la potenza ricevuta e quella trasmessa si determina il guadagno. La misura dovrebbe essere effettuata nello spazio libero, in assenza di ostacoli. In pratica essa viene eseguita in un locale dotato di pareti assorbenti (camera anecoica).

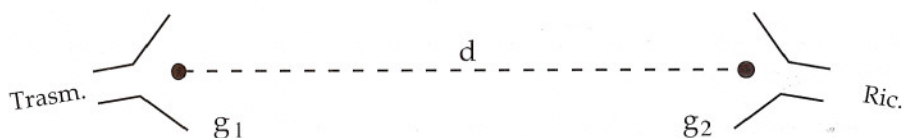



Figura 15.1

Si osserva pure che facendo ruotare su se stessa l'antenna 2 e registrando la potenza ricevuta in funzione della posizione si ottiene un diagramma proporzionale alla funzione $g_2 = g_2(\theta, \phi)$. A parte la normalizzazione, esso rappresenta il diagramma di radiazione dell'antenna 2.

Per effettuare questa misura le antenne devono essere poste nella zona di radiazione l'una dell'altra. In alcuni casi questo richiederebbe camere anecoiche di dimensioni eccessive e le misure non possono essere fatte così semplicemente. ■

9
Approssimazioni ottiche

Molti dei problemi che in pratica si presentano nello studio delle onde elettromagnetiche sono troppo complicati per essere risolti esattamente. In questi casi bisogna accontentarsi di soluzioni approssimate. Questo capitolo tratta alcuni metodi che permettono di studiare la propagazione quando la lunghezza d'onda è molto piccola rispetto a tutte le lunghezze che caratterizzano il problema da risolvere. Questa situazione si presenta quasi sempre in Ottica e, per questo, le soluzioni ottenute con questi metodi vengono dette "approssimazioni ottiche". L'importanza delle approssimazioni ottiche è però rilevante anche a frequenze molto più basse, in diverse problematiche riguardanti le antenne o la propagazione delle radioonde in mezzi naturali a indice di rifrazione lentamente variabile, come l'atmosfera terrestre o la ionosfera.

Il campo in una regione priva di sorgenti è determinato dalle condizioni al contorno e dipende dalla frequenza, che appare nelle formule come un parametro. Se questo parametro tende all'infinito ovvero - che è lo stesso - se la lunghezza d'onda tende a zero, le variazioni di fase tendono a divenire sempre più rapide mentre l'ampiezza, la polarizzazione e le superfici equifase tendono ad un certo andamento limite. L'approssimazione ottica più drastica di tutte consiste nell'approssimare gli andamenti reali con quelli limite. Il metodo che permette di determinare tali andamenti è quello dell'Ottica Geometrica (OG), la cui utilità nella progettazione degli strumenti ottici più comuni è ben nota. L'OG, sviluppata come scienza indipendente molto prima della scoperta dell'Elettromagnetismo, era inizialmente fondata su un suo postulato fondamentale, il "principio di Fermat". È molto utile dedurre l'OG dalle Teoria Elettromagnetica, sia per inquadrarne le leggi in un contesto generale, sia per comprenderne i limiti di applicabilità. All'OG sono dedicati i primi otto paragrafi di questo capitolo.

In molti casi l'OG porta a prevedere certe discontinuità o singolarità del campo laddove nella realtà si hanno rapide variazioni continue o picchi di intensità finita. Queste discrepanze dalle previsioni dell'OG vengono dette "fenomeni di diffrazione". Per studiare la diffrazione, bisogna considerare approssimazioni più sofisticate di quelle dell'OG; esse risultano dall'applicazione di vari metodi, il cui studio è oggetto della cosiddetta "Teoria della Diffrazione".

Già molto tempo prima della scoperta dell'Elettromagnetismo l'osservazione dei fenomeni di diffrazione aveva portato a sviluppare la teoria ondulatoria della luce, il cui postulato fondamentale era costituito dal "principio di Huyghens". In base a tale principio era stata costruita una teoria della diffrazione che in molti casi fornisce risultati in ottimo accordo con l'esperienza. Alla luce della Teoria Elettromagnetica, l'uso del principio di Huyghens viene

giustificato se si prende lo spunto dal metodo delle sorgenti equivalenti di cui si è discusso nel Capitolo 7. Nel Paragrafo 10 viene discussa l'applicazione di questo metodo allo studio della diffusione di un'onda che incide su di un corpo metallico (approssimazione della "Ottica Fisica"). Le formule del campo generato da un'apertura, che come si ricorderà dipendono dal metodo delle sorgenti equivalenti, vengono utilizzate negli ultimi tre paragrafi per studiare la diffrazione di una fascio focalizzato e la propagazione dei cosiddetti "fasci gaussiani", che sono approssimazioni ottiche di particolare importanza per lo studio dei laser.

9.1 L'Ottica Geometrica come conseguenza della Teoria Elettromagnetica

Nello studio delle approssimazioni ottiche vengono dette "lentamente variabili" le funzioni delle coordinate che variano apprezzabilmente solo su distanze molto maggiori della lunghezza d'onda λ_0. L'OG permette di studiare in modo semplice la propagazione di onde in cui l'ampiezza, la polarizzazione e il vettore di propagazione sono funzioni continue e lentamente variabili delle coordinate. Si suppone che il mezzo sia isotropo, senza perdite e che l'indice di rifrazione (n) sia costante o lentamente variabile.[1] L'ipotesi di lenta variabilità è tanto meglio verificata quanto minore è la lunghezza d'onda.

IPOTESI BASILARI L'approssimazione dell'OG è sostanzialmente basata sul fatto che le onde considerate sono localmente assimilabili ad onde piane uniformi. Infatti, nell'ipotesi di lenta variabilità, l'ampiezza, la polarizzazione, il vettore di propagazione e l'indice di rifrazione sono pressoché costanti in qualsiasi regione di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda. Poiché nelle onde piane uniformi l'unica quantità che dipende dalla frequenza è la fase (che è proporzionale a $k = n\omega/c$), per sottolineare l'analogia con le onde piane uniformi i campi vengono rappresentati mediante espressioni del tipo

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}\, e^{-jk_0 L} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{h}\, e^{-jk_0 L} \qquad (k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0) \tag{1.1}$$

dove L è una funzione reale della posizione, detta "iconale", e i vettori **e**, **h**, ∇L sono lentamente variabili. Se le proprietà locali dei campi fossero identiche a quelle che si hanno in un'onda piana uniforme, **e**, **h**, ed L, dovrebbero essere indipendenti da k_0. Però questa ipotesi è presumibilmente verificata solo per valori sufficientemente elevati di k_0, perché solo nel caso limite $k_0 \rightarrow \infty$ la lunghezza d'onda tende a zero e le ipotesi di lenta variabilità possono essere pienamente giustificate. Volendo considerare valori finiti della lunghezza d'onda, conviene fare l'ipotesi - meno brutale - che i vettori **e** e **h**, dipendano in qualche modo da k_0, mediante espressioni del tipo:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, k_0) = \mathbf{e}_0(\mathbf{r}) + k_0^{-1}\,\mathbf{e}_1(\mathbf{r}) + k_0^{-2}\,\mathbf{e}_2(\mathbf{r}) + \dots \tag{1.2a}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, k_0) = \mathbf{h}_0(\mathbf{r}) + k_0^{-1}\,\mathbf{h}_1(\mathbf{r}) + k_0^{-2}\,\mathbf{h}_2(\mathbf{r}) + \dots \tag{1.2b}$$

---

1 In questa trattazione si suppone che il mezzo sia amagnetico e che, quindi, le sue caratteristiche siano completamente descritte dall'indice di rifrazione $n = \varepsilon'^{1/2}$.Questa ipotesi, quasi sempre verificata, è in realtà inessenziale e viene fatta solo per non appesantire inutilmente le formule.

La forma di queste espressioni presuppone che **e** e **h** siano sviluppabili in serie di potenze di k_0^{-1} ed è suggerita dal fatto che la dipendenza da k_0 deve essere tanto meno sentita quanto maggiore è k_0.

EQUAZIONE DELL'ICONALE, EQUAZIONI DEL TRASPORTO, RELAZIONI FRA I VETTORI

(1.2) Sostituendo le (1.1) nelle equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

e nelle equazioni alle divergenze

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}) = 0 \qquad \nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H} = 0$$

dopo semplici passaggi si ottiene:

$$\mathbf{h} \times \nabla L - \frac{n^2}{\eta_0}\mathbf{e} = jk_0^{-1}\nabla \times \mathbf{h} \tag{1.3a}$$

$$\mathbf{e} \times \nabla L + \eta_0 \mathbf{h} = jk_0^{-1}\nabla \times \mathbf{e} \tag{1.3b}$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla L = -jk_0^{-1}(\nabla \cdot \mathbf{e} + 2\mathbf{e} \cdot \nabla \ln n) \tag{1.3c}$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla L = -jk_0^{-1}\nabla \cdot \mathbf{h} \tag{1.3d}$$

Inoltre, ricavando **h** dalla (1.3*b*) e sostituendo nella (1.3*a*), dopo semplici ma tediosi passaggi si ottiene:

$$(|\nabla L|^2 - n^2)\mathbf{e} + jk_0^{-1}[2(\nabla L \cdot \nabla)\mathbf{e} + 2(\mathbf{e} \cdot \nabla \ln n)\nabla L + \mathbf{e}\nabla^2 L] -$$
$$k_0^{-2}[\nabla^2 \mathbf{e} + 2\nabla(\mathbf{e} \cdot \nabla \ln n)] = 0$$

Sostituendo la (1.2*a*) in quest'ultima equazione il primo termine assume la forma di una serie di potenze di k_0^{-1}. Poiché l'equazione deve essere verificata indipendentemente dal valore di k_0, i coefficienti delle varie potenze devono essere nulli. Così si ottengono le seguenti equazioni:

$$(|\nabla L|^2 - n^2)\mathbf{e}_0 = 0$$

$$(|\nabla L|^2 - n^2)\mathbf{e}_1 + \mathbf{j}[2(\nabla L \cdot \nabla)\mathbf{e}_0 + 2(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla \ln n)\nabla L + \mathbf{e}_0\nabla^2 L] = 0$$

$$(|\nabla L|^2 - n^2)\mathbf{e}_2 + j[2(\nabla L \cdot \nabla)\mathbf{e}_1 + 2(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla \ln n)\nabla L + \mathbf{e}_1\nabla^2 L] -$$
$$[\nabla^2 \mathbf{e}_0 + 2\nabla(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla \ln n)] = 0$$

...

$$(|\nabla L|^2 - n^2)\mathbf{e}_m + j[2(\nabla L\cdot\nabla)\mathbf{e}_{m-1} + 2(\mathbf{e}_{m-1}\cdot\nabla \ln n)\nabla L + \mathbf{e}_{m-1}\nabla^2 L] -$$

$$[\nabla^2\mathbf{e}_{m-2} + 2\nabla(\mathbf{e}_{m-2}\cdot\nabla\ln n)] = 0$$

...

Perché la prima di queste equazioni possa essere verificata con $\mathbf{e}_0 \neq 0$ deve aversi:

$$|\nabla L| = n \qquad (\textit{equazione dell'iconale}) \tag{1.4}$$

Pertanto in tutte le altre equazioni il primo termine è nullo ed esse assumono la forma:

$$2(\nabla L\cdot\nabla)\mathbf{e}_0 + 2(\mathbf{e}_0\cdot\nabla\ln n)\nabla L + \mathbf{e}_0\nabla^2 L = 0 \tag{1.5a}$$

$$2(\nabla L\cdot\nabla)\mathbf{e}_m + 2(\mathbf{e}_m\cdot\nabla\ln n)\nabla L + \mathbf{e}_m\nabla^2 L =$$
$$= -j[\nabla^2\mathbf{e}_{m-1} + 2\nabla(\mathbf{e}_{m-1}\cdot\nabla\ln n)] \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.5b}$$

Queste relazioni prendono il nome di "equazioni del trasporto".

Le relazioni che intercorrono fra i vettori $\mathbf{h}_0$, $\mathbf{h}_1$, ... e i vettori $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ... risultano dalle equazioni che si ottengono sostituendo le (1.2) nelle (1.3a, b) e uguagliando i coefficienti delle potenze di ugual grado in k_0^{-1}. Si vede immediatamente che tali equazioni sono le seguenti:

$$\mathbf{h}_0 \times \nabla L - \frac{n^2}{\eta_0}\mathbf{e}_0 = 0 \tag{1.6a}$$

$$\mathbf{e}_0 \times \nabla L + \eta_0\,\mathbf{h}_0 = 0 \tag{1.6b}$$

$$\mathbf{h}_m \times \nabla L - \frac{n^2}{\eta_0}\mathbf{e}_m = j\nabla\times\mathbf{h}_{m-1} \tag{1.7a}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{e}_m \times \nabla L + \eta_0\,\mathbf{h}_m = j\nabla\times\mathbf{e}_{m-1} \tag{1.7b}$$

In particolare le (1.6b) e (1.7b) permettono di determinare $\mathbf{h}_0$, $\mathbf{h}_1$, ... se sono già noti $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ...

L'APPROSSIMAZIONE DELL'OTTICA GEOMETRICA In linea di principio le equazioni (1.4), (1.5), (1.6) e (1.7) permettono di determinare l'iconale e i vettori $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, ma il procedimento che per stadi successivi porta alla determinazione di $\mathbf{e}_m$, $\mathbf{h}_m$ ($m \geq 1$) è chiaramente molto laborioso.

Nell'approssimazione dell'Ottica Geometrica, il procedimento viene semplificato drasticamente supponendo che il valore di k_0 *sia tanto elevato da permettere di ignorare nelle (1.2) tutti i termini, tranne* $\mathbf{e}_0$ *e* $\mathbf{h}_0$. Dunque nell'OG si assume che le onde abbiano la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_0\, e^{-jk_0 L} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{h}_0\, e^{-jk_0 L} \tag{1.8}$$

dove L, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{h}_0$ soddisfano le (1.4), (1.5*a*) e (1.6).

ANALOGIA FRA LE ONDE DELL'OG E LE ONDE PIANE UNIFORMI Nelle onde (1.8) le superfici equifase coincidono con le superfici a iconale costante (Figura 1.1) e la propagazione avviene nella direzione del versore **u**, normale alle superfici L = cost. e orientato nel verso crescente di L. Poiché per l'equazione dell'iconale si ha:

$$\nabla L = |\nabla L|\, \mathbf{u} = n\mathbf{u} \tag{1.9}$$

il vettore di propagazione è

$$\boldsymbol{\beta} = k_0 \nabla L = \frac{n\omega}{c}\mathbf{u} \tag{1.10}$$

e quindi la velocità di fase è

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{n}$$

proprio come nelle onde piane uniformi. Inoltre sostituendo la (1.9) nelle (1.6) si trova immediatamente

$$\mathbf{E} = \eta\, \mathbf{H} \times \mathbf{u} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{\eta} \tag{1.11}$$

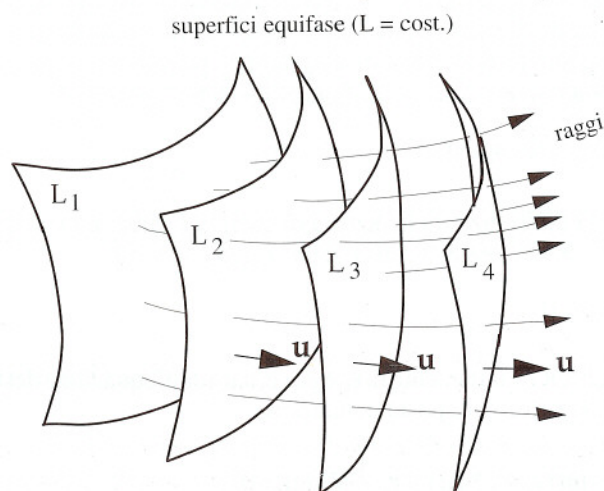



Figura 1.1

cioè la stessa relazione che vale nelle onde piane uniformi. Anche le onde (1.8) sono di tipo TEM, perché le (1.11) indicano che sia **E** che **H** sono ortogonali a **u**.

POTENZA ED ENERGIA, RAGGI Come nelle onde piane uniformi la densità di potenza è data da

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = \begin{cases} \dfrac{|\mathbf{e}_0|^2}{2\eta}\mathbf{u} & (1.12a) \\ \eta\dfrac{|\mathbf{h}_0|^2}{2}\mathbf{u} & (1.12b) \end{cases}$$

Pertanto, nell'approssimazione dell'OG, le onde trasportano l'energia nella stessa direzione (**u**) in cui si propagano. Le linee di flusso della densità di potenza, dette "raggi", hanno un ruolo fondamentale nell'OG. Secondo le (1.12) i raggi sono perpendicolari alle superfici ad iconale costante (vedi Figura 1.1).

Nell'approssimazione dell'OG le densità di energia elettrica e magnetica sono uguali. Infatti

$$U_e = \varepsilon_0 n^2 \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} \qquad U_m = \mu_0 \frac{|\mathbf{H}|^2}{2}$$

e, a causa delle (1.11), risulta:

$$U_e = \varepsilon_0 n^2 \eta^2 \frac{|\mathbf{H}|^2}{2} = \varepsilon_0 \eta_0^2 \frac{|\mathbf{H}|^2}{2} = \mu_0 \frac{|\mathbf{H}|^2}{2} = U_m$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA L'approssimazione dell'OG sarebbe inaccettabile se essa portasse a risultati contrastanti con il principio di conservazione dell'energia. Per i campi monocromatici in zone prive di sorgenti tale principio è espresso in forma differenziale dalla seguente espressione (vedi Equazione 8.1, Capitolo 1):

$$2j\omega\,(U_m - U_e) + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

Poiché nell'OG la differenza fra le densità di energia è nulla, il principio di conservazione è verificato se $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$, ossia, a causa della (1.12*a*), se risulta:

$$\nabla \cdot (n\,|\mathbf{e}_0|^2 \mathbf{u}) = 0 \tag{1.13}$$

D'altro canto, nell'OG l'andamento di $\mathbf{e}_0$ è governato dall'equazione del trasporto (1.5*a*), che in virtù della (1.9) può essere posta nella forma

$$(n\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_0 + n\mathbf{u}(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla \ln n) + \mathbf{e}_0 \frac{1}{2} \nabla \cdot n\mathbf{u} = 0 \tag{1.14}$$

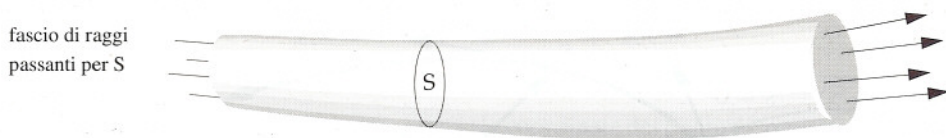



Figura 1.2

Le successive considerazioni mostrano che, in effetti, l'equazione del trasporto implica la (1.13). Dunque l'OG è in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

■ Moltiplicando scalarmente la (1.14) per $\mathbf{e}_0^*$ e osservando che $\mathbf{e}_0^* \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{u})^* = 0$, risulta:

$$\mathbf{e}_0^* \cdot (\mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_0 + |\mathbf{e}_0|^2 \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathrm{n}\mathbf{u} = 0$$

Considerando l'equazione ottenuta prendendo i coniugati e sommandola alla precedente si ottiene:

$$\mathbf{e}_0^* \cdot (\mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_0 \cdot (\mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_0^* + |\mathbf{e}_0|^2 \nabla \cdot \mathrm{n}\mathbf{u} = 0$$

D'altro canto, per la regola di differenziazione dei prodotti si ha

$$\mathbf{e}_0^* \cdot (\mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_0 \cdot (\mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{e}_0^* = (\mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{e}_0^* \cdot \mathbf{e}_0) = \mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{e}_0|^2$$

Si ha quindi:

$$\mathrm{n}\mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{e}_0|^2 + |\mathbf{e}_0|^2 \nabla \cdot \mathrm{n}\mathbf{u} = 0$$

Questa equazione corrisponde alla (1.13) a causa dell'identità (A.26). ■

FASCI DI RAGGI Si dice "fascio" l'insieme dei raggi che attraversa una stessa superficie S (Figura 1.2). Un sistema di curve che riempie una regione dello spazio, in modo tale che in generale ogni punto sia attraversato da una sola curva, viene detto "congruenza". Se esiste una famiglia di superfici che tagliano le curve ortogonalmente la congruenza viene detta "normale". *I fasci sono congruenze normali*, perché i raggi sono tagliati ortogonalmente dalle superfici equifase (L = cost.).

Poiché i fasci sono tubi di flusso del vettore **S**, grazie al principio di conservazione dell'energia si può affermare che *la potenza che fluisce in un fascio è uguale in tutte le sezioni trasversali*.

9.2 Tracciamento dei raggi

Si voglia studiare la propagazione di un'onda trattabile mediante l'OG, quando siano note l'ampiezza e la polarizzazione del campo (ad esempio di quello elettrico) su una certa superficie equifase S_0 (Figura 2.1), e quando sia assegnato il verso di propagazione. Per ipotesi, il campo è tangente a S_0 ed è lentamente variabile perché, se così non fosse, l'onda

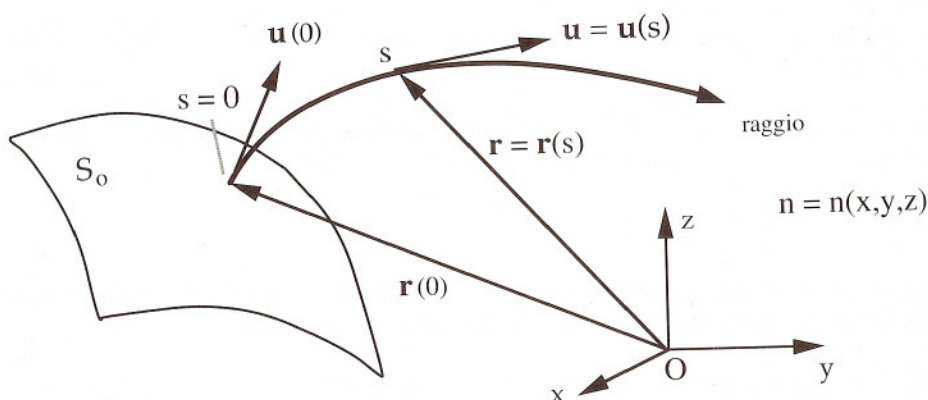



Figura 2.1

non potrebbe essere trattata con l'OG.[1] Ciò che si richiede è la determinazione della fase, dell'ampiezza e della polarizzazione del campo al di là di S_0. Nel Paragrafo 4 si vedrà che il problema può essere risolto facilmente se è nota la geometria dei raggi uscenti da S_0. Pertanto il tracciamento preliminare dei raggi ha importanza fondamentale.

Su di un generico raggio (vedi Figura 2.1) si consideri un'ascissa s, presa a partire da S_0 nel verso di propagazione e sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ la posizione del raggio all'ascissa s. Il versore $\mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$ è tangente al raggio e quindi è dato evidentemente da

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{2.1}$$

Utilizzando questa espressione assieme all'equazione dell'iconale si trova la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \nabla n \qquad \textit{(equazione dei raggi)} \tag{2.2}$$

■ Infatti: $\nabla n = \frac{1}{2n}\nabla n^2 = \frac{1}{2n}\nabla|\nabla L|^2 = \frac{1}{2n}\nabla(\nabla L \cdot \nabla L) =$

$$= \frac{1}{n}(\nabla L \cdot \nabla)\nabla L = (\mathbf{u} \cdot \nabla)n\mathbf{u} = \frac{d}{ds}(n\mathbf{u}) = \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)$$ ■

La (2.2) permette di determinare il raggio una volta che sia assegnato il suo punto di partenza $\mathbf{r}(0)$ e la sua direzione iniziale

1 Questo implica che i raggi di curvatura della superficie S_0 sono molto maggiori della lunghezza d'onda; infatti, in caso contrario, la direzione del campo varierebbe troppo velocemente.

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)_0 = \mathbf{u}(0)$$

Infatti, indicando con $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ le coordinate del punto $\mathbf{r}$ e proiettando la (2.2) sugli assi, si ottiene il sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d}{ds}\left(n(x,y,z)\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n(x,y,z)}{\partial x} \tag{2.3a}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n(x,y,z)\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n(x,y,z)}{\partial y} \tag{2.3b}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n(x,y,z)\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n(x,y,z)}{\partial z} \tag{2.3c}$$

La soluzione di questo sistema è univocamente determinata essendo note le condizioni iniziali

$$x(0),\ y(0),\ z(0),\left(\frac{dx}{ds}\right)_0,\left(\frac{dy}{ds}\right)_0,\left(\frac{dz}{ds}\right)_0$$

Nel caso di un mezzo con indice di rifrazione che varia con legge arbitraria la soluzione del sistema deve normalmente essere trovata per via numerica.[1] Soluzioni analitiche sono possibili solo quando n varia con certe leggi particolari, come quelle considerate nel paragrafo successivo. Nel caso in cui l'indice di rifrazione è costante (mezzo omogeneo) la soluzione è invece semplicissima. Infatti, in questo caso, le (2.3) si riducono alle seguenti equazioni

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = 0 \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

da cui, integrando due volte, risulta immediatamente:

$$x = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 s + x(0) \qquad y = \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 s + y(0) \qquad z = \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 s + z(0)$$

ovvero:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}(0)\, s + \mathbf{r}(0)$$

1 Sono disponibili algoritmi molto efficienti per la soluzione numerica dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, ad esempio l'algoritmo di Runge-Kutta, e l'algoritmo "Predictor-Corrector".

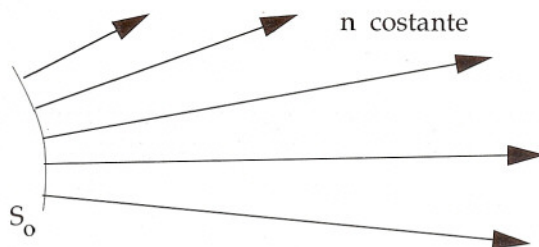



Figura 2.2

Questa equazione rappresenta una retta passante per $\mathbf{r}(0)$ e diretta come $\mathbf{u}(0)$, cioè in direzione normale alla superficie S_0; dunque *in un mezzo omogeneo i raggi sono rettilinei* (Figura 2.2).

I raggi si incurvano se l'indice di rifrazione è variabile. Come è noto dalla Geometria si ha:

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = -\chi\,\mathbf{u}_n$$

dove $\mathbf{u}_n$ è il versore normale al raggio e χ è la curvatura (Figura 2.3).
Trasformando la derivata di $\mathbf{u}$ mediante i passaggi riportati in fondo al paragrafo, si ottiene:

$$-\chi\,\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \times (\nabla \ln n \times \mathbf{u}) \qquad (2.4)$$

Il vettore al secondo membro è la proiezione di $\nabla \ln n$ sul piano normale al raggio. La sua direzione, fra quelle normali al raggio, è quella in cui si ha la massima variazione dell'indice di rifrazione. Il verso è quello in cui n cresce. Pertanto si può affermare che *in un mezzo ad indice di rifrazione variabile i raggi si incurvano verso le zone a più alto indice di rifrazione.* A titolo di esempio, la Figura 2.4 rappresenta l'andamento qualitativo dei raggi emergenti da una superficie equifase sferica in un mezzo in cui l'indice di rifrazione ha l'andamento trapezoidale indicato. I raggi si incurvano solo nelle zone in cui l'indice di rifrazione varia. È interessante osservare che, a causa di questo effetto una parte dei raggi rimane intrappolata nella zona a più alto indice di rifrazione.

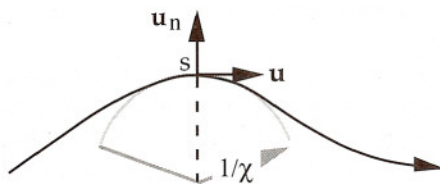



Figura 2.3

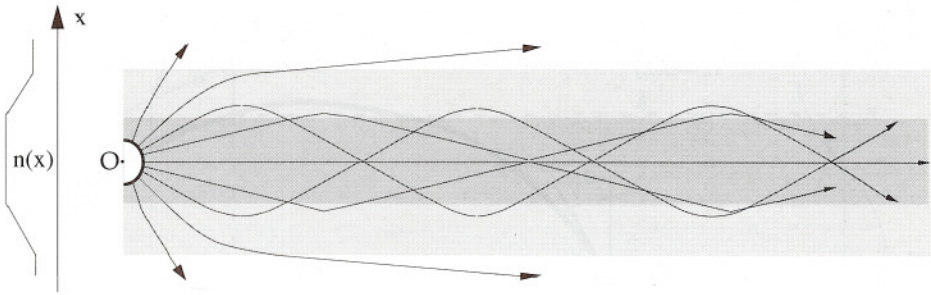



Figura 2.4

Nel caso considerato nella Figura 2.4, S_0 può essere un fronte d'onda sferico collocato nella zona di radiazione di una sorgente posta in O (nella zona di radiazione il campo soddisfa tutte le condizioni richieste per applicare l'OG). Se il mezzo mantenesse ovunque l'indice di rifrazione uguale a quello che si ha nella zona centrale, i raggi sarebbero rettilinei, come del resto risulta da quanto si è visto nello studio della radiazione in un mezzo omogeneo (propagazione dell'energia in direzione radiale). L'OG permette di seguire la propagazione anche nella zona ad indice di rifrazione variabile, dove la teoria del Capitolo 7 non è più applicabile.

■ DEDUZIONE DELLA (2.4) Si ha:

$$-\chi \mathbf{u}_n = \frac{d\mathbf{u}}{ds} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{u}\times\nabla\times\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla(1) - \mathbf{u}\times\nabla\times\mathbf{u} = -\mathbf{u}\times\nabla\times\mathbf{u}$$

dove è stata usata l'identità (A.25). Si prosegue utilizzando la relazione $\mathbf{u} = (\nabla L)/n$:

$$-\chi \mathbf{u}_n = -\mathbf{u}\times\nabla\times\left(\frac{1}{n}\nabla L\right) = \mathbf{u}\times[\nabla L\times\nabla(1/\mathbf{n})] =$$

$$= \mathbf{u}\times\left[\frac{1}{n}\nabla L\times(-\nabla \ln n)\right] = \mathbf{u}\times[\mathbf{u}\times(-\nabla \ln n)] = \mathbf{u}\times(\nabla \ln n\times\mathbf{u})$$ ■

9.3 Raggi in un mezzo stratificato

In questo paragrafo si considera un mezzo in cui l'indice di rifrazione varia secondo una sola direzione (asse z, vedi Figura 3.1). Un mezzo di questo genere viene detto "a stratificazione piana". In un mezzo siffatto è possibile risolvere analiticamente (almeno in maniera formale) l'equazione dei raggi. Per ragioni di simmetria i raggi giacciono su piani paralleli all'asse z. È quindi lecito assumere che il piano su cui giace il raggio che si desidera studiare sia il piano xz.

Poiché $\partial n/\partial x = 0$ dalla (2.3*a*) risulta:

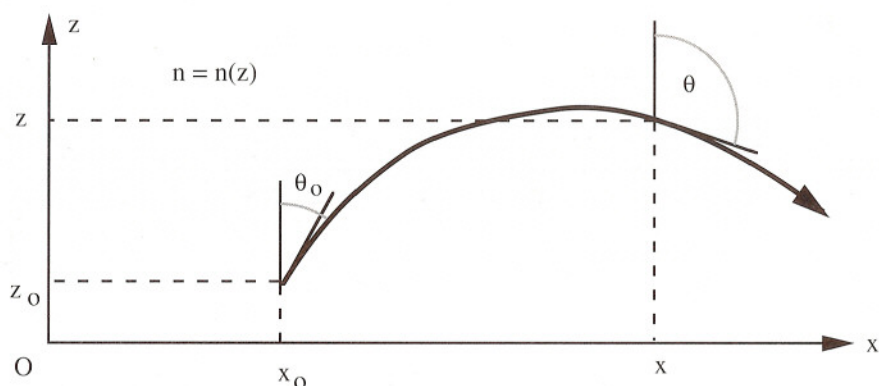



Figura 3.1

$$\frac{d}{ds} n \frac{dx}{ds} = 0$$

ovvero:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{C}{n} \qquad (C = \textit{costante d'integrazione})$$

Indicando con θ l'angolo che il raggio forma con l'asse z, si ha $\sin\theta = dx/ds$, così che l'espressione precedente diviene:

$$n \sin \theta = C \tag{3.1}$$

Pertanto, se è noto che il raggio passa con inclinazione θ_0 per il punto (x_0, z_0), la costante d'integrazione è

$$C = n_0 \sin \theta_0 \tag{3.2}$$

dove $n_0 = n(z_0)$. Quindi risulta:

$$n \sin \theta = n_0 \sin \theta_0 \qquad (\textit{legge di Snell generalizzata}) \tag{3.3}$$

In base alla (3.1) si può affermare che le regioni in cui $n < C$ sono inaccessibili al raggio, poiché $\sin\theta$ non può superare 1. Così, nel caso indicato nella Figura 3.2*a* nessuna regione è inaccessibile, nel caso di Figura 3.2*b* è inaccessibile la regione al disopra di z', mentre nel caso di Figura 3.2*c* sono inaccessibili le regioni esterne all'intervallo (z', z''). Quando il raggio raggiunge il limite di una regione inaccessibile risulta

$$n = C \qquad \sin\theta = 1 \qquad \theta = \pi/2$$

30°
x o
x
z
z o
n o
n (z)
C
(n o sin 30°)
a
45°
x o
x'
x
z
z'
z o
n o
n (z)
C
(n o sin45°)
b
60°
x o
x'
x"
x
z
z'
z o
z"
n o
n (z)
C
(n o sin 60°)
c

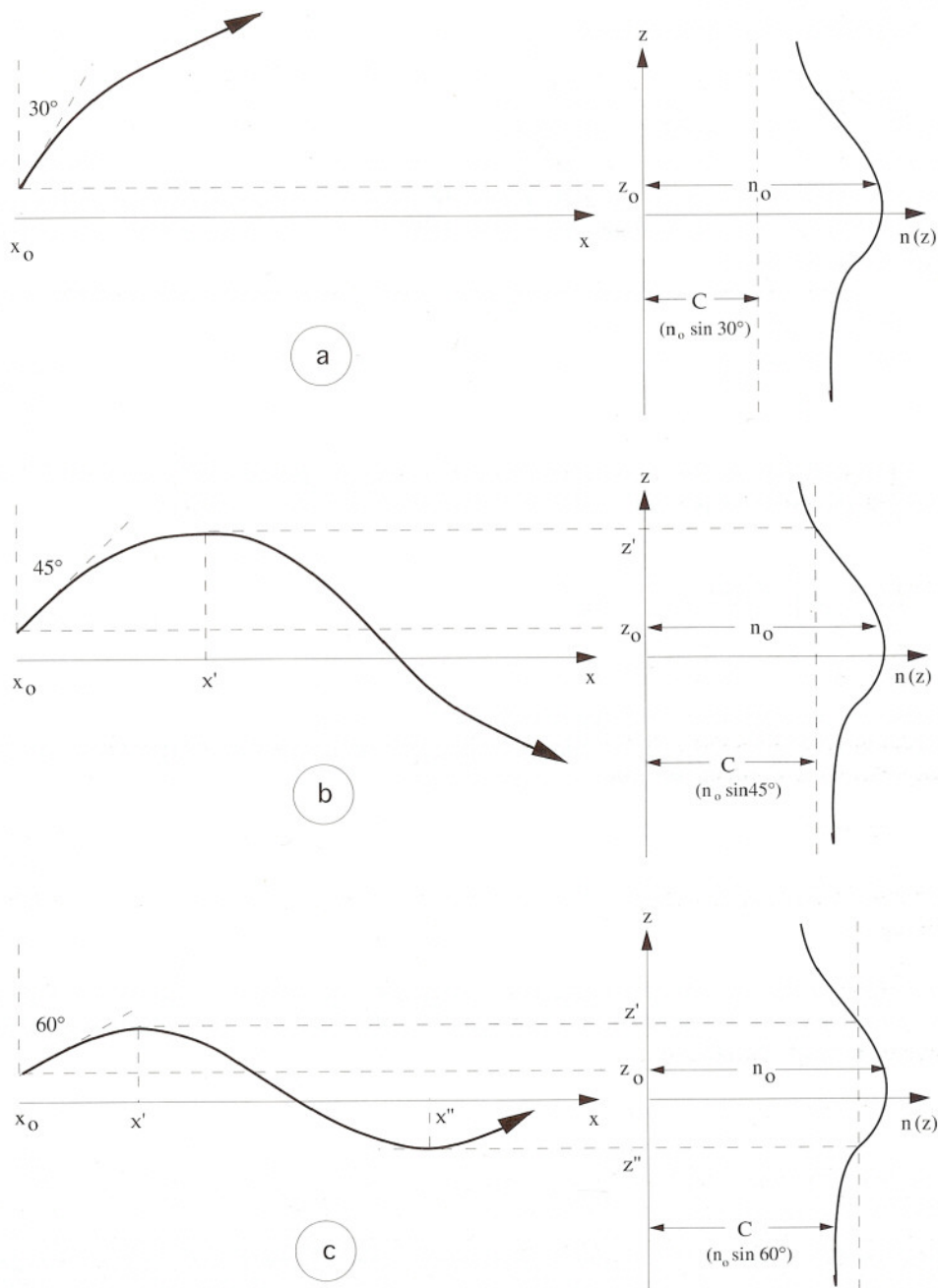



Figura 3.2

In queste posizioni il raggio diviene orizzontale e la sua pendenza cambia segno, come mostrato nella Figura 3.2*b*, *c*.

La pendenza del raggio è data da

$$\frac{dx}{dz} = \text{tg}\theta = \frac{\pm\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\sin^{-2}\theta - 1}}$$

dove il segno positivo vale nei tratti ascendenti ($0 < \theta < \pi/2$), quello negativo nei tratti discendenti ($\pi/2 < \theta < \pi$). Pertanto, ricavando $\sin\theta$ dalla (3.1) e sostituendo nella precedente espressione si ottiene:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{n^2(z)}{C^2} - 1}} \tag{3.5}$$

Nel caso di Figura 3.2*a*, in cui la pendenza rimane sempre positiva, l'equazione (3.5) vale, con il segno positivo, per tutti i valori di z. Pertanto integrando si ottiene

$$x = x_0 + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{n^2(\zeta)}{C^2} - 1 \right)^{-1/2} d\zeta \tag{3.6}$$

Questa espressione descrive il raggio nella forma $x = x(z)$.

Nei casi di Figura 3.2*b*, *c* la (3.6) descrive il raggio fino al punto in cui la pendenza cambia, cioè fino a $z = z'$. In questo punto x assume il valore:

$$x' = x_0 + \int_{z_0}^{z'} \left(\frac{n^2(\zeta)}{C^2} - 1 \right)^{-1/2} d\zeta \tag{3.7}$$

In entrambi i casi, per ottenere l'equazione del raggio alla destra di x' si considera il punto (x', z') come punto di partenza e si integra la (3.5) prendendo il segno negativo, perché il raggio discende. Si ottiene

$$x = x' + \int_{z}^{z'} \left(\frac{n^2(\zeta)}{C^2} - 1 \right)^{-1/2} d\zeta \tag{3.8}$$

dove il segno negativo è stato eliminato invertendo i limiti d'integrazione. Nel caso di Figura 3.2*b* questa formula vale per qualunque valore di x maggiore di x' perché il raggio continua a scendere indefinitamente. Pertanto in questo caso essa descrive l'intero raggio alla destra di x'. Invece, nell'esempio di Figura 3.2*c*, essa vale fino a quando z raggiunge z''. Ciò avviene nel punto di ascissa:

$$x'' = x' + \int_{z''}^{z'} \left(\frac{n^2(\zeta)}{C^2} - 1 \right)^{-1/2} d\zeta \tag{3.9}$$

Superato x" il raggio riprende a salire, con andamento simmetrico rispetto al ramo discendente. Il raggio rimane intrappolato e oscilla periodicamente nella fascia compresa fra z' e z", con periodo pari a 2(x" – x').

9.4 Variazioni di fase, d'ampiezza e di polarizzazione lungo i raggi

Tracciati i raggi si pone il problema di determinare l'ampiezza, la polarizzazione e la fase dei campi

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_0 e^{-jk_0 L} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{\eta_0 / n}$$

Conviene introdurre il vettore di polarizzazione

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_0 / |\mathbf{e}_0|$$

e la cosiddetta "ampiezza d'onda", definita dalla radice del modulo della densità di potenza:

$$a = \sqrt{S} = \sqrt{\frac{n}{2\eta_0}}\, |\mathbf{e}_0| = \sqrt{\frac{\eta_0}{2n}}\, |\mathbf{h}_0| \qquad [W^{1/2}/m]$$

Così i campi sono espressi come segue:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} \sqrt{\frac{2\eta_0}{n}}\, a\, e^{-jk_0 L} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{p} \sqrt{\frac{2n}{\eta_0}}\, a\, e^{-jk_0 L} \tag{4.1}$$

La densità di potenza è data semplicemente da

$$\mathbf{S} = a^2\, \mathbf{u} \tag{4.2}$$

L'iconale, l'ampiezza d'onda e la polarizzazione sono assegnate sulla superficie equifase S_0. Per determinarne i valori al di là di S_0 basta conoscere le leggi con cui esse variano lungo i raggi; infatti, note queste leggi, l'iconale, l'ampiezza d'onda e il vettore di polarizzazione in un generico punto A' (Figura 4.1) possono essere dedotti dai valori nel punto A da cui parte il raggio passante per A'.

DETERMINAZIONE DELL'ICONALE Detta s l'ascissa del punto A', presa sul raggio a partire da A, si ha evidentemente:

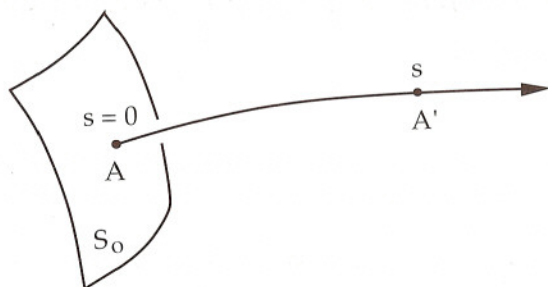



Figura 4.1

$$L_{A'} - L_A = \int_0^s \frac{dL}{d\xi} d\xi = \int_0^s \mathbf{u} \cdot \nabla L \, d\xi$$

dove L_A e $L_{A'}$ sono i valori dell'iconale nei punti considerati e ξ indica un generico valore dell'ascissa, nell'intervallo (0,s). Utilizzando la (1.9) si trova

$$L_{A'} = L_A + \int_0^s n(\xi) \, d\xi \tag{4.3}$$

L'integrale dell'indice di rifrazione lungo un raggio viene detto "cammino ottico". Pertanto *il valore dell'iconale nel punto A' viene ottenuto sommando al valore dell'iconale nel punto A il cammino ottico fra A e A'.*

Il calcolo è semplicissimo nel caso di un mezzo a indice di rifrazione costante, dove i raggi sono rettilinei. Infatti in questo caso la (4.3) si riduce all'espressione:

$$L_{A'} = L_A + n\overline{AA'} \tag{4.4}$$

DETERMINAZIONE DELL'AMPIEZZA D'ONDA Si consideri un fascio di sezione infinitesima preso intorno al raggio passante per A' (Figura 4.2) e siano $d\Omega$ e $d\Omega'$ le sezioni trasversali del fascio in corrispondenza di A e di A'.

Figura 4.2

Poiché la potenza che attraversa $d\Omega'$ è uguale a quella che attraversa $d\Omega$ si ha

$$(\mathbf{S}\cdot\mathbf{u})_A\, d\Omega = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{u})_{A'}\, d\Omega'$$

ovvero, per la (4.2):

$$a_A^2\, d\Omega = a_{A'}^2\, d\Omega'$$

dove a_A e $a_{A'}$ sono le ampiezze nei punti considerati. Si ha quindi:

$$a_{A'} = \sqrt{D_{A'A}}\, a_A \tag{4.5}$$

dove

$$D_{A'A} = \frac{d\Omega}{d\Omega'} \qquad \textit{(fattore di divergenza)} \tag{4.6}$$

Il fattore di divergenza dipende dall'andamento dei raggi in prossimità di quello considerato. L'ampiezza cresce se il fascio si restringe, decresce se il fascio si allarga.

Le successive considerazioni mostrano che in un mezzo ad indice di rifrazione costante il fattore di divergenza dipende solo dalla posizione dei centri di curvatura di S_0 nel punto A.[1] Si consideri un fascio divergente come quello indicato nella Figura 4.3*a*; esso è costituito da raggi prossimi al raggio AA' per il quale si vuole determinare il fattore di divergenza. L'elemento $d\Omega$ da cui emerge il fascio è un rettangolo infinitesimo i cui lati AB e AD sono elementi delle linee principali di S_0 passanti per il punto A. A meno di infinitesimi di ordine superiore, tali elementi, possono essere considerati come archi di circonferenza con centri nei punti O_1 e O_2 (centri di curvatura di S_0).[2] Le distanze

$$R_1 = \overline{O_1A} \qquad R_2 = \overline{O_2A}$$

sono i raggi di curvatura della superficie S_0 nel punto A. I punti A', B', C', D' appartengono ad una superficie equifase posta a distanza s da quella di riferimento, e gli archi A'B' e A'D' sono elementi delle linee di massima e minima curvatura di tale superficie. I loro centri coincidono con O_1 e O_2, così che i raggi di curvatura della superficie equifase passante per A' sono dati da $\overline{O_1A'} = R_1 + s$ e $\overline{O_2A'} = R_2 + s$. Si ha evidentemente:

1 Fra le linee che possono essere tracciate su una superficie curva esistono generalmente due sottoinsiemi caratterizzati dall'avere in ogni punto la massima o la minima curvatura. Le linee dotate di questa particolarità vengono dette "linee principali". Le linee principali si incrociano perpendicolarmente. I loro raggi di curvatura sono detti "raggi di curvatura della superficie"; analogamente i loro centri di curvatura sono detti "centri di curvatura della superficie". I due centri di curvatura giacciono sulla retta normale alla superficie e sono generalmente distinti.

2 Nella Figura 4.3 O_1 e O_2 sono distinti (fascio "astigmatico"), ma potrebbero coincidere (fascio "omocentrico").

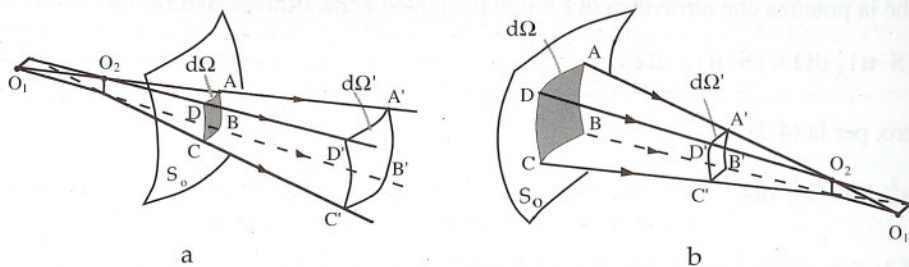



Figura 4.3

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1A'}} = \frac{R_1}{R_1 + s} \qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{O_2A}}{\overline{O_2A'}} = \frac{R_2}{R_2 + s}$$

Poiché $d\Omega = \overline{AB}\,\overline{AD}$ e $d\Omega' = \overline{A'B'}\,\overline{A'D'}$ risulta:

$$D_{A'A} = \frac{R_1 R_2}{(s + R_1)(s + R_2)}$$

Nel caso del fascio convergente indicato nella Figura 4.3*b* i centri di curvatura sono posizionati davanti alla superficie S_0, contrariamente a quanto avveniva nel caso precedente. Ripetendo i precedenti passaggi si trova:

$$D_{A'A} = \frac{R_1 R_2}{|s - R_1||s - R_2|}$$

Una formula analoga alle precedenti può essere determinata quando i centri di curvatura stanno da parti opposte rispetto a S_0 (ciò avviene quando S_0 è conformata a "sella").

È possibile esprimere il fattore di divergenza mediante una formula generale introducendo le ascisse di O_1 e di O_2, date da $s_1 = \pm R_1$, $s_2 = \pm R_2$, secondo che i centri di curvatura siano posizionati avanti o dietro la superficie di riferimento. Si ha la seguente espressione, valida sia per fasci convergenti che divergenti:

$$D_{A'A} = \frac{|s_1 s_2|}{|s - s_1||s - s_2|} \tag{4.7}$$

In definitiva, in un mezzo omogeneo, la relazione fra le ampiezze d'onda nei punti A e A' è la seguente:

$$a_{A'} = \sqrt{\frac{|s_1 s_2|}{|s - s_1||s - s_2|}}\, a_A \tag{4.8}$$

È interessante osservare che, nei fasci convergenti, $D_{A'A}$ diverge quando la sezione $d\Omega'$ si annulla. Questo accade ad esempio nei punti O_1 e O_2 di Figura 4.2*b*. In questi punti il campo dovrebbe raggiungere un'intensità infinita, cosa che è palesemente in contrasto con le ipotesi di lenta variabilità di $\mathbf{e}_0$ e $\mathbf{h}_0$. Pertanto, in prossimità di questi punti i risultati dell'OG sono certamente errati.

Nel caso generale, considerando anche la possibilità che l'indice di rifrazione sia variabile, l'espressione che collega le ampiezze nei punti A e A' è la seguente:

$$a_{A'} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^s \nabla\cdot\mathbf{u}\,d\xi}\, a_A \tag{4.9}$$

Questo risulta dalla seguente dimostrazione.

■ Partendo dalla relazione $\nabla \cdot \mathbf{S} = \nabla \cdot (a^2\,\mathbf{u}) = 0$ si ottiene:

$$a^2\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla a^2 = a^2\nabla\cdot\mathbf{u} + 2a\mathbf{u}\cdot\nabla a =$$

$$= 2a^2\left(\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\frac{1}{a}\nabla a\right) = 2a^2\left(\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\ln a\right) = 0$$

Ad una generica ascissa ξ presa sul raggio si ha $\mathbf{u}\cdot\nabla\ln a = \partial(\ln a)/\partial\xi$. Pertanto:

$$\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{u} + \frac{\partial\ln a}{\partial\xi} = 0$$

Integrando fra 0 ed s si ottiene la seguente espressione da cui si deduce immediatamente la (4.9):

$$\frac{1}{2}\int_0^s \nabla\cdot\mathbf{u}\,d\xi + \ln\frac{a_{A'}}{a_A} = 0$$ ■

DETERMINAZIONE DELLA POLARIZZAZIONE Lo studio dell'andamento del vettore di polarizzazione lungo un raggio deve essere basato sull'equazione del trasporto (1.14). Esso è semplice nel caso di un mezzo omogeneo (vedi dimostrazione in fondo al paragrafo). Si trova che *in un mezzo omogeneo la polarizzazione non varia quando ci si sposta lungo i raggi* (Figura 4.4*a*).

Lo studio della polarizzazione lungo un raggio che attraversa un mezzo a indice di rifrazione variabile è più complicato. Pertanto ci si limita a fornire il seguente risultato: *se il raggio è una curva piana l'ellisse di polarizzazione rimane immutata nel riferimento costituito dalla normale al raggio e dalla normale al piano* (Figura 4.4*b*). Questo è ciò che avviene, ad esempio, in un mezzo a stratificazione piana.

■ DIMOSTRAZIONE Nel caso di un mezzo omogeneo la (1.14) assume la forma:

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_0\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

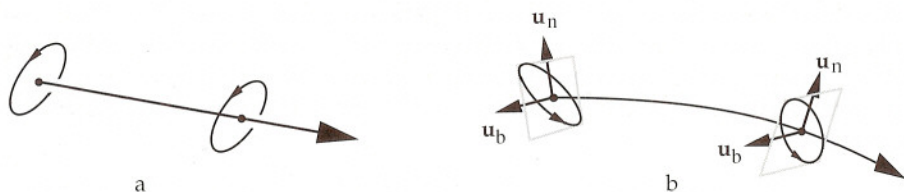



Figura 4.4

Ponendo $\mathbf{e}_0 = \sqrt{2\eta_0/n}\ \mathrm{a}\,\mathbf{p}$ e osservando che ad una generica ascissa ξ si ha

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = \partial/\partial\xi$$

risulta:

$$\frac{\partial \mathrm{a}\,\mathbf{p}}{\partial\xi} + \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathrm{a}\,\mathbf{p} = 0$$

La soluzione di quest'equazione è:

$$\mathrm{a}_{A'}\,\mathbf{p}_{A'} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^s \nabla\cdot\mathbf{u}\,d\xi}\quad \mathrm{a}_A\,\mathbf{p}_{A'} = \mathrm{a}_{A'}\,\mathbf{p}_A$$

(nell'ultimo passaggio si è usata la (4.9)). Pertanto risulta $\mathbf{p}_{A'} = \mathbf{p}_A$. ■

9.5 Riflessione e rifrazione dei raggi

L'OG può anche essere utilizzata per studiare la riflessione e la trasmissione di un'onda sulla superficie di un corpo dielettrico (o anche la riflessione su di un corpo conduttore). Perché questo sia possibile è necessario che i raggi di curvatura della superficie riflettente siano molto più grandi della lunghezza d'onda, in modo da poter assimilare localmente la superficie a un piano. Appare lecito assumere che - localmente - l'onda incidente si rifletta e si trasmetta con le stesse modalità delle onde piane uniformi (Figura 5.1*a*). In base a questa ipotesi, a ogni raggio dell'onda incidente viene fatto corrispondere un raggio riflesso e un raggio trasmesso, applicando localmente la legge della riflessione e la legge di Snell. Così a un fascio di raggi incidenti viene fatto corrispondere un fascio di raggi riflessi e un fascio di raggi trasmessi (Figura 5.1*b*). Perché il procedimento abbia senso è necessario che i fasci così ottenuti possano essere associati a onde e che, quindi, essi costituiscano congruenze normali (vedi Paragrafo 1). Si può mostrare che i fasci riflesso e trasmesso godono effettivamente di questa proprietà (teorema di Malus-Dupin).

È opportuno sottolineare che l'OG non permette di determinare l'onda trasmessa dentro un conduttore (perché essa non vale nei mezzi dissipativi) o quella trasmessa dentro un dielettrico quando l'angolo d'incidenza supera l'angolo limite (perché l'onda

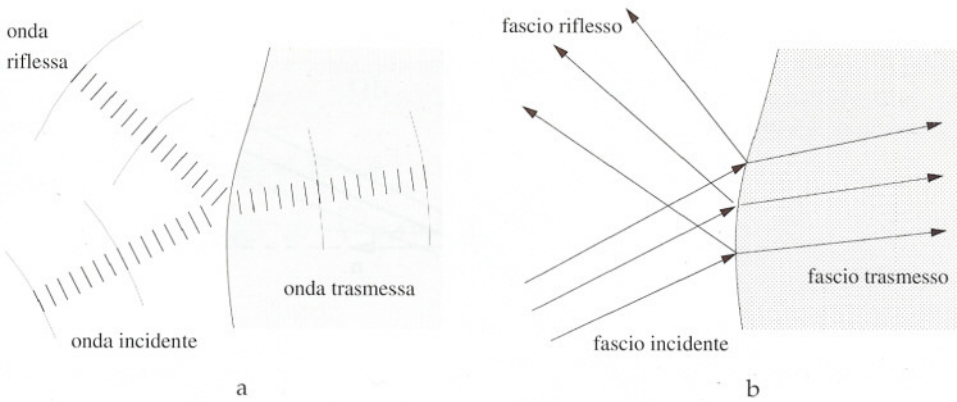



Figura 5.1

di superficie che si ha in questo caso non soddisfa le condizioni di lenta variabilità). Però, anche in questi casi, l'OG permette di studiare l'onda riflessa con buona approssimazione.

Il procedimento per calcolare il campo dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa (quando quest'ultima può esser trattata con l'OG) è molto simile a quello visto nel paragrafo precedente ed è sempre basato sul calcolo delle variazioni del campo lungo i raggi. L'unica differenza consiste nel fatto che ulteriori variazioni d'ampiezza di fase e di polarizzazione debbono essere tenute in conto, per considerare l'effetto della riflessione e della trasmissione. Ad esempio la fase e l'ampiezza d'onda nei punti B e C indicati nella Figura 5.2 sono ottenuti come segue:

$$k_0 L_B = k_0 (L_A + n_1 \overline{AA'} + n_1 \overline{A'B}) + \mathrm{Arg}[\tilde{\Gamma}_{12}] \tag{5.1a}$$

$$a_B = |\tilde{\Gamma}_{12}| \sqrt{D_{BA}}\, a_A \tag{5.1b}$$

$$k_0 L_C = k_0 (L_A + n_1 \overline{AA'} + n_2 \overline{A'C}) + \mathrm{Arg}[\tilde{T}_{12}] \tag{5.2a}$$

$$a_C = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\, |\tilde{T}_{12}| \sqrt{D_{CA}}\, a_A \tag{5.2b}$$

dove $\tilde{\Gamma}_{12}$ e $\tilde{T}_{12}$ sono i coefficienti di riflessione e di trasmissione dati dalle (15.7) e (15.9) del Capitolo 2 e D_{BA} e D_{CA} sono i fattori di divergenza sui percorsi AA'B e AA'C. È evidente che essi sono dati da

$$D_{BA} = \frac{d\Omega_A}{d\Omega_B} \qquad D_{CA} = \frac{d\Omega_A}{d\Omega_C} \tag{5.3}$$

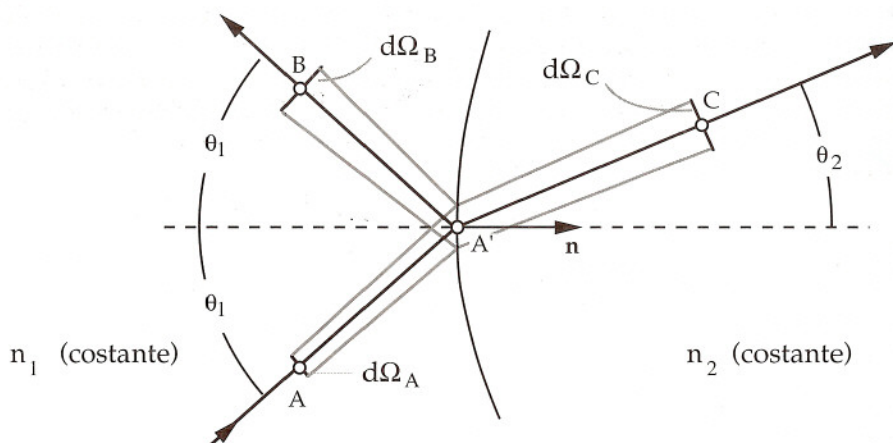



Figura 5.2

dove $d\Omega_A$, $d\Omega_B$ e $d\Omega_C$ sono le superfici infinitesime che delimitano agli estremi i fasci di raggi intorno ai percorsi AA'B e AA'C (vedi figura). Le relazioni (5.1*b*) e (5.2*b*) sono ottenute tenendo conto del fatto che la potenza che entra attraverso $d\Omega_A$ si ripartisce fra $d\Omega_B$ e $d\Omega_C$ secondo i valori dei coefficienti di riflessione e di trasmissione della potenza, che - è bene ricordarlo - sono:

$$|\tilde{\Gamma}_{12}|^2 \quad \text{(coefficiente di riflessione)} \qquad \frac{n_2}{n_1}|\tilde{T}_{12}|^2 \quad \text{(coefficiente di trasmissione)}$$

I valori di $|\tilde{\Gamma}_{12}|$ e di $|\tilde{T}_{12}|$ dipendono dalla polarizzazione dell'onda incidente (vedi Equazioni 15.7 e 15.9, Capitolo 2).

Il vettore di polarizzazione sui raggi riflessi e trasmessi viene ottenuto tenendo conto delle trasformazioni di polarizzazione che si hanno sulla superficie del corpo (vedi Equazioni 15.6 e 15.8 del Capitolo 2). Nel caso considerato in figura, in cui la polarizzazione si mantiene immutata sui percorsi AA', A'B e A'C (n_1 e n_2 sono costanti), i vettori di polarizzazione nei punti A, B, e C differiscono solo per queste trasformazioni.

Nel caso di un corpo perfettamente conduttore l'onda riflessa viene calcolata mediante le (5.1), ponendo

$$|\tilde{\Gamma}_{12}| = 1 \qquad \mathrm{Arg}[\tilde{\Gamma}_{12}] = \pi$$

e trasformando la polarizzazione mediante la (16.4) del Capitolo 2. Così si ha:

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{p}_A - 2\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_A)\,\mathbf{n} \tag{5.4}$$

dove **n** è la normale alla superficie riflettente.

Un caso particolarmente semplice da trattare è quello della riflessione di un fascio omocentrico da parte di una superficie piana (Figura 5.3). In questo caso, infatti, il calcolo del fattore di divergenza è facilitato dal fatto che il fascio riflesso è pure omocentrico, con centro nel punto O', immagine del centro del fascio incidente. Pertanto il fattore di divergenza può essere calcolato sul percorso A'B, come se la sorgente fosse posta in O'.
Utilizzando la (4.7) e con i simboli indicati in figura, si ha:

$$D_{BA} = D_{BA'} = \frac{\overline{O'A'}^2}{(\overline{A'B} + \overline{O'A'})^2} = \frac{d_0^2}{(d_1 + d_2)^2}$$

Pertanto risulta:

$$a_B = |\tilde{\Gamma}_{12}| \frac{d_0}{d_1 + d_2} a_A$$

Assumendo che nel punto A la fase sia

$$k_0 L_A = k_0 n_1 d_0 + \varphi \qquad (\varphi \text{ arbitrario, dipendente dalla sorgente})$$

per la (5.1*a*) risulta:

$$k_0 L_B = k_0 n_1 (d_1 + d_2) + \varphi + \text{Arg}[\tilde{\Gamma}_{12}]$$

Se il fascio omocentrico è prodotto da una sorgente posta in O, e se il punto A giace nella zona di radiazione (così da giustificare l'uso dell'OG) si ha:

$$a_A^2 = \frac{K}{d_0^2} \qquad a_A = \frac{\sqrt{K}}{d_0} \qquad a_B = |\tilde{\Gamma}_{12}| \frac{\sqrt{K}}{d_1 + d_2}$$

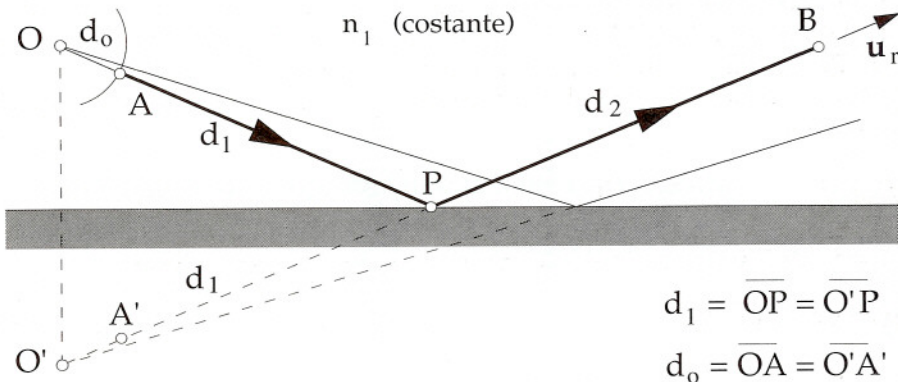



Figura 5.3

dove K è l'intensità di radiazione nella direzione OP (si ricorda che a^2 dà la densità di potenza). Pertanto, sostituendo nelle (4.1) si trova che, nel punto B, il campo riflesso è dato da

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{p}_r \tilde{\Gamma}_{12} \sqrt{\frac{2\eta_0 K}{n_1}} \frac{e^{-j[k_0 n_1 (d_1+d_2)+\varphi]}}{d_1+d_2} \qquad \mathbf{H}_r = \frac{\mathbf{u}_r \times \mathbf{E}_r}{\eta_0/n_1} \tag{5.5}$$

Il lettore può verificare che, nel caso della riflessione su di un conduttore perfetto, il campo così ottenuto è identico a quello prodotto dalla sorgente immagine.

9.6 Cenni sui riflettori parabolici

Un caso di particolare interesse applicativo è quello della riflessione di un fascio omocentrico proveniente dal fuoco di un riflettore parabolico. Per le proprietà del paraboloide i raggi riflessi sono tutti diretti parallelamente al suo asse (Figura 6.1*a*) e quindi - nell'approssimazione dell'OG - l'onda corrispondente è piana. Al contrario, se sul paraboloide incide un'onda piana tutti i raggi riflessi convergono sul fuoco (Figura 6.1*b*).

Come si è detto nel capitolo precedente, l'OG permette di calcolare, seppure in maniera approssimata, l'illuminazione prodotta sull'apertura dalle antenne paraboliche (Figura 6.2). Il campo sull'apertura ha dovunque la stessa fase φ, perché i raggi riflessi sono perpendicolari all'apertura. Pertanto il campo in un generico punto B dell'apertura è del tipo

$$\mathbf{E}_B = \mathbf{p}_B \sqrt{2\eta_0}\, a_B\, e^{j\varphi} \qquad \mathbf{H}_B = \frac{\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_B}{\eta_0} \tag{6.1}$$

Il calcolo di a_B e $\mathbf{p}_B$ richiede la conoscenza del diagramma di radiazione e della polarizzazione del radiatore primario, che si suppongono noti.
Per determinare l'ampiezza d'onda si considera un fascio infinitesimo intorno al percorso FAB. Indicata con dW la potenza che attraversa il fascio, e con $d\Omega_B$ la sua intersezione con il piano dell'apertura, si ha evidentemente:

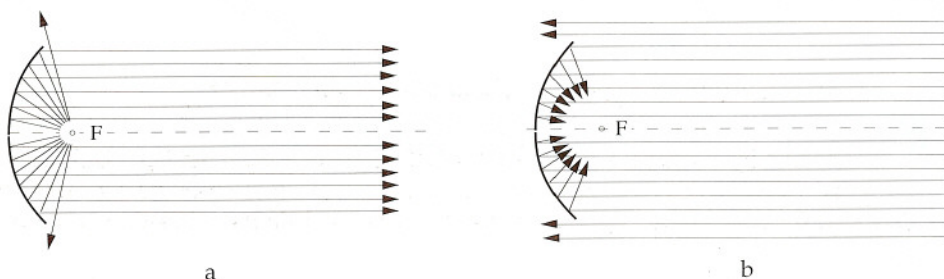



Figura 6.1

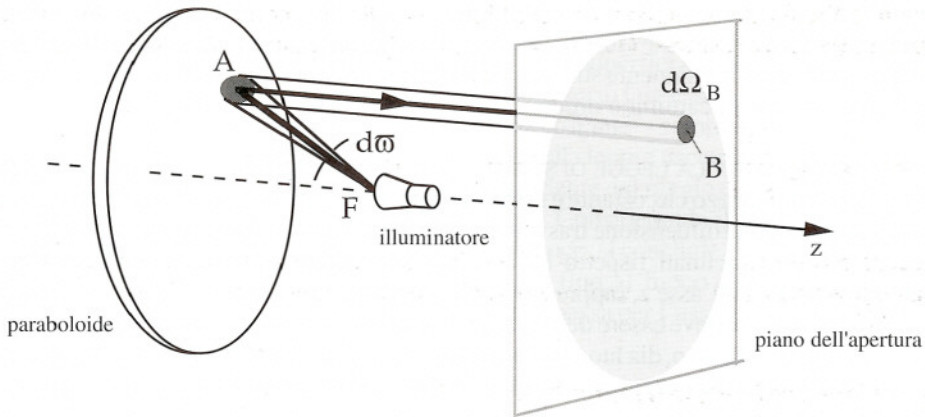



Figura 6.2

$$a_B^2 = \frac{dW}{d\Omega_B}$$

D'altro canto si ha:

$$dW = K\,d\varpi$$

dove K è l'intensità di radiazione dell'illuminatore nella direzione FA e $d\varpi$ è l'angolo solido del fascio incidente. Pertanto l'ampiezza d'onda nel punto B è data da:

$$a_B = \sqrt{K}\sqrt{\frac{d\varpi}{d\Omega_B}} \qquad (6.2)$$

Il vettore di polarizzazione $\mathbf{p}_B$ viene determinato trasformando il vettore $\mathbf{p}_A$ mediante la (5.4). Il calcolo di $d\varpi/d\Omega_B$ e di $\mathbf{p}_B$ è un problema puramente geometrico, sul quale non è opportuno soffermarsi.

9.7 Determinazione del profilo di una lente convergente

Come è noto dalla Fisica elementare, lo studio della rifrazione dei raggi è particolarmente importante per la progettazione delle lenti e per lo studio delle loro proprietà. Non è questa la sede per addentrarsi in questa problematica[1] per cui ci si limita a illustrare, a titolo di

1 Per una trattazione approfondita delle applicazioni dell'OG allo studio dei sistemi ottici si veda il Capitolo 7 del trattato: M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1975.

esempio, due metodi per la determinazione del profilo di una lente piano/convessa (Figura 7.1) che focalizza nel punto F (fuoco) un fascio di raggi paralleli all'asse della lente. Il primo è un metodo basato direttamente sull'uso della legge di Snell; il secondo invece è un metodo basato sul concetto di cammino ottico.

METODO BASATO SULLA LEGGE DI SNELL La lente è costituita da un materiale di indice di rifrazione n e il mezzo circostante è l'aria. Si suppone che la distanza focale f debba essere molto maggiore della dimensione trasversale della lente, così che i raggi che convergono sul fuoco siano poco inclinati rispetto all'asse. La superficie convessa è una superficie di rivoluzione intorno all'asse z, rappresentata in coordinate cilindriche da una certa funzione $z = z(r)$; tale funzione deve essere determinata in modo tale che un generico raggio, parallelo all'asse e distante r da esso, dia luogo ad un raggio rifratto passante per il fuoco. A causa della piccola inclinazione dei raggi rifratti gli angoli θ_1 e θ_2 sono molto piccoli e si può porre $\sin\theta_1 \approx \theta_1$, $\sin\theta_2 \approx \theta_2$. Pertanto, per la legge di Snell si ha:

$$\theta_2 \approx n\theta_1$$

D'altro canto:

$$r/f \approx r/(f - z) = tg(\theta_2 - \theta_1) \approx \theta_2 - \theta_1 \approx (n - 1)\theta_1$$

$$\frac{dz}{dr} = -tg\theta_1 \approx -\theta_1 \approx -\frac{r}{(n-1)f}$$

Integrando si ottiene:

$$z = d - \frac{r^2}{2(n-1)f} \tag{7.1}$$

dove d è lo spessore della lente in corrispondenza dell'asse. Dunque il profilo della lente deve essere parabolico. In pratica, grazie al fatto che i valori di r sono piccoli, il profilo può essere approssimato con una circonferenza di raggio R, pari al raggio di curvatura della parabola nel vertice. Semplici calcoli forniscono il valore di R:

$$R = (n - 1)f \tag{7.2}$$

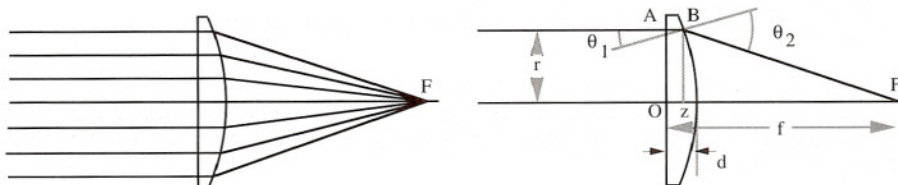



Figura 7.1

METODO DEGLI UGUALI CAMMINI OTTICI Le superfici equifase associate ai raggi convergenti sono sferiche con centro nel fuoco, mentre le superfici equifase associate ai raggi paralleli sono piani perpendicolari all'asse. Poiché sulle superfici di discontinuità le iconali delle onde incidente e trasmessa coincidono,[1] la differenza di fase esistente fra un piano e una sfera equifase generici sono ottenibili - a meno di una costante[2] - sommando i cammini ottici lungo un raggio che, partendo dal piano, penetrando nella lente e uscendo da essa, arriva fino alla sfera. Lo sfasamento trovato deve essere indipendente dal raggio considerato, cosicché i cammini ottici devono essere uguali per tutti i raggi. Considerando il piano equifase z = 0 e una sfera equifase di raggio infinitesimo intorno al fuoco, si conclude che il cammino ottico da un punto qualsiasi della faccia piana della lente fino al fuoco deve essere costante. Pertanto, considerando sulla faccia piana il raggio che passa per l'asse e un raggio che passa alla generica distanza r deve aversi:

$$nd + f - d = nz + \sqrt{(f - z)^2 + r^2}$$

ovvero:

$$(f - z)^2 + r^2 = [n(d - z) + f - d]^2$$

Questa è l'equazione esatta del profilo della lente. Essa si riduce alla (7.1) nel caso in cui la distanza focale è tanto grande da poter trascurare i termini in d^2, zd, z^2 rispetto a quelli contenenti f^2.

9.8 Percorsi multipli

In alcuni casi può accadere che due o più fasci provenienti dalla stessa sorgente attraversino la stessa zona dopo aver seguito percorsi differenti (Figura 8.1). Nella regione d'incrocio il campo è dato dalla somma dei campi associati ai singoli fasci. Se le polarizzazioni dei fasci coincidono si ha un effetto d'interferenza. Per determinare il campo in un punto P posto nella regione considerata, bisogna considerare tutti i raggi che lo attraversano e sommare i campi calcolati seguendo i percorsi dei vari raggi. Nell'esempio di figura si hanno tre percorsi; uno lungo il raggio diretto AP, gli altri lungo i raggi A'Q'P e A"Q"P, riflessi dall'ostacolo.[3]

Un esempio interessante per lo studio dei collegamenti ad alta frequenza è quello illustrato nella Figura 8.2. Si desidera calcolare il campo prodotto da un'antenna trasmittente, posta nel punto O all'altezza h_1 dal suolo, in un punto P posto alla distanza d e all'altezza h_2. Si suppone che le due altezze siano molto minori della distanza e che la polarizzazione del campo sia orizzontale.

---

1 Le fasi delle onde incidente e trasmessa devono essere uguali sulle interfacce fra mezzi diversi, dovendo essere verificata la condizione di continuità dei campi tangenziali. Si ricorda che la legge di *Snell* deriva da questa condizione.

2 Lo sfasamento dovuto ai coefficienti di trasmissione sulle facce d'ingresso e di uscita è costante, perché il coefficiente di trasmissione è reale positivo per tutti gli angoli d'incidenza inferiori all'angolo limite.

3 La determinazione dei punti di riflessione non è così semplice come potrebbe apparire a prima vista.

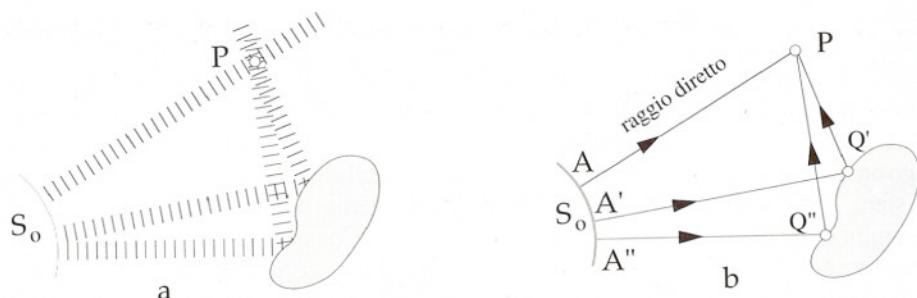



Figura 8.1

Il campo è dato da due contributi, quello del raggio diretto e quello del raggio riflesso dal suolo. I raggi emessi dalla sorgente sono omocentrici, cosicché il calcolo del contributo diretto può essere fatto seguendo la falsariga degli sviluppi che hanno portato alla (5.5). Si trova facilmente che il contributo diretto è:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{p}\sqrt{2\,\eta_0 K_1}\,\frac{e^{-j[k_0 d_0 + \varphi]}}{d_0} \tag{8.1}$$

dove K_1 è l'intensità di radiazione nella direzione di OP. Il contributo del raggio riflesso è dato dall'espressione (5.5). Poiché la polarizzazione è perpendicolare al piano d'incidenza il coefficiente di riflessione coincide con $\Gamma_\perp$, che è molto prossimo a -1 (l'incidenza è radente, vedi Paragrafo 15, Capitolo 2). Quindi il secondo contributo è:

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{p}\sqrt{2\,\eta_0 K_2}\,\frac{e^{-j[k_0(d_1 + d_2) + \varphi]}}{d_1 + d_2} \tag{8.2}$$

dove K_2 è l'intensità di radiazione nella direzione di OQ. Il campo totale è dato da $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. I due contributi hanno la stessa polarizzazione e si ha interferenza, costruttiva o distruttiva, secondo la differenza dei cammini ottici.

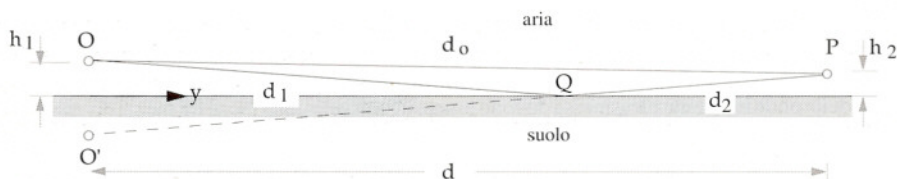



Figura 8.2

Supponendo di avere $K_2 \approx K_1$ e ponendo nei denominatori $d_1 + d_2 \approx d_0 \approx d$, risulta:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{p}\frac{\sqrt{2\eta_0 K_1}}{d} e^{-j\varphi}(e^{-jk_0 d_0} - e^{-jk_0(d_1+d_2)})$$

In base a semplici considerazioni geometriche si ottiene:

$$d_0 = \sqrt{d^2 + (h_1 - h_2)^2} \approx d + \frac{(h_1 - h_2)^2}{2d} = d + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2d} - \frac{h_1 h_2}{d}$$

$$d_1 + d_2 = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2} \approx d + \frac{(h_1 + h_2)^2}{2d} = d + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2d} + \frac{h_1 h_2}{d}$$

Sostituendo queste espressioni nelle esponenziali si trova:

$$|\mathbf{E}| = 2\frac{\sqrt{2\eta_0 K_1}}{d}\left|\sin\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda_0 d}\right| \tag{8.3}$$

Se

$$d >> \frac{h_1 h_2}{\lambda_0} \tag{8.4}$$

si ha:

$$|\mathbf{E}| \approx 4\pi\sqrt{2\eta_0 K_1}\,\frac{h_1 h_2}{\lambda_0 d^2} \tag{8.5}$$

Questa espressione mostra che, a causa dell'interferenza, il campo decresce come $1/d^2$, invece che come $1/d$. L'effetto dell'interferenza viene ridotto usando antenne ad alta direttività poste ad altezze il più possibile elevate, in modo da avere $K_2 << K_1$, $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_1$.

9.9 Limiti dell'Ottica Geometrica

Quando i procedimenti dell'OG portano a risultati che contrastano le ipotesi di lenta variabilità che stanno alla base del metodo l'andamento reale dei campi differisce da quello previsto. Le discrepanze costituiscono i cosiddetti "fenomeni di diffrazione". Alcune situazioni in cui sono violate le ipotesi di lenta variabilità sono considerate qui di seguito.

FORMAZIONE DI "CAUSTICHE" Quando la sezione di un fascio di raggi si annulla l'OG porta a prevedere valori infiniti del campo. In un fascio convergente che attraversa un mezzo omogeneo (vedi Figura 4.3*b*) ciò avviene in corrispondenza dei centri di curvatura della superficie S_0 da cui partono i raggi. I luoghi dei centri di curvatura di S_0 costituiscono, in

generale, due superfici; se il mezzo è omogeneo tali superfici costituiscono le cosiddette "caustiche" (dal greco καιω = brucio), perché - secondo l'OG - avvicinandosi ad esse la densità di potenza tende all'infinito. In casi particolari le caustiche possono degenerare in linee (linee focali) o in un punto unico (fuoco). Il primo caso si verifica, ad esempio, quando la superficie S_0 è cilindrica a sezione circolare (l'asse costituisce un linea focale), il secondo quando S_0 è sferica (il centro della sfera è il fuoco[1]). Ad esempio, i raggi convergenti uscenti dalla lente di Figura 7.1 sono associati a fronti d'onda sferici che hanno il centro sul fuoco F. Nel caso generale, tutti i raggi di un fascio convergente risultano tangenti alle superfici focali, come mostrato nella (Figura 9.1*a*). Dunque le caustiche sono superfici d'inviluppo dei raggi.

Le superfici di inviluppo possono esistere anche in un mezzo ad indice di rifrazione variabile, quando i raggi sono curvi (Figura 9.1*b*). Anche in questo caso si parla di caustiche, perché nei punti di tangenza la sezione dei fasci elementari si annulla e la densità di potenza tende - teoricamente - all'infinito. Naturalmente, in questo caso, le caustiche non dipendono solo dalla geometria di S_0.

In realtà, sulle caustiche, la densità di potenza raggiunge valori elevati ma finiti. Questo fenomeno di diffrazione è sensibile a distanza di qualche lunghezza d'onda dalle caustiche, come si vedrà nel successivo Paragrafo 11, dedicato allo studio di un fascio focalizzato mediante la teoria della diffrazione. La trattazione contenuta nel Paragrafo 12 metterà in luce un fatto piuttosto sorprendente: i risultati dell'OG divengono nuovamente accettabili ad alcune lunghezze d'onda oltre il fuoco, purché venga apportata una correzione di π sulla fase. Questa proprietà è in effetti verificata in presenza di qualunque tipo di caustica. Si dimostra che ad ogni contatto con le caustiche la fase del campo deve essere anticipata di $\pi/2$.[2] Nel caso del fuoco, che corrisponde a una coppia di caustiche, l'anticipo è doppio.

RIFLESSIONE CON INCIDENZA RADENTE Se la superficie di un ostacolo è curva i raggi incidenti in direzione quasi tangenziale danno luogo a raggi riflessi che divergono fortemente (Figura 9.2*a*). In prossimità della superficie il fattore di divergenza è molto piccolo e si

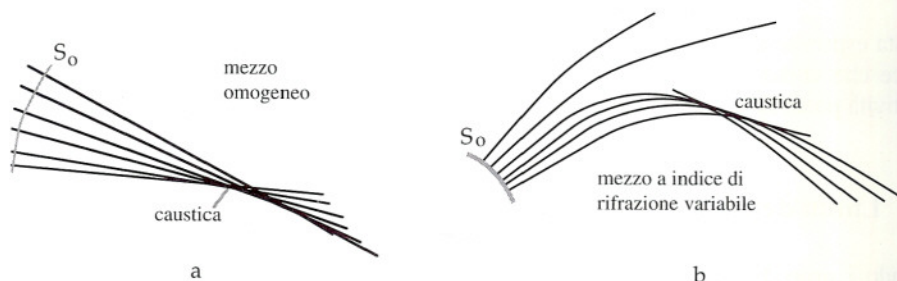



Figura 9.1

1 Nel caso limite della sfera i due centri di curvatura - generalmente distinti - coincidono nel centro. Per questa ragione il fuoco è da considerare come la degenerazione di due caustiche.

2 D.S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, Clarendon Press, Oxford, 1979, par. 8.13.

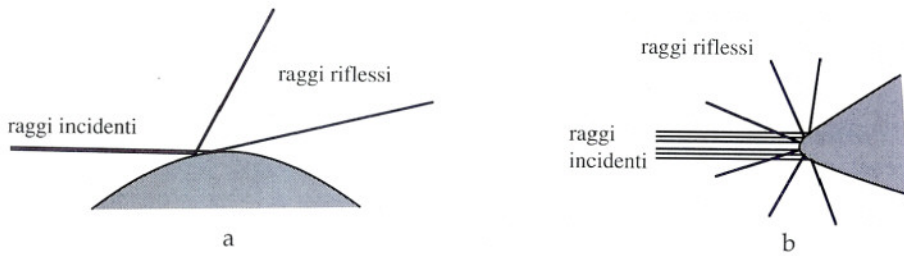



Figura 9.2

hanno rapide variazioni del campo, in contrasto con le ipotesi basilari dell'OG. La trattazione accurata di problemi di questo genere mostra l'esistenza di ulteriori onde che nascono come effetto di diffrazione.

RIFLESSIONE DA SPIGOLI O PUNTE Negli eventuali spigoli o punte esistenti nell'ostacolo almeno uno o entrambi i raggi di curvatura della superficie sono paragonabili (o più piccoli) della lunghezza d'onda (Figura 9.2*b*). Poiché i raggi riflessi divergono fortemente, anche in questo caso le ipotesi di lenta variabilità vengono violate. La trattazione accurata di alcuni particolari problemi di questo genere mostra l'esistenza di ulteriori onde, non prevedibili con l'OG, che si irraggiano dagli spigoli.

FORMAZIONE DI ZONE D'OMBRA Secondo l'OG un corpo opaco investito da un fascio incidente genera una zona d'ombra, come nel caso della Figura 9.3. La superficie di transizione fra la zona d'ombra e quella illuminata è costituita dai raggi radenti. Attraverso la superficie di transizione il campo dovrebbe passare bruscamente da zero ad un valore finito, risultato che è palesemente in contrasto con l'ipotesi di lenta variabilità. In realtà, sia l'esperienza sia le trattazioni teoriche esatte (nei casi in cui esse

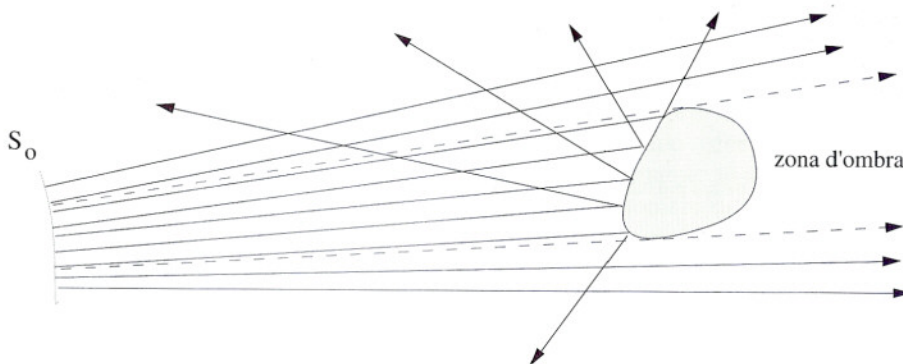



Figura 9.3

sono possibili) mostrano che il passaggio non è brusco, ma che esso avviene in maniera tanto più rapida quanto minore è la lunghezza d'onda.

FORMAZIONE DI FASCI DI RAGGI PARALLELI I fasci di raggi paralleli, come quelli prodotti da un riflettore parabolico (Figura 6.1*a*) o da una lente convergente (Figura 7.1) con la sorgente posta in F, non possono esistere nella realtà. Si osserva subito che un effetto di diffrazione è dovuto alla transizione brusca sul contorno del fascio quando l'ampiezza d'onda differisce da zero sul contorno. Però, anche in mancanza di questa transizione (che viene evitata se l'illuminazione dell'apertura da cui il fascio parallelo ha origine è rastremata e tende gradualmente a zero sui bordi), il parallelismo dei raggi non può mantenersi fino all'infinito. Infatti, come si è visto nel Capitolo 7, nella zona di radiazione dell'apertura l'energia deve inevitabilmente propagarsi in direzione radiale, così che, man mano che ci si avvicina alla distanza di Fresnel dell'apertura, il fascio deve necessariamente allargarsi, passando dalla forma cilindrica a quella conica. Dunque i fasci paralleli previsti dall'OG sono accettabili solo in prossimità dell'apertura. Questo problema verrà esaminato in maggior dettaglio nel Paragrafo 11.

RIFLESSIONE OLTRE L'ANGOLO LIMITE I raggi che incidono sull'interfaccia fra due mezzi trasparenti con angolo superiore all'angolo limite, creano nel mezzo meno denso un'onda di superficie (Figura 9.4). Nel caso delle onde piane uniformi (raggi incidenti paralleli, ampiezza costante ovunque, interfaccia piana infinitamente estesa) l'onda di superficie si propaga su tutta l'interfaccia e ha ovunque ampiezza costante: essa trasporta potenza dall'infinito all'infinito, senza sottrarre potenza all'onda incidente. In una situazione reale, come quella indicata in figura, l'onda di superficie nasce dove i raggi superano l'angolo limite; inoltre dopo un certo percorso essa rientra nel primo mezzo dando luogo alla cosiddetta "onda laterale".[1] Evidentemente la potenza trasmessa all'onda laterale attraverso l'onda di superficie viene fornita dal fascio dei raggi che incidono con angolo superiore

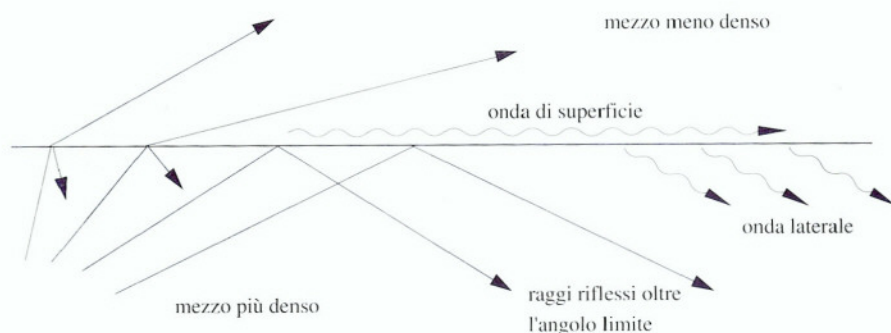



Figura 9.4

1 L. Felsen, "Lateral Waves", in *Electromagnetic Field Theory*, vol. 1 (edited by J. Brown), Pergamon Press, 1967.

all'angolo limite; pertanto non tutta l'energia che questo fascio trasporta viene riflessa, come si ottiene ponendo $|\tilde{\Gamma}_{12}| = 1$ nella (5.1*b*). Dunque la riflessione non può essere effettivamente totale, come in un'onda piana uniforme. In pratica la potenza sottratta dall'onda laterale è una piccola parte di quella incidente, e quindi supporre $|\tilde{\Gamma}_{12}| = 1$ non dà luogo a gravi errori. In ogni caso, però, l'OG non è in grado di prevedere l'esistenza né dell'onda di superficie né di quella laterale.

RIFLESSIONE SU CORPI DI CONDUCIBILITÀ FINITA In molti casi di interesse pratico, in particolare nello studio dell'effetto del suolo sulla propagazione delle radioonde, interessa considerare situazioni in cui il primo mezzo è senza perdite (esempio l'aria) mentre il secondo mezzo è un conduttore la cui conducibilità non è tanto elevata da poter essere considerata infinita. L'OG non permette di studiare l'onda trasmessa nel mezzo dissipativo, ma appare plausibile che nel mezzo trasparente i raggi si riflettano con modalità analoghe a quelle delle onde piane uniformi. Sommerfeld e altri hanno affrontato questo problema in maniera rigorosa.[1] I risultati teorici e le verifiche sperimentali mostrano che il campo calcolato secondo l'OG, considerando i raggi riflessi, è solo una parte del campo che si ha nel mezzo senza perdite e che, assieme ad esso, va considerata un'onda di superficie (estendentesi in entrambi i mezzi) la cui intensità non può essere trascurata fino a distanze dell'ordine di qualche lunghezza d'onda dall'interfaccia. In direzione parallela all'interfaccia tale onda si attenua tanto più rapidamente quanto più alta è la frequenza.

Nel caso del suolo l'onda di superficie viene chiamata "onda di terra". Nei collegamenti a bassa frequenza ($f < 10$ MHz) fra trasmittente e ricevente poste in prossimità del suolo, l'onda di terra non può essere trascurata; anzi il suo contributo è spesso predominante rispetto a quello congiunto dei raggi diretti e riflessi, dato che quest'ultimo contributo decresce col quadrato della distanza, come si è visto nel paragrafo precedente.

Se si escludono alcuni casi particolari, lo studio esatto del campo nelle zone in cui si hanno fenomeni di diffrazione è difficile. Per questo sono state sviluppate teorie approssimate, dette genericamente "teorie della diffrazione", la più antica delle quali è quella basata sul ben noto "principio di Huyghens-Fresnel". Secondo questo principio ogni fronte d'onda può essere ricavato da un fronte d'onda precedente come inviluppo di fronti d'onda sferici emessi dagli elementi di superficie in cui quest'ultimo può essere suddiviso. Alla luce della Teoria Elettromagnetica - sorta in un'epoca successiva - il principio di Huyghens-Fresnel trova giustificazione nel metodo delle sorgenti equivalenti (Capitolo 4); infatti, il campo nella regione posta al di là di una certa superficie equifase può essere visto come somma delle onde elementari prodotte da opportuni elementi di corrente elettrica e/o magnetica posti sulla superficie, ciascuno dei quali produce un'onda sferica, proprio come nel principio di Huyghens-Fresnel. Dunque, ad esempio, calcolare il campo generato da un'apertura mediante le formule viste nel Capitolo 7, equivale essenzialmente ad applicare il principio di Huyghens-Fresnel. Nei paragrafi successivi alcuni fenomeni di diffrazione verranno studiati applicando il metodo delle sorgenti equivalenti, e utilizzando l'OG solo per la determinazione approssimata delle sorgenti.

---

1 Vedi J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, Ch. 9, McGraw-Hill. (Trad. in italiano: *Teoria dell'Elettromagnetismo*, Einaudi, 1952).

Un altro metodo per trattare la diffrazione è basato su una teoria, sviluppata in tempi relativamente recenti, detta "Teoria Geometrica della Diffrazione"; essa permette di studiare la diffrazione correggendo i risultati dell'OG mediante l'introduzione di altre famiglie di raggi, detti "raggi diffratti".[1] I limiti imposti a questo corso impediscono di andare oltre la citazione.

9.10 L'approssimazione dell'Ottica Fisica

Si consideri una sorgente che agisce in un mezzo omogeneo illimitato contenente un ostacolo metallico (Figura 10.1*a*). L'ostacolo diffonde l'onda incidente generata da una sorgente $\mathbf{J}_0$, creando un'onda (diffusa) che si sovrappone alla prima.

Sia $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ il campo in presenza dell'ostacolo e sia $\mathbf{J}_s$ la corrente indotta sulla superficie di questo. Si ha:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$$

Se si immagina di rimuovere l'ostacolo e di sostituire ad esso una lamina di corrente impressa di densità $\mathbf{J}_s$ (Figura 10.1*b*), il campo generato da $\mathbf{J}_0$ e da $\mathbf{J}_s$ coincide con quello che si ha nella situazione reale ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, all'esterno della regione dell'ostacolo, campo nullo all'interno). Infatti questo campo è l'unico possibile, poiché soddisfa le equazioni di Maxwell, ha la

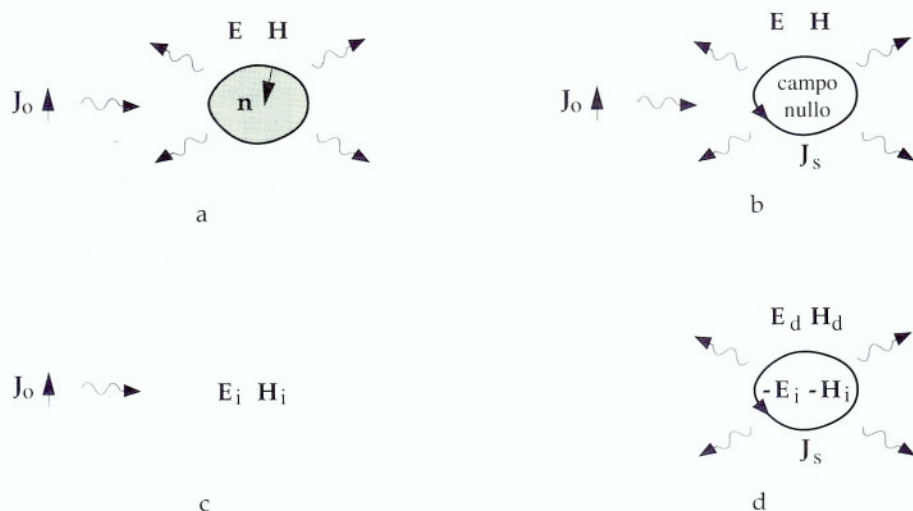



Figura 10.1

1 D.S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, Ch. 8, Oxford Engineering Science Series, Clarendon Press - Oxford 1979.

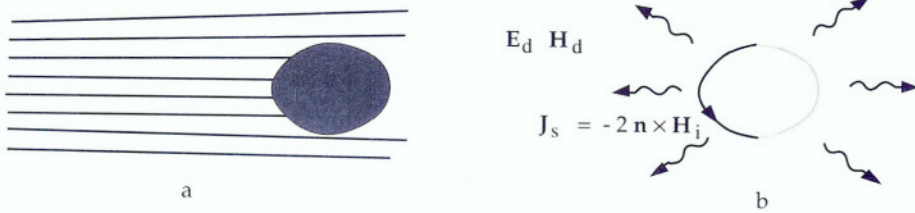



Figura 10.2

corretta discontinuità sulla superficie della lamina e soddisfa le condizioni di radiazione. Il campo $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ (quello che $\mathbf{J}_0$ creerebbe in assenza dell'ostacolo, Figura 10.1*c*)) è il campo incidente; il campo $\mathbf{E}_d$, $\mathbf{H}_d$ (quello generato da $\mathbf{J}_s$ all'esterno dell'ostacolo, Figura 10.1*d*)) è il campo diffuso. $\mathbf{J}_s$ è la sorgente equivalente del campo diffuso.

Il campo incidente è noto, il campo diffuso incognito. Esso potrebbe essere dedotto da $\mathbf{J}_s$ mediante le formule viste nel Capitolo 7, ma anche $\mathbf{J}_s$ è incognita perché dipende dal campo totale $\mathbf{H}$. Se però l'onda incidente soddisfa le condizioni dell'OG e i raggi di curvatura della superficie dell'ostacolo sono molto maggiori della lunghezza d'onda, si può assumere che la corrente indotta nei punti della superficie investiti dai raggi incidenti (Figura 10.2*a*) sia collegata al *solo* campo incidente, attraverso la stessa espressione che vale nel caso di un'onda piana uniforme che incide su una superficie conduttrice piana (vedi Equazione 16.5, Capitolo 2). Con questa approssimazione $\mathbf{J}_s$ diviene una quantità nota, perché essa è nulla nella zona in ombra, mentre nella zona investita dai raggi incidenti è data da:

$$\mathbf{J}_s \approx 2\,\mathbf{H}_i \times \mathbf{n} \tag{10.1}$$

In definitiva $\mathbf{H}_i$ e $\mathbf{J}_s$ vengono determinati approssimativamente con l'OG, mentre il campo diffuso viene dedotto da $\mathbf{J}_s$ mediante le espressioni integrali del Capitolo 7.

Questo procedimento è noto come "approssimazione dell'Ottica Fisica". La sua superiorità rispetto al procedimento basato sull'uso esclusivo dell'OG (determinazione dell'onda diffusa attraverso i raggi riflessi) deriva dal fatto che l'onda diffusa non è rappresentata mediante un fascio di raggi, cosicché non esistono problemi di caustiche, di superfici di transizione, ecc. L'approssimazione (10.1) e l'ipotesi che la corrente sia nulla nella regione in ombra sono ben verificate nelle zone che distano più di qualche lunghezza d'onda dai punti di incidenza radente e dagli eventuali spigoli. Gli errori nel calcolo del campo diffuso non sono gravi, specie se esso viene considerato nella sua regione di radiazione; ciò a causa del ruolo minore giocato in questo caso dai dettagli della distribuzione delle correnti.

9.11 Diffrazione sul fuoco di un fascio parassiale

La Figura 11.1 rappresenta un fascio di raggi focalizzati nel punto F e poco inclinati rispetto all'asse z (fascio "parassiale"). Il calcolo dell'andamento effettivo del campo in prossimità del fuoco può essere basato sulla espressione (15.3) del Capitolo 7, che dà le componenti del

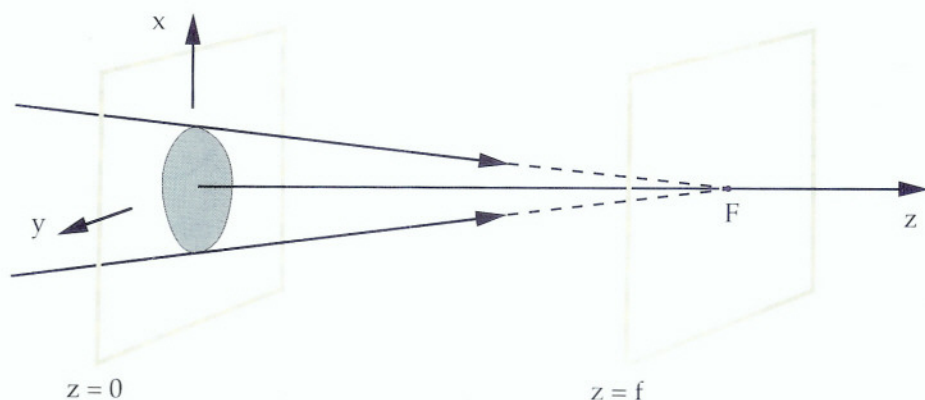



Figura 11.1

campo elettrico nella regione parassiale di un'apertura. In questo caso l'apertura è costituita dall'intersezione del fascio con il piano z = 0; le sue dimensioni e la sua distanza dal fuoco (f) sono molto maggiori della lunghezza d'onda. Pertanto, se ci si limita a calcolare il campo in prossimità del fuoco, l'uso della (15.3) del Capitolo 7 è pienamente giustificato.

Nella regione dell'apertura, dove l'approssimazione dell'OG è accettabile, il campo è rappresentato da un'espressione del tipo (4.1). Assumendo che L sia nulla in F, l'iconale nel punto x', y' posto sull'apertura è:

$$L = 0 - \text{cammino ottico} = -n\sqrt{x'^2 + y'^2 + f^2}$$

Pertanto, il campo sull'apertura è rappresentato da un'espressione del tipo

$$\mathbf{E}(x', y', 0) = \mathbf{p}(x', y', 0)\sqrt{2\eta}\, a(x', y', 0)e^{jk\sqrt{x'^2+y'^2+f^2}} \qquad (11.1)$$

dove $\eta = \eta_0/n$, $k = k_0/n = 2\pi/\lambda$. Per semplificare la discussione conviene assumere che il campo sia polarizzato linearmente, ad esempio sul piano x, z. Poiché i raggi sono poco inclinati, $\mathbf{p}$ è molto prossimo a $\mathbf{u}_x$ e si ha:

$$E_x(x', y', 0) \approx \sqrt{2\eta}\, a(x', y', 0)e^{jk\sqrt{x'^2+y'^2+f^2}} \qquad \mathbf{E}_y(x', y', 0) = 0$$

Poiché $x'^2 + y'^2 << f^2$ è lecito porre:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + f^2} \approx f + \frac{x'^2 + y'^2}{2f}$$

$$E_x(x', y', 0) \approx \sqrt{2\eta}\, a(x', y', 0)e^{jkf}e^{jk(x'^2+y'^2)/2f} \qquad (11.2)$$

Sostituendo nell'espressione del campo nella regione parassiale e ponendo il punto di osservazione sul piano focale si ottiene:

$$E_x(x, y, f) \approx \frac{j\sqrt{2\eta}}{\lambda f} e^{-jk[(x^2+y^2)/2f]} \int\int_{-\infty}^{\infty} a(x', y', 0) e^{j(2\pi/\lambda f)(xx'+yy')} dx' dy'$$

Pertanto, introducendo la trasformata di Fourier

$$\tilde{a}(\xi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{\infty} a(x', y', 0) e^{-j(\xi x'+\psi y')} dx' dy'$$

si ha:

$$|E_x(x, y, f)| \approx \frac{2\pi\sqrt{2\eta}}{\lambda f} \left| \tilde{a}\left(-\frac{2\pi x}{\lambda f}, -\frac{2\pi y}{\lambda f}\right) \right| \tag{11.3}$$

Dunque si trova il seguente importante risultato: *l'ampiezza del campo sul piano focale ha l'andamento della trasformata di Fourier dell'ampiezza del campo sull'apertura.*

ESEMPIO Se il fascio parassiale è ottenuto facendo passare un fascio di raggi convergenti attraverso un foro quadrato di lato d praticato in uno schermo opaco, nell'ipotesi che sul foro l'ampiezza del campo sia costante e pari ad A, si ottiene:

$$\tilde{a}(\xi, \psi) = \frac{A d^2}{2\pi} \mathrm{Sinc}\frac{d\xi}{2} \mathrm{Sinc}\frac{d\psi}{2}$$

Pertanto l'ampiezza sul piano focale è:

$$|E_x| = E_f \left| \mathrm{Sinc}\left(\frac{\pi d x}{\lambda f}\right) \mathrm{Sinc}\left(\frac{\pi d y}{\lambda f}\right) \right|$$

dove

$$E_f = \sqrt{2\eta_0}\, A \frac{d^2}{\lambda f} \tag{11.4}$$

L'andamento di $|E_x|$ è rappresentato nella Figura 11.2. Si nota che E_f rappresenta il valore massimo dell'ampiezza e che questa ha un picco intorno al fuoco, in una regione quadrata di lato:

$$\Delta = \frac{2f\lambda}{d} \tag{11.5}$$

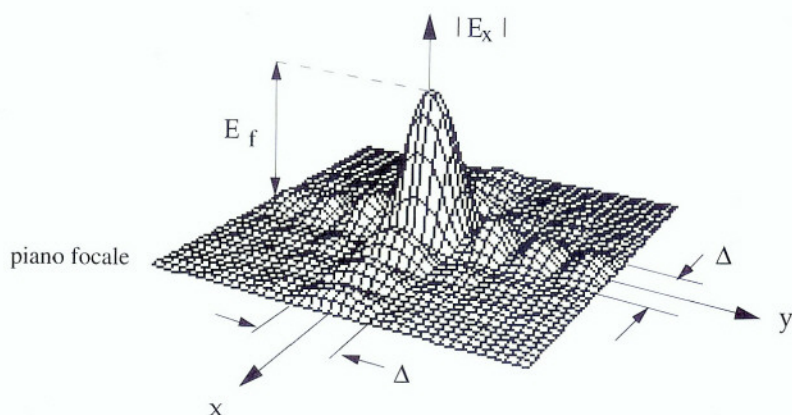



Figura 11.2

Tanto minore è la lunghezza d'onda tanto più il picco è stretto e intenso, ma solo nel caso limite $\lambda \to 0$ il campo risulta infinito sul fuoco e nullo altrove, come vorrebbe l'OG.

Il picco si forma per tutte le distribuzioni di ampiezza che si hanno in pratica e la sua larghezza è:

$$\Delta \propto (f/D)\lambda$$

dove - al solito - D indica la dimensione dell'apertura. Introducendo la distanza di Fresnel

$$d_F = \frac{2D^2}{\lambda}$$

si ha:

$$\frac{\Delta}{D} \propto \frac{f}{d_F}$$

Questa espressione è interessante perché mostra che un'efficace focalizzazione ($\Delta << D$) può aver luogo solo se la distanza focale è molto minore della distanza di Fresnel. Pertanto la focalizzazione non esiste quando il punto F è prossimo al confine della zona di radiazione, o addirittura oltre. Alle lunghezze d'onda visibili la focalizzazione è generalmente molto buona, perché la distanza di Fresnel è usualmente molto maggiore della distanza focale.

Se il fuoco è all'infinito (fascio di raggi paralleli, apertura equifase) Δ tende all'infinito. Questo risultato indica che, al passaggio dalla zona vicina a quella di radiazione, i fasci di raggi paralleli si trasformano ineluttabilmente in fasci divergenti (Figura 11.3), in accordo con quanto visto nel Capitolo 7 a proposito delle proprietà del campo di radiazione.

Figura 11.3

9.12 L'Ottica Geometrica al di là del fuoco

L'esperienza mostra che l'Ottica Geometrica funziona - nei suoi limiti - anche quando i raggi vengono prolungati oltre il fuoco. In base a questo fatto, nei testi di Fisica elementare si dà per scontato che il prolungamento sia lecito. Alla luce di quanto si è visto, però, la cosa appare opinabile, poiché quando i raggi passano sul fuoco l'OG cade in difetto. La presente trattazione mostra che in effetti l'OG può essere applicata anche al di là del fuoco, purché il ritardo di fase dovuto ai cammini ottici sia incrementato di π.

Si consideri un fascio di raggi convergenti sul fuoco F (Figura 12.1) che dà luogo al campo (11.1) sul piano $z = 0$ (nella presente discussione non è necessario supporre che il fascio sia parassiale). Si supponga che la lunghezza d'onda sia piccolissima (al limite tendente a zero), in modo da avere una effettiva focalizzazione e da rendere accettabile l'OG almeno fino al fuoco. In queste condizioni il campo in tutto il semispazio $z > 0$ può essere calcolato utilizzando la (15.2) del Capitolo 7, che assume la forma

$$\mathbf{E}(x,y,z) = j\frac{\sqrt{2\eta}}{\lambda}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_R \times [\mathbf{p}\times\mathbf{u}_z]\frac{a}{R}e^{jkW}\,dx'\,dy' \qquad (12.1)$$

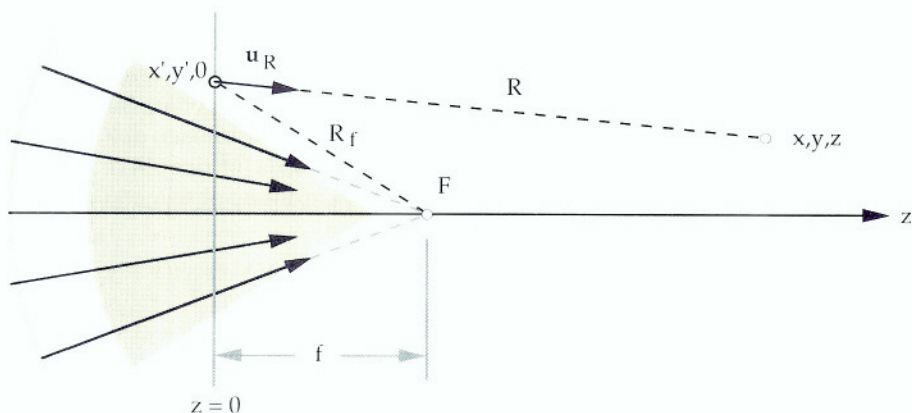



Figura 12.1

dove $a = a(x', y', 0)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x', y', 0)$ sono l'ampiezza d'onda e il vettore di polarizzazione sul piano $z = 0$; inoltre:

$$W = R_f - R \tag{12.2}$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \qquad R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + f^2}$$

R e R_f sono le distanze fra il punto x', y' e il punto di osservazione e il fuoco rispettivamente.

Apparentemente la (12.1) diverge quando $\lambda \to 0$. In effetti le successive considerazioni mostrano che l'integrale è infinitesimo dello stesso ordine di λ (fuoco escluso). Lo studio dell'integrale per valori piccolissimi di λ si riduce a quello dello studio del comportamento asintotico per $k \to \infty$ di un integrale del tipo

$$I(k) = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x', y')\, e^{jkW(x', y')}\, dx'\, dy'$$

Infatti, indicando con $V(x', y')$ una qualunque delle componenti di

$$\mathbf{u}_R \times [\mathbf{p} \times \mathbf{u}_z] \frac{a}{R}$$

le componenti dell'integrale (12.1) assumono proprio questa forma.

Per $k \to \infty$ l'integrale $I(k)$ tende a zero perché, al variare di x', y', l'integrando

$$V(x', y')\, e^{jkW(x', y')} = V(x', y')\,(\cos kW(x', y') + j\sin kW(x', y'))$$

oscilla tanto più rapidamente quanto più grande è k, con le parti reale e immaginaria che cambiano segno in intervalli tendenti a zero. Si osserva che per valori grandi ma finiti di k le oscillazioni sono più lente nei punti intorno a cui W varia con maggior lentezza; pertanto i contributi più significativi all'integrale vengono dall'intorno di questi punti. Dunque *l'andamento asintotico di* $I(k)$ *è determinato dai contributi che provengono dall'intorno degli eventuali punti di stazionarietà di* W *(massimi, minimi, punti di sella)*. Supponendo che esista un solo punto di stazionarietà in $x' = x_0$, $y' = y_0$, il valore asintotico di $I(k)$ può quindi essere calcolato ponendo $V(x', y') \approx V(x_0, y_0)$ e approssimando la funzione $W(x', y')$ mediante il suo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto x_0, y_0, troncato al secondo ordine:

$$W(x', y') \approx W(x_0, y_0) + \frac{1}{2} a (x' - x_0)^2 + \frac{1}{2} b (y' - y_0)^2 + c (x' - x_0)(y' - y_0)$$

dove:

$$a = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} \right)_{x_0, y_0} \qquad b = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} \right)_{x_0, y_0} \qquad c = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} \right)_{x_0, y_0}$$

L'applicazione matematica di questi concetti porta ad un procedimento di valutazione del valore asintotico di I(k) che prende il nome di "metodo della fase stazionaria".[1] Si trova che, nel caso di un solo punto di stazionarietà il valore asintotico di I(k) è dato dalla seguente espressione:

$$I(k) = j\sigma \frac{2\pi}{k} \frac{V(x_0, y_0)}{\sqrt{|h|}} e^{jkW(x_0, y_0)} + O(k^{-2}) \tag{12.3}$$

dove:

$$h = ab - c^2 \tag{12.4}$$

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{per } h > 0 \quad a > 0 \\ -1 & \text{per } h > 0 \quad a < 0 \\ -j & \text{per } h < 0 \end{cases} \tag{12.5}$$

Come si vedrà negli sviluppi riportati in fondo al paragrafo, la funzione W data dalla (12.2) ha un solo punto di stazionarietà, purché il punto di osservazione non coincida col fuoco. Il punto di stazionarietà (x_0, y_0) è l'intersezione con il piano $z = 0$ della retta che passa per F e per il punto di osservazione (x, y, z) (Figura 12.2); questo punto è quello da cui parte il raggio che passa per il punto di osservazione. Si trova inoltre:

$$\mathbf{h} = \frac{(s - s_f)^2 \cos^2\alpha}{s_f^2 s^2} \tag{12.6}$$

$$\sigma = \frac{s - s_f}{|s - s_f|} \tag{12.7}$$

dove α è l'inclinazione del raggio rispetto all'asse z e inoltre:

$$s = R(x_0, y_0) \qquad s_f = R_f(x_0, y_0) \tag{12.8}$$

Pertanto, applicando la (12.3) alla (12.1) si trova che, per piccoli valori della lunghezza d'onda, si ha:

$$\mathbf{E}(x, y, z) \simeq \frac{s_f - s}{|s - s_f|} \sqrt{2\eta} \, |\mathbf{u}_R \times (\mathbf{p} \times \mathbf{u}_z)|_{x_0, y_0} \frac{a(x_0, z_0, 0)}{s} \frac{s_f s}{|s - s_f| \cos\alpha} e^{-jk(s - s_f)}$$

1 Il metodo della fase stazionaria è trattato in molti testi avanzati di Onde Elettromagnetiche e di Ottica, ad esempio: M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, fifth edition, 1975, p. 752.

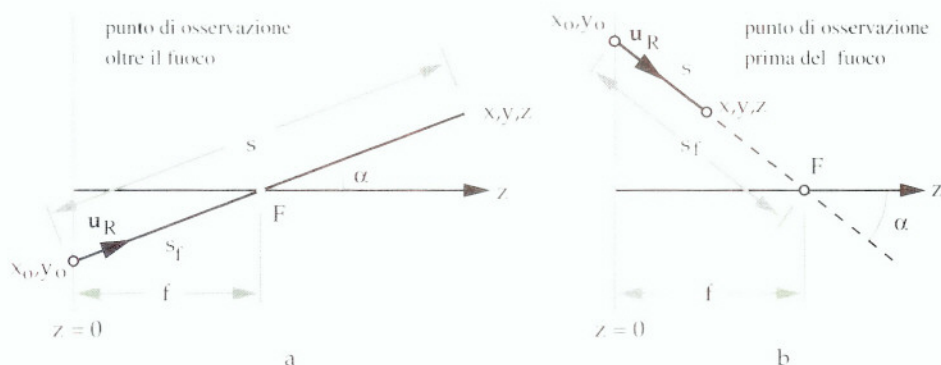



Figura 12.2

Nel punto (x_0, y_0) il versore $\mathbf{u}_R$ è orientato come il raggio e quindi è ortogonale a **p**: inoltre esso forma l'angolo α con l'asse z. Pertanto si ha:

$$[\mathbf{u}_R \times (\mathbf{p} \times \mathbf{u}_z)]_{x_0,y_0} = [(\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_z)\mathbf{p} - (\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{p})\mathbf{u}_z]_{x_0,y_0} = \cos\alpha\, \mathbf{p}(x_0, y_0)$$

e quindi:

$$\mathbf{E}(x,y,z) \approx \sqrt{2\eta}\, \mathbf{p}(x_0, y_0)\, a(x_0, z_0, 0) \frac{s_f}{s_f - s} e^{-jk(s-s_f)} \tag{12.9}$$

Invece, applicando in maniera acritica l'OG anche al di là del fuoco e considerando l'espressione del fattore di divergenza (4.7) con $s_1 = s_2 = s_f$, si otterrebbe per **E** (x,y,z) la seguente espressione

$$\sqrt{2\eta}\, \mathbf{p}(x_0, y_0)\, a(x_0, z_0, 0) \frac{s_f}{|s_f - s|} e^{-jk(s-s_f)}$$

Si nota che questa espressione coincide con la (12.9) quando il punto di osservazione precede il fuoco ($s < s_f$) mentre differisce per il segno quando il punto di osservazione è posto oltre il fuoco ($s > s_f$). Dunque, oltre il fuoco, l'OG può essere ancora applicata, apportando però la correzione di π sulla fase.

Il metodo descritto non può essere usato quando il punto di osservazione è proprio sul fuoco, poiché in questo caso la funzione W(x', y') è costante e, nella (12.1), l'integrando non oscilla, per quanto grande sia k. A causa di questo fatto l'integrale non è infinitesimo e la (12.1) dà un campo che diverge quando $k \to \infty$. Questo risultato è in accordo con quanto si è visto nel paragrafo precedente.

Si osservi infine che le variazioni di W sono tanto più lente quanto più il punto di

osservazione è vicino al fuoco. Pertanto, se k è grande ma finito e ci si avvicina al fuoco, il risultato (12.9) non è più valido perché le oscillazioni dell'integrando non sono più tanto rapide da giustificare l'uso del metodo della fase stazionaria. Dunque si trova ancora che in prossimità del fuoco i risultati dell'OG perdono validità.

■ DETERMINAZIONE DEL PUNTO DI STAZIONARIETÀ, DI h E DI σ La fase è stazionaria per i valori di x', y' tali che:

$$\frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{x'(R - R_f) + xR_f}{RR_f} = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial y'} = \frac{y'(R - R_f) + yR_f}{RR_f} = 0$$

Pertanto deve aversi:

$$\frac{x'}{R_f} = -\frac{x}{R - R_f} \qquad \frac{y'}{R_f} = -\frac{y}{R - R_f}$$

Queste relazioni sono verificate se e solo se il punto x', y', il punto x, y e il fuoco sono allineati, come in Figura 12.2. Quindi il punto di stazionarietà corrisponde con x_0, y_0, punto di partenza del raggio che passa per il punto di osservazione. Calcolando le derivate seconde di W nel punto di stazionarietà e indicando con s e s_f i valori assunti da R e R_f in questo punto, si ottiene:

$$\mathbf{a} = \frac{(s - s_f)^2 - x^2}{ss_f(s - s_f)} \qquad b = \frac{(s - s_f)^2 - x^2}{ss_f(s - s_f)} \qquad c = \frac{-xy}{ss_f(s - s_f)}$$

$$\mathbf{h} = \frac{(z - f)^2}{s^2 s_f^2} = \frac{(s - s_f)^2}{s^2 s_f^2} \cos^2\alpha$$

h è positivo mentre a ha il segno di $s - s_f$. Dunque, per le (12.5) si ha:

$$\sigma = \frac{s - s_f}{|s - s_f|}$$ ■

9.13 Fasci gaussiani

Si consideri un fascio di raggi paralleli che determina sul piano $z = 0$ l'illuminazione

$$E_x(x, y, 0) = A\, e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}} \qquad E_y(x, y, 0) = 0 \qquad (w_0 >> \lambda) \tag{13.1}$$

dove A è una costante.[1] L'andamento di E_x è quello di una gaussiana bidimensionale (Figura 13.1*a*): l'ampiezza è simmetrica rispetto all'origine e scende a valori trascurabili a distanza

1 Si suppone che il campo sia polarizzato linearmente secondo x. Però la trattazione può essere immediatamente estesa a qualsiasi altro tipo di polarizzazione costante, sovrapponendo al campo (13.1) un campo analogo, polarizzato secondo y e opportunamente sfasato.

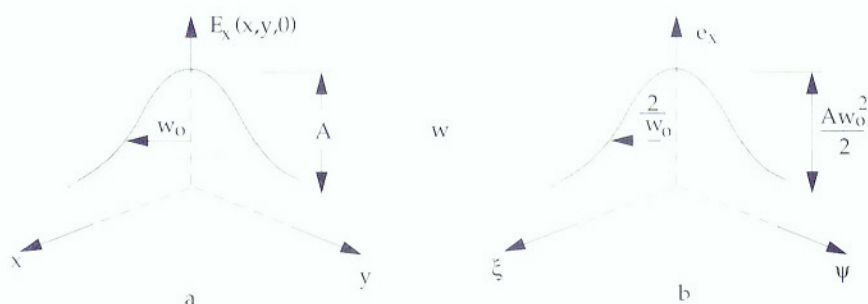



Figura 13.1

maggiore di $2w_0$ da essa. Per quanto si è detto precedentemente, nella regione $z > 0$ il fascio tende a divergere. Il fascio effettivamente prodotto dall'illuminazione (13.1) prende il nome di "fascio gaussiano". Fasci di questo genere sono molto importanti perché essi vengono normalmente prodotti dai laser o all'uscita delle più comuni fibre ottiche.

Lo studio del fascio gaussiano può essere svolto in maniera semplice utilizzando lo sviluppo in onde piane (Paragrafo 16, Capitolo 7). Si ha:

$$e_x(\xi,\psi) = \frac{A}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/w_0^2}\, e^{-j(\xi x+\psi y)}\, dx\, dy \qquad e_y(\xi,\psi) = 0 \tag{13.2}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} e_x(\xi,\psi)\, e^{-jk_z z}\, e^{-j(\xi x+\psi y)}\, d\xi\, d\psi \tag{13.3a}$$

$$E_y(x,y,z) = 0 \tag{13.3b}$$

$$E_z(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{k_z} e_x(\xi,\psi)\, e^{-jk_z z}\, e^{j(\xi x+\psi y)}\, d\xi\, d\psi \tag{13.3c}$$

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2-\xi^2-\psi^2} & \text{per } \xi^2+\psi^2 < k^2 \\ -j\sqrt{\xi^2+\psi^2-k^2} & \text{per } \xi^2+\psi^2 > k^2 \end{cases} \tag{13.4}$$

Il calcolo della trasformata (13.2) è basato sulla seguente formula:[1]

1 La (13.5) può essere dedotta facilmente dall'integrale 3.322.2 riportato in: I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pu^2-qu}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{q^2/4p} \qquad \text{(p, q complessi; Re[p] > 0)} \tag{13.5}$$

Si ottiene:

$$e_x(\xi,\psi) = \frac{A\,w_0^2}{2}\,e^{-(\xi^2+\psi^2)(w_0/2)^2}$$

L'andamento di questa funzione è quello di una gaussiana sul piano ξ, ψ (vedi Figura 13.1*b*). L'ampiezza scende a valori trascurabili nei punti che distano dall'origine più di $4/w_0$. D'altro canto, poiché w_0 è molto maggiore della lunghezza d'onda si ha:

$$\frac{4}{w_0} << \frac{4}{\lambda} < \frac{2\pi}{\lambda} = k \tag{13.6}$$

dunque e_x ha valori sensibili solo in una zona in cui risulta

$$\xi^2 + \psi^2 << k^2 \qquad\qquad k_z \approx k - \frac{\xi^2+\psi^2}{2k}$$

Introducendo nella (13.3*a*) la precedente espressione di k_z si ottiene:

$$E_x(x,y,z) = \frac{A\,w_0^2}{4\pi}\,e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+\psi^2)(w_0^2/4-jz/2k)}\,e^{j(\xi x+\psi y)}\,d\xi\,d\psi \tag{13.7}$$

Il calcolo dell'integrale, ancora basato sulla (13.5), porta al seguente risultato:

$$E_x(x,y,z) = \frac{A}{1-j2z/kw_0^2}\,e^{-(x^2+y^2)/(w_0^2-j2z/k)}\,e^{-jkz} \tag{13.8}$$

Nel calcolo della (13.3*c*) si può porre $k_z \approx k$ al denominatore, compiendo un piccolo errore sul modulo dell'integrando. Così si ottiene:

$$E_z(x,y,z) = \frac{A\,w_0^2}{4\pi\,jk}\,e^{-jkz}\iint_{-\infty}^{\infty} j\xi\,e^{-(\xi^2+\psi^2)(w_0^2/4-jz/2k)}\,e^{j(\xi x+\psi y)}\,d\xi\,d\psi \tag{13.9}$$

L'esame delle (13.7) e (13.9) rivela che:

$$E_z = \frac{1}{jk}\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Pertanto, considerando la (13.8) si trova:

$$E_z = -\frac{2x}{jk(w_0^2 - j2z/k)} E_x \qquad (13.10)$$

Il campo magnetico può essere dedotto da quello elettrico mediante le equazioni di Maxwell.

Per discutere i precedenti risultati conviene scrivere la (13.8) in forma diversa, evidenziando il modulo e la fase. Si ha:

$$E_x = A \frac{w_0}{w(z)} e^{-(x^2+y^2)/w(z)} e^{-j\varphi(x,y,z)} \qquad (13.11)$$

dove:

$$z_0 = \frac{k w_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \qquad (13.12)$$

$$w = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \qquad (13.13)$$

$$\varphi = k\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2(z + z_0^2/z)}\right) - \text{arctg}\frac{z}{z_0} \qquad (13.14)$$

Si osserva che, su un generica sezione trasversale del fascio, l'ampiezza di E_x varia con legge gaussiana, come sul piano $z = 0$. La larghezza w della gaussiana varia con z secondo la (13.13) e si allarga progressivamente con legge iperbolica (Figura 13.2).
La figura mostra che le dimensioni trasversali del fascio si mantengono circa costanti e uguali a quelle iniziali solo a distanze molto minori di z_0. In questa regione i risultati dell'OG sono

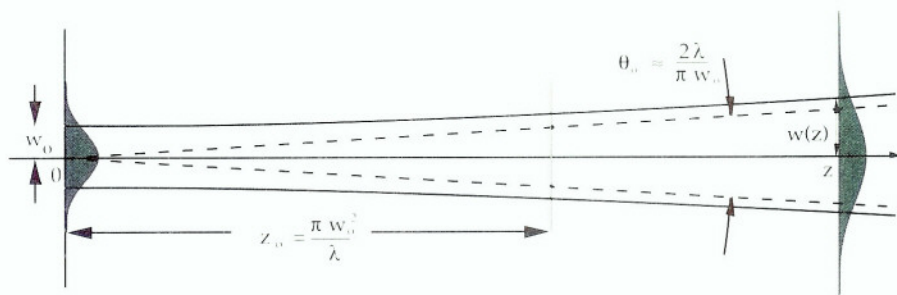



Figura 13.2

accettabili. Invece, quando z è molto più grande di z_0, la crescita di w tende a divenire proporzionale alla distanza dall'origine (linee tratteggiate) perché si ha:

$$w \approx w_0 \frac{z}{z_0}$$

Dunque a grande distanza il fascio assume una conformazione conica e l'angolo di apertura del cono è

$$\theta_0 = 2 \text{ arctg } (z/w) = 2 \text{ arctg } (z_0/w_0) = 2 \text{ arctg } (\lambda/w_0\pi) = 2\lambda/w_0\pi$$

L'angolo è piccolo perché w_0 è molto maggiore della lunghezza d'onda. Dunque il campo rimane confinato nella regione parassiale. A distanze molto maggiori di z_0 l'ampiezza della gaussiana decresce come l'inverso della distanza dall'apertura e la fase è data da:

$$\varphi \approx k\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Poiché nella regione parassiale vale l'approssimazione

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

si vede che a grande distanza si ha:

$$\varphi \approx kr - \pi/2$$

Pertanto il fascio tende ad assumere le caratteristiche di un'onda sferica, come c'era da attendersi in base alla teoria della radiazione.[1]

C'è pure da attendersi che a grande distanza il campo elettrico divenga trasversale rispetto alla direzione di propagazione. In effetti dalla (13.9) risulta:

$$E_z \approx -\frac{x}{z} E_x \qquad xE_x + zE_z \approx 0 \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \approx 0$$

Invece, in prossimità dell'apertura, dove la propagazione avviene nella direzione di z, il campo elettrico non è rigorosamente trasversale. Infatti, sempre per la (13.9), si ha

$$E_z(x, y, 0) = -\frac{2x}{jk\,w_0^2} E_x(x, y, 0) = j\frac{x\lambda}{\pi\,w_0^2} E_x(x, y, 0)$$

1 Orientativamente si può assumere che le dimensioni dell'apertura siano pari a $D = 4w_0$, così che la zona di radiazione inizia a una distanza dell'ordine di $32w_0^2/\lambda \approx 10z_0$.

Poichè E_z è molto minore di E_x il campo elettrico è quasi trasversale, in accordo con l'OG (l'accordo è perfetto solo per $\lambda \to 0$).

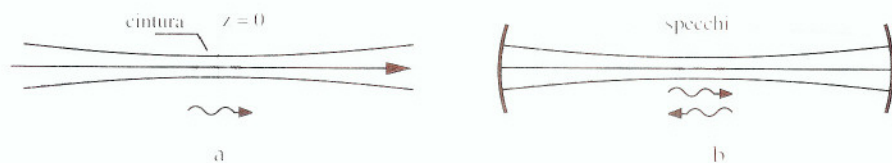
Se nelle espressioni precedenti si trasforma k in −k tutto rimane immutato, tranne il verso di propagazione, che va dall'infinito verso il piano $z = 0$ (fascio convergente). Il campo che così si ottiene soddisfa le equazioni di Maxwell (nei limiti delle approssimazioni ottiche) e rappresenta la soluzione che normalmente viene scartata perché contravviene alle condizioni di radiazione (vedi Appendice G). Se però non ci si spinge all'infinito, un fascio siffatto può esistere come effetto di opportune sorgenti poste al di là di una certa distanza.

Si nota che le espressioni prima trovate, considerate alla sinistra di z rappresentano proprio un fascio gaussiano convergente. Pertanto, nulla vieta di estendere alla sinistra del piano $z = 0$ la regione in cui è definito il fascio gaussiano. Così si ottiene un fascio che prima converge e poi diverge (Figura 13.3*a*). Il fascio ha sezione minima nel piano $z = 0$ ("cintura" del fascio). In corrispondenza della cintura il campo è trascurabile a distanze dall'asse superiori a circa $4w_0$.

Facendo incidere un fascio gaussiano su di uno specchio sferico posto a distanza molto maggiore di z_0 dalla cintura, si ottiene un fascio riflesso che differisce da quello incidente solo per la direzione di propagazione. Poiché le superfici equifase del fascio incidente e di quello riflesso coincidono, si crea un'onda stazionaria. I nodi sono piazzati su quelle particolari superfici equifase in cui i due fasci hanno i campi in opposizione (a grande distanza dalla cintura le superfici nodali sono sferiche e distano $\lambda/2$ l'una dall'altra). Questa considerazione fa comprendere che a certe frequenze particolari è possibile contenere un'onda stazionaria fra due specchi sferici posizionati come in Figura 13.3*b*. Tali frequenze sono quelle per cui due superfici nodali possono coincidere con i due specchi (il concetto è identico a quello che permette di individuare le frequenze di risonanza di una cavità cilindrica considerando le onde stazionarie della guida corrispondente). Poichè l'energia elettromagnetica rimane sostanzialmente confinata intorno all'asse, si hanno modi (gaussiani) di risonanza, del tutto simili e quelli che si hanno nelle cavità. Risuonatori aperti di questo tipo sono utilizzati nei laser.

Il fascio gaussiano ha la caratteristica di mantenere immutata la distribuzione di ampiezza sui piani trasversali al suo asse, a parte una contrazione o dilatazione. Questa caratteristica è comune a due classi di fasci, detti di Gauss-Hermite e di Gauss-Laguerre, di cui il fascio simmetrico qui considerato fa parte come caso particolare. Anche questi fasci possono essere studiati con il metodo qui esposto, ma la loro trattazione esula dai limiti imposti a questo testo.

Figura 13.3

10

Onde piane nei mezzi anisotropi

Nei mezzi isotropi le onde piane uniformi si propagano con la stessa velocità in ogni direzione e trasportano energia nella direzione di propagazione; inoltre la loro polarizzazione non è soggetta ad alcuna limitazione, tranne quella di essere trasversale alla direzione di propagazione.
Nei mezzi anisotropi, invece, per ciascuna direzione sono possibili solo due onde polarizzate in modo particolare, che si propagano con velocità diversa e, in genere, trasportano energia in direzione diversa da quella in cui si propagano. La velocità e la polarizzazione dipendono dalla direzione.

Sebbene le onde piane uniformi non esistano nella realtà, il loro studio è utile, non solo per mettere in evidenza gli effetti dell'anisotropia, ma anche perché in molte situazioni che si incontrano concretamente in Ottica (esempio propagazione di fasci luminosi nei monocristalli) o nella radiopropagazione (ad esempio, nella ionosfera terrestre) le onde sono localmente assimilabili ad onde piane uniformi.

Nelle applicazioni ottiche e nello studio delle radioonde nella ionosfera si considerano mezzi non magnetici; pertanto in questo capitolo si fa riferimento a materiali nei quali la permeabilità elettrica è di tipo tensoriale, mentre la permeabilità magnetica è uguale a quella del vuoto. Inoltre vengono trascurate le perdite, che nelle applicazioni suddette possono essere spesso ignorate, almeno in prima approssimazione.[1]
Il capitolo inizia con alcune precisazioni sulla struttura del tensore di permeabilità elettrica di questi materiali; prosegue con quattro paragrafi dedicati alla propagazione nei cosiddetti "cristalli uniassici" e nei mezzi resi anisotropi dall'azione di un campo elettrostatico (effetto Kerr); si conclude con tre paragrafi dedicati alla propagazione nei mezzi giroelettrici, l'ultimo dei quali tratta i cosiddetti effetti "magnetoottici" (effetto Faraday ed effetto Cotton-Mouton).

---

1 La propagazione nei mezzi magnetici anisotropi, come ad esempio nelle ferriti magnetizzate, è di notevole interesse nella tecnica delle microonde. Però comunemente essa avviene all'interno di strutture (guide d'onda) nelle quali le onde non possono essere considerate uniformi, nemmeno approssimativamente.

10.1 Permeabilità elettrica dei monocristalli e dei mezzi giroelettrici

Nel Pararagrafo 9 del Capitolo 1 è stato mostrato che nei materiali senza perdite il tensore di permeabilità elettrica è hermitiano. Si è inoltre evidenziato il fatto che la sua parte immaginaria differisce da zero quando il materiale è sottoposto all'azione di un campo magnetostatico (materiali giroelettrici). Pertanto, nei materiali che sono anisotropi per altre ragioni (monocristalli, materiali sottoposti a deformazioni meccaniche, ecc.) il tensore di permeabilità elettrica è reale e simmetrico. Dunque in questi materiali si ha:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}' \qquad (\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\beta\alpha})$$

Le componenti di $\underline{\varepsilon}'$ cambiano ruotando gli assi. Poiché $\underline{\varepsilon}'$ è reale e simmetrico, esiste una particolare rotazione che diagonalizza il tensore (vedi Appendice A). Gli assi rispetto ai quali $\underline{\varepsilon}'$ assume forma diagonale vengono detti "assi principali". Assumendoli come assi di riferimento si ha:

$$\underline{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

dove, evidentemente, $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$. Le quantità reali $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, n_1, n_2, n_3$ sono dette permeabilità elettriche e indici di rifrazione "principali". In certi casi, come quelli di cui ci si occuperà nel paragrafo successivo, le permeabilità principali rispetto a due assi coincidono. Quando ciò avviene, ruotando la terna di riferimento intorno al terzo asse, le componenti del tensore rimangono immutate. Pertanto, in questi casi, solo la direzione di uno degli assi principali è determinata. Si comprende che questo avviene quando la struttura cristallina del materiale e/o l'azione esterna che genera l'anisotropia sono simmetriche rispetto a un asse.

Sotto l'azione di un campo magnetostatico il tensore di permeabilità elettrica è hermitiano e quindi assume la forma

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon}' - j\underline{\varepsilon}'')$$

dove $\underline{\varepsilon}'$ e $\underline{\varepsilon}''$ sono tensori reali, simmetrico e antisimmetrico rispettivamente. Anche in questo caso, con opportuna scelta degli assi, $\underline{\varepsilon}'$ assume la forma (1.1) mentre $\underline{\varepsilon}''$ mantiene la forma antisimmetrica:

$$\underline{\varepsilon}'' = \begin{bmatrix} 0 & \zeta & -\nu \\ -\zeta & 0 & \chi \\ \nu & -\chi & 0 \end{bmatrix}$$

Il prodotto $\underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ che figura nelle equazioni di Maxwell (Equazione 5.13*a*, Capitolo 1), può essere scritto come segue:

$$\underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}' \cdot \mathbf{E} - j\varepsilon_0 \underline{\varepsilon}'' \cdot \mathbf{E} =$$

$$= \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}' \cdot \mathbf{E} + j\varepsilon_0 [(\nu E_z - \zeta E_y)\mathbf{u}_x + (\zeta E_x - \chi E_z)\mathbf{u}_y + (\chi E_y - \nu E_x)\mathbf{u}_z]$$

Introducendo il "vettore di girazione"

$$\mathbf{g} = \chi \mathbf{u}_x + \nu \mathbf{u}_y + \zeta \mathbf{u}_z$$

si può anche scrivere:

$$\underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}' \cdot \mathbf{E} + j\varepsilon_0 \mathbf{g} \times \mathbf{E} \tag{1.2}$$

Come $\underline{\varepsilon}''$ il vettore di girazione differisce da zero solo in presenza del campo magnetostatico.

Nel caso di un materiale (naturalmente isotropo) reso giroelettrico dall'azione di un campo magnetostatico *agente secondo l'asse z*, per ragioni di simmetria la forma di $\underline{\varepsilon}'$ deve essere del tipo:

$$\underline{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Infatti le componenti ε'_{xx} e ε'_{yy} devono essere uguali perché il comportamento del materiale è uguale in tutte le direzioni trasversali a z. Inoltre, sempre per ragioni di simmetria, il vettore di girazione è parallelo all'asse z:

$$\mathbf{g} = g\, \mathbf{u}_z \tag{1.4}$$

Il lettore può verificare la validità delle (1.3) e (1.4) nel caso del magnetoplasma (vedi Capitolo 1, Equazione 6.9*a*).

10.2 Onde piane uniformi nei cristalli uniassici

Vengono detti "uniassici" i cristalli nei quali due degli indici di rifrazione principali coincidono. Di questa classe fanno parte i cristalli dei sistemi romboedrico, tetragonale ed esagonale, la cui cella elementare ha un asse di simmetria del terzo, quarto e sesto ordine rispettivamente (Figura 2.1). L'asse di simmetria è un asse principale e viene detto "asse ottico". Ponendo l'asse z nella direzione dell'asse ottico, il tensore di permeabilità elettrica è del tipo:

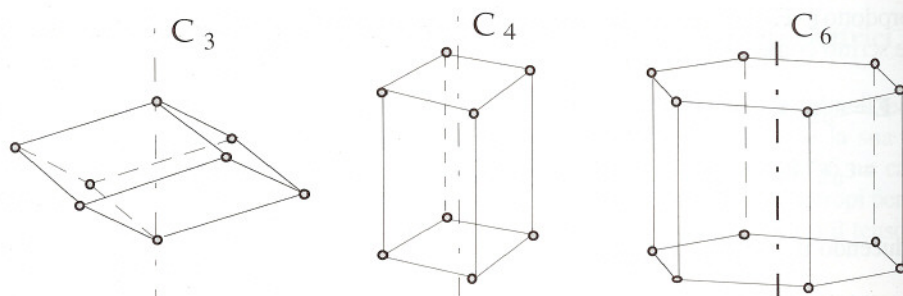



Figura 2.1

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_\perp^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_\perp^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_\parallel^2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Si ha:

$$\underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 (n_\perp^2 \, E_x \mathbf{u}_x + n_\perp^2 \, E_y \mathbf{u}_y + n_\parallel^2 \, E_z \mathbf{u}_z) = \varepsilon_0 (n_\perp^2 \, \mathbf{E}_\perp + n_\parallel^2 \, E_z \mathbf{u}_z) \tag{2.2}$$

dove $\mathbf{E}_\perp = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y$ rappresenta il campo elettrico trasversale all'asse z.

Si desidera verificare se e sotto quali condizioni le equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 (n_\perp^2 \, \mathbf{E}_\perp + n_\parallel^2 \, E_z \mathbf{u}_z) \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \, \mathbf{H}$$

ammettono come soluzione onde piane uniformi che si propagano nella direzione di un generico versore reale $\mathbf{u}$. Per tali onde si ha:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \, e^{-\gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \, e^{-\gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \qquad (\mathrm{Im}\, \gamma \geq 0) \tag{2.3}$$

dove $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, γ e $\mathbf{u}$ sono costanti. La polarizzazione è costante perché $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{H}_0$ non dipendono dalla posizione. Mediante passaggi analoghi a quelli riportati all'inizio del Paragrafo 1 Capitolo 2, sostituendo le (2.3) nelle equazioni di Maxwell si ottiene:

$$\gamma \, \mathbf{H} \times \mathbf{u} = j\omega \varepsilon_0 (n_\perp^2 \, \mathbf{E}_\perp + n_\parallel^2 \, E_z \mathbf{u}_z) \qquad \mathbf{H} = \frac{\gamma}{j\omega \mu_0} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \tag{2.4}$$

Eliminando $\mathbf{H}$ si ha:

$$-\gamma^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{u} = k_0^2 (n_\perp^2 \, \mathbf{E}_\perp + n_\parallel^2 \, E_z \mathbf{u}_z) \tag{2.5}$$

dove k_0 ha il solito significato. Detto θ l'angolo che la direzione di propagazione dell'onda forma con l'asse z, si considerino i versori **u'** e **u''** definiti come segue (vedi Figura 2.2):

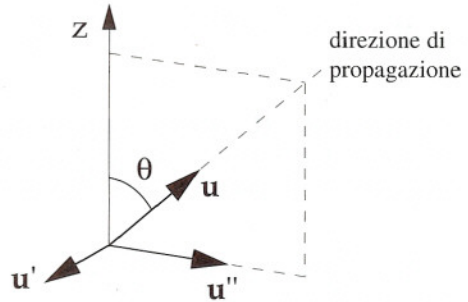
$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{u}_z}{\sin\theta} \qquad \mathbf{u}'' = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}'$$

Figura 2.2

Si ha:

$$\mathbf{u} = \sin\theta\, \mathbf{u}'' + \cos\theta\, \mathbf{u}_z$$

Inoltre, dette E' ed E'' le componenti di $\mathbf{E}_\perp$ rispetto ai due versori si ha:

$$\mathbf{E}_\perp = E'\mathbf{u}' + E''\mathbf{u}''$$

Pertanto:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{u} = \mathbf{E} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})\, \mathbf{u} = E'\mathbf{u}' + [E'' - (\sin\theta\, E'' + \cos\theta\, E_z) \sin\theta]\, \mathbf{u}''$$

$$+ [E_z - (\sin\theta\, E'' + \cos\theta\, E_z) \cos\theta]\, \mathbf{u}_z$$

Sostituendo nelle (2.5) e uguagliando le componenti dei vettori al primo e al secondo membro si ottiene:

$$-\gamma^2 E' = k_0^2 n_\perp^2 E'$$

$$\gamma^2 [(\sin\theta E'' + \cos\theta E_z)\sin\theta - E''] = k_0^2 n_\perp^2 E''$$

$$\gamma^2 [(\sin\theta E'' + \cos\theta E_z)\cos\theta - E_z] = k_0^2 n_\parallel^2 E_z$$

La prima equazione è disaccoppiata dalle altre due. Pertanto si vede subito che si hanno due possibili soluzioni: nella prima l'unica componente non nulla del campo elettrico è E' e soddisfa la prima equazione (le altre due sono identicamente verificate se E'' ed E_z sono nulli); nella seconda E'' ed E_z differiscono da zero e soddisfano la seconda e la terza equazione, mentre E' è nulla (così la prima equazione è identicamente verificata).

1ª SOLUZIONE: ONDA ORDINARIA ($E'' = E_z = 0$, $E' \neq 0$) La costante γ deve essere tale da verificare la relazione:

$$(k_0^2 n_\perp^2 + \gamma^2) E' = 0$$

Dunque:

$$\gamma = jk_0 n_\perp$$

La soluzione considerata porta alle seguenti espressioni di **E** e di **H**:

$$\mathbf{E} = A\mathbf{u}'\, e^{-jk_0 n_\perp \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \qquad (A \text{ costante arbitraria})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}\times\mathbf{u}'\,\frac{A}{\eta'}\, e^{-jk_0 n_\perp \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \qquad (\eta' = \eta_0/n_\perp) \tag{2.6}$$

(l'espressione di **H** è ottenuta mediante la seconda delle (2.4)). La velocità di fase ($v = c/n_\perp$) e l'indice di rifrazione visto dall'onda ($c/v = n_\perp$) sono indipendenti dalla direzione di propagazione. L'onda è di tipo TEM e la densità di potenza è data da:

$$\mathbf{S} = \frac{|A|^2}{2\eta'}\,\mathbf{u}'\times(\mathbf{u}\times\mathbf{u}') = \frac{|A|^2}{2\eta'}\,\mathbf{u}$$

Quest'ultimo risultato mostra che l'onda ordinaria trasporta energia nella direzione di propagazione, come in un mezzo isotropo. L'unica differenza rispetto al caso del mezzo isotropo è costituita dalla polarizzazione, che non è arbitraria, ma necessariamente lineare, con il campo elettrico in direzione perpendicolare all'asse z e alla direzione di propagazione (Figura 2.3).

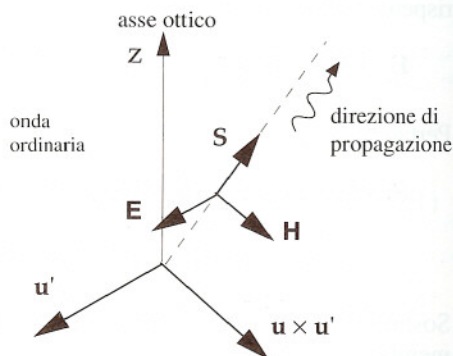



Figura 2.3

2ª SOLUZIONE: ONDA STRAORDINARIA ($E'' \neq 0, E_z \neq 0, E' = 0$) E'' ed E_z devono soddisfare le equazioni

$$\begin{aligned} &-(\gamma^2\cos^2\theta + k_0^2 n_\perp^2)E'' + \gamma^2 \sin\theta\cos\theta\, E_z = 0 \\ &\gamma^2 \sin\theta\cos\theta\, E'' - (\gamma^2 \sin^2\theta + k_0^2 n_\parallel^2)E_z = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

cosa possibile, a patto che il determinante del sistema sia nullo. Annullando il determinante si ottiene:

$$\gamma^2 (n_\parallel^2 \cos^2\theta + n_\perp^2 \sin^2\theta) + k_0^2 n_\parallel^2 n_\perp^2 = 0$$

Questa relazione è verificata se:

$$\gamma = jk_0 \frac{n_\parallel n_\perp}{\sqrt{n_\parallel^2 \cos^2\theta + n_\perp^2 \sin^2\theta}} \tag{2.8}$$

Sostituendo questo valore di γ nel sistema (2.7) si ottiene:

$$\frac{E_z}{E''} = -\left(\frac{n_\perp}{n_\parallel}\right)^2 \text{tg}\theta \tag{2.9}$$

Il campo elettrico è diretto come il versore $\hat{\mathbf{u}}$ indicato nella Figura 2.4; tale versore giace sul piano formato dall'asse ottico e dalla direzione di propagazione e forma con l'asse ottico un certo angolo δ, determinato dalla relazione:

$$\text{cotg}\,\delta = \frac{E_z}{-E''} = \left(\frac{n_\perp}{n_\parallel}\right)^2 \text{tg}\theta \tag{2.10}$$

Il campo elettrico è polarizzato linearmente nella direzione del versore $\hat{\mathbf{u}}$ e forma con la direzione di propagazione l'angolo $\Phi = \delta + \theta$ (vedi figura). Usando la (2.10), dopo qualche passaggio si ottiene:

$$\sin\Phi = \frac{n_\parallel^2 \cos^2\theta + n_\perp^2 \sin^2\theta}{\sqrt{n_\parallel^4 \cos^2\theta + n_\perp^4 \sin^2\theta}} \tag{2.11}$$

Utilizzando la relazione $\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' \sin\Phi$ e tenendo conto della (2.8) si ottengono le seguenti espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} = B\,\hat{\mathbf{u}}\,e^{-jk_0 \tilde{n}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{u}'\frac{B}{\eta''}e^{-jk_0 \tilde{n}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \tag{2.12}$$

dove B è una costante arbitraria e

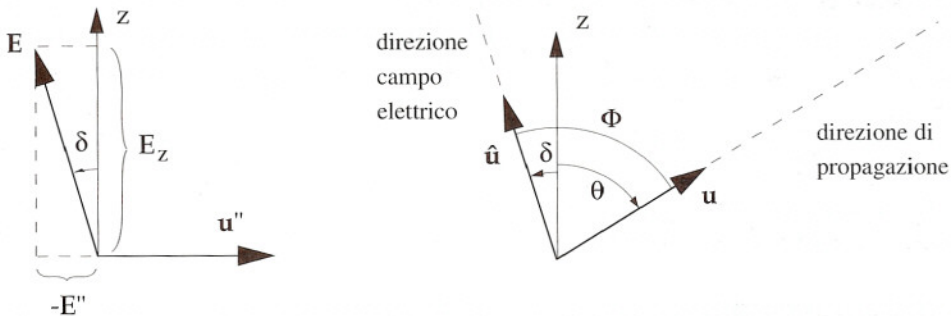



Figura 2.4

$$\tilde{n} = \frac{n_{\parallel} n_{\perp}}{\sqrt{n_{\parallel}^2 \cos^2\theta + n_{\perp}^2 \sin^2\theta}} \tag{2.13}$$

$$\eta'' = \frac{\eta_0}{\tilde{n} \sin\Phi} \tag{2.14}$$

Le (2.12) rappresentano la cosiddetta "onda straordinaria". L'indice di rifrazione visto dall'onda straordinaria è ñ, dato che la velocità di fase è v = c/ñ. La velocità dipende dalla direzione di propagazione perché ñ dipende da θ. Anche la polarizzazione dell'onda straordinaria è lineare, con il campo elettrico sul piano formato dall'asse ottico e dalla direzione di propagazione e il campo magnetico normale a tale piano (Figura 2.5). Se si escludono i casi particolari $\theta = 0$ e $\theta = 90°$, l'onda straordinaria è di tipo TM; infatti, esclusi questi casi, risulta $\sin\Phi \neq 1$, così che il campo elettrico non è perpendicolare alla direzione di propagazione. La densità di potenza dell'onda straordinaria è

Figura 2.5

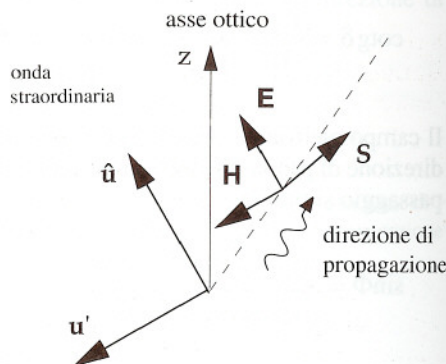
$$\mathbf{S} = \frac{|B|^2}{2\eta''} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}' \tag{2.15}$$

Poiché il versore $\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}'$ è generalmente diverso da $\mathbf{u}$, l'onda straordinaria trasmette energia in direzione generalmente diversa da quella di propagazione.

La precedente discussione ha mostrato che, considerata una generica direzione di propagazione, in un cristallo uniassico si hanno due possibili onde piane uniformi, polarizzate linearmente in direzioni ortogonali. Se le due onde sono entrambe presenti, il campo risultante è rappresentato dalle seguenti espressioni, ottenute sovrapponendo le (2.6) e (2.12):

$$\mathbf{E} = A\,\mathbf{u}'\, e^{-jk_0 n_{\perp} \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} + B\,\hat{\mathbf{u}}\, e^{-jk_0 \tilde{n}\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{u}' \frac{A}{\eta'} e^{-jk_0 n_{\perp} \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{u}' \frac{B}{\eta''} e^{-jk_0 \tilde{n}\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}$$

Scegliendo opportunamente i valori di A e di B è possibile ottenere tutte le polarizzazioni possibili. Però, a causa della differenza degli indici di rifrazione, la relazione di fase fra le componenti di **E** (o di **H**) varia quando ci si sposta lungo la direzione di propagazione, cosicché la polarizzazione varia lungo la direzione di propagazione. Fa eccezione il caso in

cui la propagazione avviene nella direzione dell'asse ottico ($\theta = 0$), perché in questa direzione risulta $\tilde{n} = n_\perp$. Le onde che si propagano nella direzione dell'asse ottico mantengono immutata la polarizzazione, anche se essa non coincide né con quella dell'onda ordinaria né con quella dell'onda straordinaria. Dunque, nella direzione dell'asse ottico, la propagazione avviene come in un dielettrico isotropo con indice di rifrazione $n_\perp$.[1]

10.3 Superficie degli indici

In generale, nello studio delle onde piane nei monocristalli anisotropi, si trova che per ogni direzione di propagazione si hanno due possibili onde, con polarizzazioni ben determinate e velocità generalmente diverse. Questo fenomeno prende il nome di "birifrangenza". Il diagramma polare che rappresenta gli indici di rifrazione (c/v) visti dalle due onde in tutte le possibili direzioni di propagazione prende il nome di "superficie degli indici". Poiché nelle varie direzioni si hanno generalmente due diversi valori dell'indice di rifrazione, la superficie degli indici è costituita dall'unione di due superfici, una per ciascuna onda.

Nel caso dei cristalli uniassici la superficie degli indici è evidentemente simmetrica rispetto all'asse ottico; essa è costituita dall'unione della superficie sferica $n = n_\perp$ (per l'onda ordinaria, vedi Figura 3.1*a*) e dalla superficie che rappresenta la (2.13) (per l'onda straordinaria). La natura di quest'ultima superficie diviene evidente considerando l'equazione

$$\frac{(\tilde{n}\cos\theta)^2}{n_\perp^2} + \frac{(\tilde{n}\sin\theta)^2}{n_\parallel^2} = 1$$

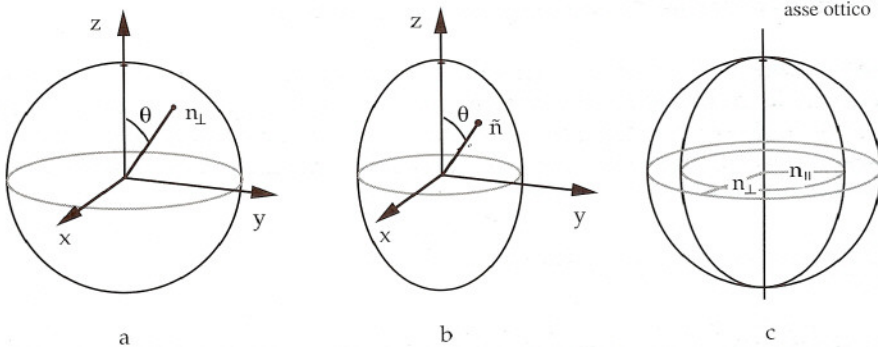



Figura 3.1

1 La ragione fisica è evidente: poichè il campo elettrico è trasversale a z, qualunque sia la sua polarizzazione, l'unica componete del tensore di permeabilità che entra in gioco è $\varepsilon_\perp$.

ottenuta, elevando al quadrato i due membri della (2.13). Infatti, le coordinate cartesiane X, Y, Z di un punto della superficie in questione soddisfano le equazioni (vedi Figura 3.1*b*):

$$(\tilde{n}\sin\theta)^2 = X^2 + Y^2 \qquad (\tilde{n}\cos\theta)^2 = Z^2$$

e quindi si ha:

$$\frac{X^2}{n_{\parallel}^2} + \frac{Y^2}{n_{\parallel}^2} + \frac{Z^2}{n_{\perp}^2} = 1$$

Questa è l'equazione di un ellissoide di rivoluzione ("ellissoide degli indici"), i cui semiassi sono $n_{\perp}$ (nella direzione dell'asse ottico) e $n_{\parallel}$ (nelle direzioni x e y). Dunque l'indice di rifrazione dell'onda straordinaria è compreso fra i valori $n_{\perp}$ (propagazione nella direzione di z) e $n_{\parallel}$ (propagazione in qualsiasi direzione perpendicolare a z).[1] L'intera superficie degli indici è rappresentata nella Figura 3.1*c*.

L'ellissoide degli indici gode di certe proprietà che permettono di vedere facilmente quale sia la direzione di trasmissione dell'energia e la direzione del campo elettrico per un'onda straordinaria che si propaga in una direzione assegnata. Si supponga che questa direzione giaccia sul piano y = 0 (questa ipotesi non limita la generalità del discorso, a causa della simmetria). L'intersezione dell'ellissoide degli indici con questo piano è rappresentata dall'equazione dell'ellisse

$$\frac{X^2}{n_{\parallel}^2} + \frac{Z^2}{n_{\perp}^2} = 1$$

Derivando rispetto a X si ha:

$$\frac{dZ}{dX} = -\left(\frac{n_{\perp}}{n_{\parallel}}\right)^2 \frac{X}{Z} = -\left(\frac{n_{\perp}}{n_{\parallel}}\right)^2 \operatorname{tg}\theta$$

Quindi, ricordando la (2.9), si ottiene:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{E_z}{E''}$$

Questa espressione mostra che la tangente all'ellisse è parallela alla direzione del campo elettrico (vedi Figura 3.2*a*). Pertanto, considerata un'onda che si propaga nella direzione della semiretta *a* (Figura 3.2*b*) e indicato con P il punto di intersezione fra la semiretta e l'ellissoide, si possono enunciare le seguenti proprietà:

1 Nella Figura 3.1*b* si è supposto $n_{\perp} > n_{\parallel}$, ma questo non costituisce una regola.

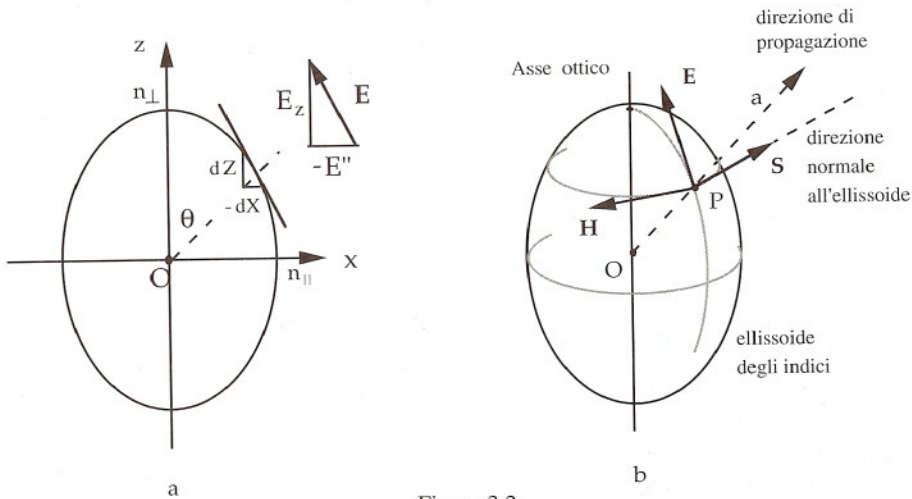



Figura 3.2

a) - la lunghezza del segmento OP rappresenta l'indice di rifrazione dell'onda straordinaria nella direzione di propagazione considerata;
b) - il campo elettrico e il campo magnetico sono tangenti al meridiano e al parallelo passanti per P, rispettivamente;
c) - la direzione di trasmissione dell'energia (cioè la direzione del vettore di Poynting) è quella della normale all'ellissoide nel punto P (perché sia **E** che **H** sono tangenti all'ellissoide).

Nel caso dei cristalli appartenenti ai sistemi rombico, monoclino e triclino le tre permeabilità elettriche principali hanno valori diversi. Lo studio della propagazione viene svolto seguendo un procedimento analogo a quello già visto, ma un poco più complicato.[1] Si trova che le due possibili onde che possono propagarsi in una generica direzione hanno generalmente velocità di fase diverse e che, quindi esse vedono indici di rifrazione diversi. *Entrambi* gli indici dipendono dalla direzione. La superficie degli indici è simmetrica rispetto ai piani coordinati del sistema di assi principali e, per questo, è sufficiente rappresentarla in un solo ottante, come nella Figura 3.3. Anche in questo caso, la direzione in cui si trasmette l'energia è quella delle normali alla superficie degli indici nei due punti di intersezione con la semiretta che rappresenta la direzione di propagazione. Le due parti della superficie si toccano in quattro punti (i punti P e Q e i loro simmetrici rispetto al piano xy). Tali punti identificano due particolari direzioni di propagazione in cui gli indici di rifrazione delle due onde coincidono, come nel caso dell'asse ottico dei cristalli uniassici. Anche queste direzioni sono dette "assi ottici"; poiché esse sono due, i cristalli appartenenti ai sistemi rombico, monoclino e triclino sono detti "biassici".

---

1 Si veda ad esempio: L. Landau, E. Lifchitz, *Physique Theorique, Vol. VIII (Electrodinamique des milieux continus)*, Ed. MIR, Moscou, 1969, § 79.

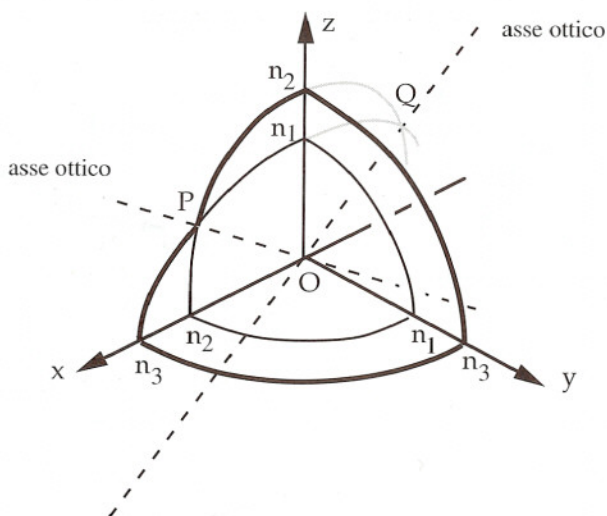



Figura 3.3

10.4 Riflessione e trasmissione sull'interfaccia fra un mezzo isotropo e un cristallo uniassico

Un'onda piana uniforme, proveniente da un mezzo isotropo (mezzo 1), incide normalmente sulla superficie piana di un cristallo uniassico (mezzo 2, vedi Figura 4.1). La fase del campo incidente è costante sull'interfaccia, cosicché le fasi dei campi riflesso e trasmesso sono pure costanti. Dunque anche le onde riflessa e trasmessa si propagano in direzione perpendicolare all'interfaccia (asse z). Il cristallo è orientato in modo che l'asse ottico formi l'angolo θ rispetto all'asse z. Gli assi x, y, posti sull'interfaccia, sono orientati in modo che l'asse y sia perpendicolare all'asse ottico.

Se l'onda incidente è polarizzata linearmente con il campo elettrico perpendicolare all'asse ottico (Figura 4.1*a*), l'onda trasmessa è un'onda ordinaria (solo così la polarizzazione dei campi tangenziali è identica a sinistra e a destra dell'interfaccia). Analogamente, quando l'onda incidente è polarizzata linearmente con il campo magnetico perpendicolare all'asse ottico (Figura 4.1*b*), l'onda trasmessa è un'onda straordinaria. Infine, se l'onda incidente è polarizzata in modo diverso dai precedenti, essa può sempre essere scomposta in due onde polarizzate linearmente nelle direzioni suddette; in questo caso, nel cristallo, si hanno assieme sia l'onda ordinaria che quella straordinaria.

Nel caso di Figura 4.1*a* i campi nei due mezzi sono:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{u}_y \left(A\, e^{-jk_0 n_1 z} + \Gamma' A\, e^{jk_0 n_1 z} \right)$$

$$\mathbf{H}_1 = -\mathbf{u}_x \frac{A\, e^{-jk_0 n_1 z} - \Gamma' A\, e^{jk_0 n_1 z}}{\eta_1} \qquad z < 0$$

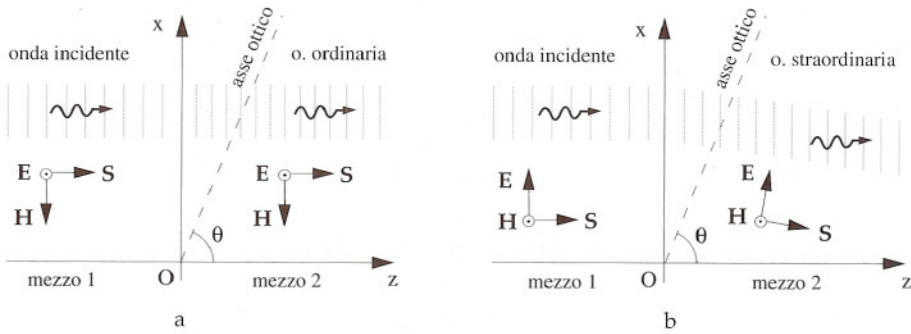



Figura 4.1

$$\mathbf{E}_2 = T'\,A\,\mathbf{u}_y\, e^{-jk_0 n_\perp z}$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{T'\,A\,\mathbf{u}_x}{\eta'} e^{-jk_0 n_\perp z} \qquad z > 0$$

dove A è una costante, n_1 e η_1 sono l'indice di rifrazione e l'impedenza caratteristica del mezzo 1 e Γ', T' sono i coefficienti di riflessione e di trasmissione. Per determinare Γ', T' bisogna imporre la continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico. Poiché nell'onda ordinaria **E** e **H** sono paralleli all'interfaccia (come nel caso in cui il mezzo 2 è isotropo) si ottengono espressioni analoghe a quelle trovate nel Paragrafo 8 del Capitolo 2, in cui, però, l'indice di rifrazione del mezzo 2 è sostituito da quello visto dall'onda ordinaria ($n_\perp$). Si ha:

$$\Gamma' = \frac{\eta' - \eta_1}{\eta' + \eta_1} = \frac{n_1 - n_\perp}{n_1 + n_\perp} \qquad T' = \frac{2\eta'}{\eta' + \eta_1} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_\perp}$$

Nel caso di Figura 4.1*b* il campo elettrico dell'onda trasmessa forma con l'asse z l'angolo Φ (vedi Equazione 2.11). In questo caso si ha:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{u}_x \left(B e^{-jk_0 n_1 z} + \Gamma'' B e^{jk_0 n_1 z}\right)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{u}_y \frac{B e^{-jk_0 n_1 z} - \Gamma'' B e^{jk_0 n_1 z}}{\eta_1} \qquad z < 0$$

$$\mathbf{E}_2 = T'' B (\sin\Phi\, \mathbf{u}_x + \cos\Phi\, \mathbf{u}_z) e^{-jk_0 \tilde{n} z}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{T'' B}{\eta''} \mathbf{u}_y\, e^{-jk_0 \tilde{n} z} \qquad z > 0$$

dove B è una costante e Γ", T" sono il coefficiente di riflessione e il coefficiente di trasmissione. Imponendo la continuità delle componenti dei campi secondo x e y e ricordando la (2.14) si trova facilmente:[1]

$$\Gamma''=\frac{\eta''\sin\Phi-\eta_1}{\eta''\sin\Phi+\eta_1}=\frac{n_1-\tilde{n}}{n_1+\tilde{n}} \qquad T''=\frac{2\eta''}{\eta''\sin\Phi+\eta_1}=\frac{2n_1}{(n_1+\tilde{n})\sin\Phi}$$

Infine, se l'onda incidente è polarizzata in maniera arbitraria si ha:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_1&=(A\,\mathbf{u}_y+B\,\mathbf{u}_x)e^{-jk_0 n_1 z}+(\Gamma'A\,\mathbf{u}_y+\Gamma''B\,\mathbf{u}_x)e^{jk_0 n_1 z}\\ \mathbf{H}_1&=\frac{-A\,\mathbf{u}_x+B\,\mathbf{u}_y}{\eta_1}e^{-jk_0 n_1 z}+\frac{\Gamma'A\,\mathbf{u}_x-\Gamma''B\,\mathbf{u}_y}{\eta_1}e^{jk_0 n_1 z}\end{aligned}\right\}\quad z<0$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_2&=T'A\,\mathbf{u}_y\,e^{-jk_0 n_\perp z}+T''B(\sin\Phi\,\mathbf{u}_x+\cos\Phi\,\mathbf{u}_z)e^{-jk_0\tilde{n}z}\\ \mathbf{H}_2&=-\frac{T'A\,\mathbf{u}_x}{\eta'}e^{-jk_0 n_\perp z}+\frac{T''B}{\eta''}\sin\Phi\,\mathbf{u}_y\,e^{-jk_0\tilde{n}z}\end{aligned}\right\}\quad z>0$$

Merita particolare attenzione il caso in cui l'asse ottico è parallelo al piano d'interfaccia e l'onda incidente è tale da determinare su questo piano un campo elettrico $\mathbf{E}_2$, polarizzato linearmente a 45° rispetto all'asse ottico (Figura 4.2). In questo caso si ha:[2]

$$\theta=90^\circ \qquad \Phi=90^\circ \qquad \tilde{n}=n_\parallel \qquad T''=\frac{2n_1}{n_1+n_\parallel}$$

$$T'A=T''B$$

e il campo elettrico nel cristallo è dato da:

$$\mathbf{E}_2=T'A(\mathbf{u}_x\,e^{-jk_0 n_\parallel z}+\mathbf{u}_y\,e^{-jk_0 n_\perp z})$$

Procedendo lungo z le fasi di E_{2x} e di E_{2y} variano in maniera diversa, a causa della diversità degli indici di rifrazione $n_\perp$ e $n_\parallel$; pertanto, all'ascissa z, E_{2y} è sfasata in ritardo rispetto a E_{2x} dell'angolo:

1 Queste formule sono leggermente diverse da quelle del Capitolo 2 perché, a causa dell'inclinazione di $\mathbf{E}_2$, la componente tangenziale E_{2x} non è T"B, bensì T"B$\sin\Phi$.

2 Nell'onda incidente deve aversi B = (T'/T")A. Poiché i coefficenti di trasmissione sono reali positivi B e A devono essere in fase, e quindi l'onda incidente deve essere pure polarizzata linearmente, ma in direzione diversa da 45°. La differenza in genere è piccola perché T' e T" non sono molto diversi.

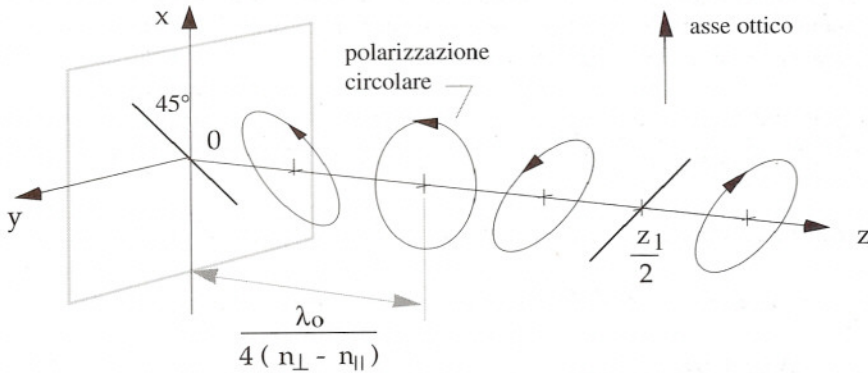



Figura 4.2

$$k_0(n_\perp - n_\parallel)z = 2\pi(n_\perp - n_\parallel)z/\lambda_0 \tag{4.1}$$

A causa dello sfasamento fra le componenti, la polarizzazione di $\mathbf{E}_2$ non si mantiene uguale a quella iniziale, tranne che alle ascisse per cui lo sfasamento è un multiplo di 2π. Tali ascisse sono

$$z_m = \frac{m\lambda_0}{|n_\perp - n_\parallel|} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4.2}$$

Si ha pure polarizzazione lineare (in direzione perpendicolare a quella originaria) a metà strada fra le posizioni suddette, dove le due componenti sono in opposizione di fase (vedi figura). La polarizzazione diviene circolare quando le componenti sono in quadratura, cosa che si verifica alle ascisse:

$$(2m-1)\frac{\lambda_0}{4|n_\perp + n_\parallel|} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4.3}$$

In tutte le altre posizioni la polarizzazione è ellittica.

Se il mezzo 2 è uno strato di spessore finito il calcolo dei coefficienti di riflessione e di trasmissione deve essere modificato perché bisogna tener conto delle onde (ordinaria e straordinaria) riflesse dalla seconda interfaccia.
Le precedenti considerazioni fanno però intuire che, anche in questo caso, la polarizzazione cambia all'interno dello strato, e che sulla seconda interfaccia si ha una polarizzazione - in generale ellittica, in casi particolari circolare o lineare - che differisce da quella dell'onda incidente. Così la polarizzazione dell'onda trasmessa al di là dello strato è diversa da quella dell'onda incidente. La trasformazione di polarizzazione fra l'ingresso e l'uscita dello strato dipende dalla differenza degli indici di rifrazione ordinario e straordinario e dallo spessore dello strato. Questo fenomeno è sfruttato in Ottica per trasformare la polarizzazione di un'onda luminosa.

Come si può immaginare, lo studio della riflessione e della trasmissione nel caso di incidenza obliqua è più complicato, anche se non presenta particolari difficoltà concettuali. Per questa ragione ci si limita a indicare alcuni risultati, senza entrare nel dettaglio dei calcoli. Come nei mezzi isotropi, la direzione di propagazione delle varie onde è sempre parallela al piano d'incidenza e viene sempre rispettata la legge della riflessione (queste proprietà dipendono solo dal fatto che l'andamento delle fasi delle varie onde deve essere identico sull'interfaccia).
Rispetto al caso dei mezzi isotropi la differenza più importante consiste nel fatto che si hanno due onde trasmesse che si propagano in direzione diversa (fenomeno della "doppia rifrazione"), con velocità di fase dipendenti dall'indice di rifrazione ordinario (onda ordinaria) e dall'indice di rifrazione straordinario (onda straordinaria). Inoltre la direzione dei raggi straordinari (cioè delle linee di flusso di **S** nell'onda straordinaria) non è generalmente parallela al piano d'incidenza, essendo in genere diversa da quella di propagazione.

Le onde elettromagnetiche emesse da molti apparati ottici, considerate entro distanze non troppo grandi, sono descrivibili nei termini dell'Ottica Geometrica come fasci di raggi paralleli. Poiché le variazioni del campo in direzione parallela ai fronti d'onda sono apprezzabili solo entro distanze molto maggiori di λ_0, lo studio della trasmissione dei fasci paralleli attraverso un cristallo può essere assimilato a quello della trasmissione di un'onda piana uniforme. Il fenomeno della doppia rifrazione determina la suddivisione del fascio incidente in due fasci separati, cosicché l'energia elettromagnetica inizialmente fluente in un fascio unico, viene suddivisa su due fasci separati.

La separazione dei fasci ha luogo anche nel caso di incidenza normale (Figura 4.3), purché il fascio incidente sia polarizzato ellitticamente e l'asse ottico non sia perpendicolare al fascio. Ciò dipende dal diverso orientamento delle densità di potenza nel fascio ordinario e in quello straordinario (vedi anche Figura 4.1). La polarizzazione dei fasci trasmessi oltre il cristallo è ben determinata, essendo quella dell'onda ordinaria o dell'onda straordinaria.

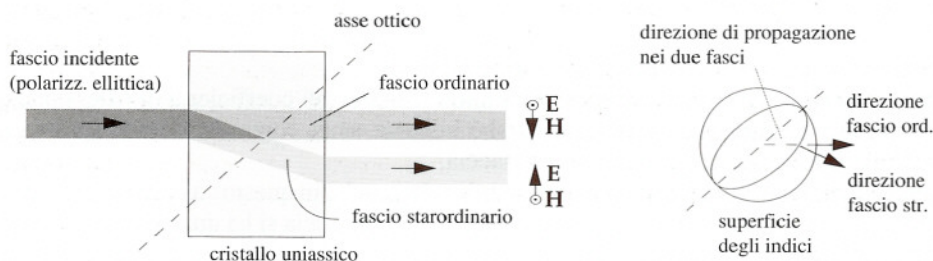



Figura 4.3

10.5 Effetto Kerr

L'azione di un'intenso campo elettrostatico sovrapposto al campo di un'onda ad altissima frequenza (tipicamente nella regione ottica) fa sì che certe sostanze, naturalmente isotrope, diventino anisotrope nei riguardi dell'onda. Questo fenomeno viene detto "effetto Kerr". Esso è particolarmente pronunciato in certi liquidi polari (es. solfuro di carbonio, nitrobenzolo) costituiti da molecole che hanno polarizzabilità elettronica diversa nelle varie direzioni. In assenza del campo elettrostatico l'anisotropia molecolare non provoca effetti macroscopici, a causa dell'orientamento casuale delle molecole;[1] così la sostanza ha comportamento isotropo. Il campo elettrostatico orienta le molecole e traduce in anisotropia macroscopica l'anisotropia microscopica delle molecole stesse. Si noti che, a causa dell'altissima frequenza, l'orientamento delle molecole non risente del passaggio dell'onda e che, quindi, la propagazione dipende solo dalla polarizzabilità elettronica delle molecole.

Indicando con E_s l'intensità del campo elettrostatico e supponendo che questo sia diretto secondo l'asse z, il tensore di permeabilità elettrica ha la forma seguente:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' + \alpha E_s^2 \end{bmatrix}$$

dove $\varepsilon_0 \varepsilon'$ è la costante dielettrica del mezzo isotropo e α è una costante caratteristica del mezzo. L'effetto è molto piccolo e, anche con i più alti valori di E_s, risulta $\alpha E_s^2 << \varepsilon'$. La struttura del tensore di permeabilità elettrica è analoga a quella che si ha in un cristallo uniassico con asse ottico nella direzione del campo elettrostatico. I due indici di rifrazione principali sono:

$$n_\perp = \sqrt{\varepsilon'} \qquad n_\| = \sqrt{\varepsilon' + \alpha E_s^2} \approx \sqrt{\varepsilon'}\left(1 + \frac{\alpha E_s^2}{2\varepsilon'}\right) = n_\perp + \frac{\alpha E_s^2}{2 n_\perp}$$

L'effetto Kerr può essere utilizzato per realizzare strati che trasformano la polarizzazione di un'onda polarizzata linearmente in misura dipendente dal campo elettrico applicato. Il meccanismo che determina la variazione della polarizzazione è quello visto nel paragrafo precedente (vedi Figura 4.2). Il fatto che la birifrangenza dipenda dall'intensità del campo elettrostatico permette di controllare il tipo di polarizzazione in uscita dallo strato variando l'intensità del campo (cella di Kerr). Infatti, indicato con d lo spessore dello strato, la trasformazione di polarizzazione dipende dalla quantità (vedi Equazione 4.1):

---

1 Si noti che il campo dell'onda luminosa non ha alcuna influenza sull'orientamento delle molecole a causa della sua frequenza molto elevata. Un semplice modello di questo meccanismo è discusso in A.R. Von Hippel, *Dielectrics and Waves*, M.I.T press, 1966 (student edition), p. 274.

$$\frac{(n_\perp - n_\parallel)d}{\lambda_0} = -\frac{\alpha E_s^2 d}{2n_\perp \lambda_0} = KE_s^2 d$$

dove:

$$K = -\alpha/(2n_\perp\lambda_0) \qquad \text{(costante di Kerr)}$$

Il campo che induce la birifrangenza può in effetti variare nel tempo, purché le variazioni siano tanto lente da permettere un'efficace orientamento delle molecole polari. Come si è visto nel Capitolo 1, anche campi che variano a frequenze dell'ordine di parecchi megahertz o decine di megahertz sono sufficientemente lenti da questo punto di vista. Dunque la polarizzazione in uscita dalla cella di Kerr può essere controllata con buona rapidità.

10.6 Propagazione in un mezzo giroelettrico

Come si è visto nel Paragrafo 1, un materiale isotropo sottoposto all'azione di un campo magnetostatico di induzione $\mathbf{B}_0$ diviene giroelettrico, con il vettore di girazione diretto come $\mathbf{B}_0$. La direzione di $\mathbf{B}_0$ costituisce un asse principale del tensore $\underline{\varepsilon}'$ mentre gli altri due assi possono essere scelti ad arbitrio. Prendendo l'asse z nella direzione di $\mathbf{B}_0$ si ha:

$$\underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + j\varepsilon_0 g \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}$$

ovvero:

$$\underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_\perp E_x \mathbf{u}_x + \varepsilon_\perp E_y \mathbf{u}_y + \varepsilon_\parallel E_z \mathbf{u}_z) + j\varepsilon_0 g \mathbf{u}_z \times \mathbf{E} =$$

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_\perp \mathbf{E}_\perp + jg \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_\perp) + \varepsilon_0 \varepsilon_\parallel E_z \mathbf{u}_z$$

Considerando un'onda piana del tipo (2.3), sostituendo nelle equazioni di Maxwell e ripetendo i passaggi che hanno portato alle (2.4) e (2.5), si ottengono le seguenti equazioni:[1]

$$\mathbf{H} = \frac{\gamma}{j\omega\mu_0} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \qquad (6.1)$$

1 La (6.2) differisce dalla (2.5) solo per la presenza del termine aggiuntivo dipendente da g (nell'Equazione (2.5) si era posto $\varepsilon_\perp = n_\perp^2$, $\varepsilon_\parallel = n_\parallel^2$).

$$-\gamma^2(\mathbf{u}\times\mathbf{E})\times\mathbf{u} = k_0^2(\varepsilon_\perp \mathbf{E}_\perp + \varepsilon_\parallel E_z \mathbf{u}_z + jg\,\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_\perp) \tag{6.2}$$

La (6.2) permette di determinare γ per ogni direzione di propagazione. I calcoli sono più semplici se ci si limita a considerare le onde che si propagano in direzione parallela o perpendicolare al campo magnetostatico.

PROPAGAZIONE NELLA DIREZIONE DEL CAMPO MAGNETOSTATICO In questo caso si ha $\mathbf{u} = \pm\,\mathbf{u}_z$, secondo che l'onda si propaghi nel verso di $\mathbf{B}_0$ o nel verso opposto. Si ha inoltre:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{E})\times\mathbf{u} = (\pm\mathbf{u}_z\times\mathbf{E})\times(\pm\mathbf{u}_z) = (\mathbf{u}_z\times\mathbf{E}_\perp)\times\mathbf{u}_z = \mathbf{E}_\perp$$

Sostituendo nella (6.2) e uguagliando le componenti omonime si ottiene:

$$(k_0^2\varepsilon_\perp + \gamma^2)E_x - jg\,k_0^2 E_y = 0$$

$$jg\,k_0^2 E_x + (k_0^2\varepsilon_\perp + \gamma^2)E_y = 0$$

$$E_z = 0$$

Le prime due equazioni ammettono soluzioni non banali solo se il determinante del sistema è nullo. Annullando il determinate si ha:

$$(k_0^2\varepsilon_\perp + \gamma^2)^2 = g^2 k_0^4 \qquad \text{ovvero} \qquad k_0^2\varepsilon_\perp + \gamma^2 = \pm g\,k_0^2$$

Si ottengono i due seguenti valori di γ:

$$\gamma_1 = jk_0\sqrt{\varepsilon_\perp - g} \qquad \gamma_2 = jk_0\sqrt{\varepsilon_\perp + g}$$

Sostituendo questi valori nel sistema si trova:

$$E_y = -jE_x \quad (\text{caso } \gamma = \gamma_1) \qquad E_y = jE_x \quad (\text{caso } \gamma = \gamma_2)$$

In definitiva si ottengono le due seguenti possibili forme del campo elettrico:

$$\mathbf{E}_1 = A(\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y)e^{\pm j\beta_1 z} \qquad (\text{onda ciclotronica}) \tag{6.3a}$$

$$\mathbf{E}_2 = B(\mathbf{u}_x + j\mathbf{u}_y)e^{\pm j\beta_2 z} \qquad (\text{onda anticiclotronica}) \tag{6.3b}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie e inoltre

$$\beta_1 = k_0\sqrt{\varepsilon_\perp - g} \qquad (\text{costante di fase dell'onda ciclotronica}) \tag{6.4a}$$

$$\beta_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_\perp + g} \qquad (\text{costante di fase dell'onda anticiclotronica}) \tag{6.4b}$$

Se β_1 e β_2 sono reali le onde si propagano. Nelle (6.3) il doppio segno all'esponente dipende dal fatto che sono state considerate onde che si propagano nel verso di $\mathbf{B}_0$ (segno –) e nel verso opposto (segno +). Entrambe le onde hanno polarizzazione circolare, levogira o destrogira secondo il verso di propagazione (Figura 6.1). Nelle onde ciclotroniche il verso di rotazione è positivo rispetto a $\mathbf{B}_0$, *indipendentemente dalla direzione di propagazione*; nelle onde anticiclotroniche il verso di rotazione è quello negativo. Le onde ciclotroniche (anticiclotroniche) prendono questo nome per il fatto che il verso di rotazione è coincidente (opposto) a quello di un elettrone che compie il moto ciclotronico intorno al campo magnetostatico. Utilizzando la (6.1) si trovano i campi magnetici per i due tipi di onde:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{A}{\eta_1}(\mathbf{u}_y + j\mathbf{u}_x)e^{\pm j\beta_1 z} \qquad \text{(onda ciclotronica)}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{B}{\eta_2}(\mathbf{u}_y - j\mathbf{u}_x)e^{\pm j\beta_2 z} \qquad \text{(onda anticiclotronica)}$$

dove:

$$\eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_\perp - g}} \qquad \eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_\perp + g}}$$

Le due onde sono di tipo TEM perché sia E_z che H_z sono nulli.

PROPAGAZIONE IN DIREZIONE PERPENDICOLARE AL CAMPO MAGNETOSTATICO Siccome tutte le direzioni perpendicolari a $\mathbf{B}_0$ sono fisicamente equivalenti, si può supporre che la direzione e il verso di propagazione siano quelli dell'asse x ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_x$), senza che questo diminuisca la generalità dei risultati. Si ha:

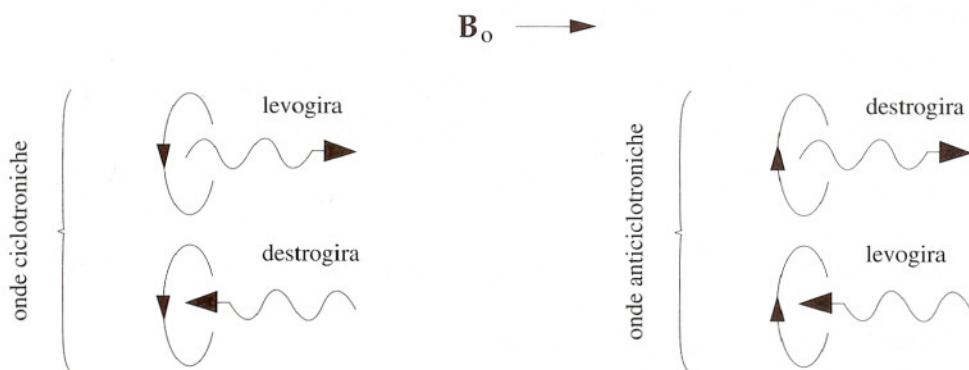



Figura 6.1

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{u} = \mathbf{E} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})\, \mathbf{u} = \mathbf{E} - E_x \mathbf{u}_x = E_y\, \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_\perp = E_x\, \mathbf{u}_y - E_y\, \mathbf{u}_x$$

Pertanto, sostituendo nella (6.2) si ottiene:

$$0 = k_0^2 (\varepsilon_\perp E_x - jg E_y)$$

$$-\gamma^2 E_y = k_0^2 (\varepsilon_\perp E_y + jg E_x)$$

$$-\gamma^2 E_z = k_0^2 \varepsilon_\parallel E_z$$

L'ultima equazione è disaccoppiata dalle altre due. Pertanto si ha una soluzione in cui la componente E_z è nulla, mentre le altre due componenti sono diverse da zero e soddisfano il sistema costituito dalla prima coppia di equazioni. Come si verifica immediatamente annullando il determinate del sistema, in questa soluzione si ha il seguente valore di γ e la seguente relazione fra E_x e E_y:

$$\gamma_1 = j k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp^2 - g^2}{\varepsilon_\perp}}$$

$$E_x = \frac{jg}{\varepsilon_\perp} E_y \qquad (E_z = 0)$$

Un'altra soluzione è quella in cui le prime due equazioni sono verificate identicamente ponendo $E_x = E_y = 0$. Dall'ultima equazione si ottiene

$$\gamma_2 = j k_0 \sqrt{\varepsilon_\parallel} \qquad (E_x = E_y = 0,\ E_z \neq 0)$$

Alle due soluzioni suddette corrispondono onde piane i cui campi elettrici sono del tipo:

$$\mathbf{E}_1 = A\left(\frac{jg}{\varepsilon_\perp} \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y\right) e^{-j\beta_1 x} \tag{6.5a}$$

$$\mathbf{E}_2 = B\, \mathbf{u}_z\, e^{-j\beta_2 x} \tag{6.5b}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie e

$$\beta_1 = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp^2 - g^2}{\varepsilon_\perp}} \qquad \beta_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_\parallel} \tag{6.6}$$

Se β_1 e β_2 sono reali le due onde si propagano e le velocità di fase sono diverse. I campi magnetici, ottenuti dalla (6.1), sono:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{A}{\eta_1}\mathbf{u}_z\, e^{-j\beta_1 x} \qquad \mathbf{H}_2 = -\frac{B}{\eta_2}\mathbf{u}_y\, e^{-j\beta_2 x}$$

dove:

$$\eta_1 = \eta_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp^2 - g^2}} \qquad \eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_\parallel}}$$

L'onda che ha la costante di fase β_1 è di tipo TM, l'altra è un'onda TEM. In entrambe le onde il campo magnetico è polarizzato linearmente, parallelamente a $\mathbf{B}_0$ (nella prima onda), o perpendicolarmente a $\mathbf{B}_0$ e alla direzione di propagazione (nella seconda onda). Il campo elettrico è polarizzato ellitticamente nel piano perpendicolare a $\mathbf{B}_0$ (nella prima onda) e linearmente nella direzione di $\mathbf{B}_0$ (nella seconda onda).

10.7 Caso del magnetoplasma

Nel caso del magnetoplasma senza collisioni si ha (vedi Equazione 6.9*b*, Capitolo 1):

$$\varepsilon_\perp = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \qquad \varepsilon_\parallel = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad g = \frac{\omega_c\,\omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}$$

Sostituendo nelle (6.4) si trovano le seguenti espressioni delle costanti di fase di un'onda piana uniforme che si propaga nella direzione di $\mathbf{B}_0$:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}} \qquad \text{(onda ciclotronica)} \qquad (7.1a)$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}} \qquad \text{(onda anticiclotronica)} \qquad (7.1b)$$

Lo studio di queste funzioni rivela che β_1 è reale al disotto della pulsazione ciclotronica e al disopra della pulsazione:

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \omega_p^2} + \frac{\omega_c}{2} \qquad (7.2)$$

Invece β_2 è reale al disopra della pulsazione

$$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \omega_p^2} - \frac{\omega_c}{2} \tag{7.3}$$

Ne consegue che l'onda ciclotronica non si propaga nel campo di frequenze compreso fra ω_c e ω_1, mentre l'onda anticiclotronica non si propaga al disotto di ω_2.

I diagrammi di dispersione delle due onde sono rappresentati nella Figura 7.1. Il paragone di questa figura con il diagramma di dispersione del plasma isotropo (vedi Figura 4.1, Capitolo 2) mostra che il campo magnetostatico fa apparire una banda di frequenze (al disotto della frequenza ciclotronica) in cui è possibile la propagazione. In questo campo di frequenze è possibile la propagazione della sola onda ciclotronica, e quindi la polarizzazione del campo è invariabilmente circolare, nel verso ciclotronico. Inoltre, l'unica curva di dispersione che nel plasma isotropo esiste al disopra della frequenza di plasma si suddivide in due curve distinte, una per l'onda ciclotronica, l'altra per quella anticiclotronica. La propagazione dell'onda anticiclotronica diviene possibile al disopra di ω_2 (che corrisponde ad una frequenza un poco più bassa della frequenza di plasma), mentre la propagazione dell'onda ciclotronica diviene possibile al disopra di ω_1, (cioè un poco al disopra della frequenza di plasma). Nella banda delimitata da ω_1 e ω_2 è possibile la propagazione della sola onda anticiclotronica, cosicché, in tale banda, la polarizzazione del campo è invariabilmente circolare nel verso anticiclotronico. Al disopra della frequenza ω_1 entrambe le onde si propagano. Nel caso più generale, in cui sono presenti sia l'onda ciclotronica che quella anticiclotronica, la polarizzazione del campo è generalmente ellittica. Però, a causa della diversità delle velocità di fase delle due onde, la polarizzazione cambia procedendo lungo la direzione di propagazione (vedi paragrafo successivo).

Figura 7.1

Utilizzando le (6.6) si trovano le seguenti espressioni delle costanti di fase delle onde che si propagano in direzione perpendicolare a $\mathbf{B}_0$:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2 - \omega_p^2)}} \tag{7.4a}$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{7.4b}$$

I corrispondenti diagrammi di dispersione sono mostrati nella Figura 7.2.

L'onda TEM (campo elettrico polarizzato linearmente nella direzione di $\mathbf{B}_0$) ha la stessa curva di dispersione di un'onda che si propaga nel plasma isotropo. Ciò avviene perché, con questo tipo di polarizzazione, le oscillazioni degli elettroni liberi non sono influenzate dalla presenza del campo magnetostatico, avvenendo nella sua stessa direzione. Il campo magnetostatico ha invece influenza sulla propagazione dell'altra onda (quella con il campo elettrico agente sul piano perpendicolare a $\mathbf{B}_0$). In quest'onda l'effetto del campo magnetico si manifesta con l'apparizione di due bande di frequenza in cui si ha propagazione, precisamente:

$$\omega_2 < \omega < \omega_0 \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2} \qquad\qquad \omega_1 < \omega$$

I valori di ω_1 e ω_2 sono dati dalle (7.2) e (7.3). Al disopra di ω_1 sono possibili entrambi i tipi di propagazione e la polarizzazione del campo muta procedendo nel verso di propagazione (vedi paragrafo successivo).

Si noti che a frequenze molto maggiori di ω_p tutti gli effetti del plasma, inclusi quelli giroelettrici, tendono a scomparire.

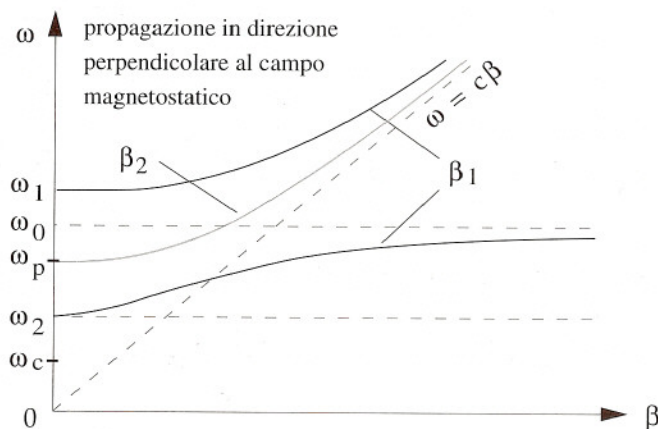



Figura 7.2

10.8 Effetti magnetoottici

In Ottica gli effetti dell'anisotropia indotta dal campo magnetostatico vengono detti "magnetoottici". Fra questi il più noto è l'effetto Faraday che, ad esempio, si manifesta nella situazione sperimentale illustrata in Figura 8.1.

Un fascio di luce polarizzata linearmente attraversa una lastra trasparente di materiale isotropo, posta fra le espansioni polari di un magnete che permette di creare un intenso campo magnetico nella direzione di propagazione. Quando si applica il campo magnetico il fascio che emerge dalla lastra è ancora polarizzato linearmente, ma in direzione diversa da quella originaria. L'angolo θ (rotazione di Faraday) è dato da

$$\theta = V\, B_0\, d \tag{8.1}$$

dove d è lo spessore della lastra e V (costante di Verdet) dipende dal materiale.
Alla luce di quanto visto nel Paragrafo 6 la spiegazione dell'effetto è semplice. Il fascio è assimilabile ad un'onda piana uniforme che si propaga in direzione del campo magnetostatico. Il campo dentro la lastra è dato dalla sovrapposizione di onde ciclotroniche e anticiclotroniche; supponendo di poter trascurare le riflessioni sulle interfacce aria/lastra, si hanno due sole onde, che si propagano nello stesso verso. Pertanto il campo elettrico all'interno della lastra è rappresentato dalla seguente espressione:

$$\mathbf{E} = A(\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y)e^{-j\beta_1 z} + B(\mathbf{u}_x + j\mathbf{u}_y)e^{-j\beta_2 z} \tag{8.2}$$

Supposto che l'origine sia posta sulla prima interfaccia e che il campo incidente sia polarizzato secondo la direzione x, si ha:

$$A(\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y) + B(\mathbf{u}_x + j\mathbf{u}_y) = E_0\,\mathbf{u}_x$$

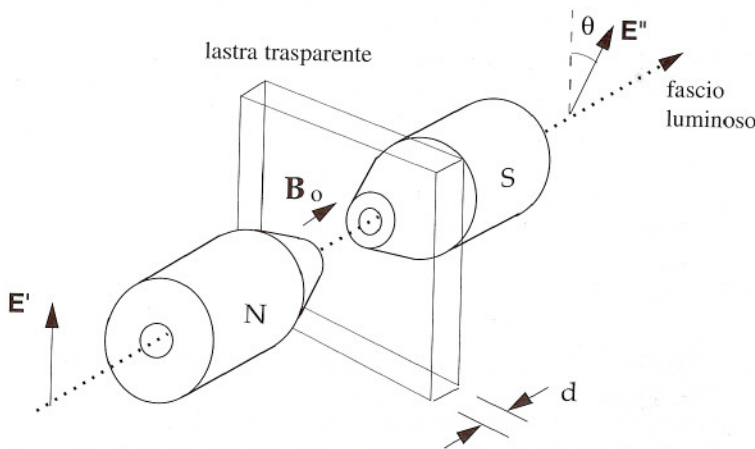



Figura 8.1

dove $E_0\mathbf{u}_x$ rappresenta il campo incidente in $z = 0$. Questa espressione permette di valutare le costanti A e B. Si trova immediatamente:

$$A = B = E_0/2$$

Sostituendo nella (8.2) si ottiene:

$$\mathbf{E} = E_0 \frac{e^{-j\beta_1 z} + e^{-j\beta_2 z}}{2}\mathbf{u}_x + jE_0 \frac{e^{-j\beta_2 z} - e^{-j\beta_1 z}}{2}\mathbf{u}_y$$

Ponendo

$$D = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \qquad \beta_0 = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}$$

si ha

$$\beta_2 = \beta_0 + D \qquad \beta_1 = \beta_0 - D$$

Quindi, sostituendo nell'espressione precedente e introducendo il vettore di polarizzazione

$$\mathbf{p} = \mathbf{u}_x \cos Dz + \mathbf{u}_y \,\mathrm{sen}\, Dz$$

si ottiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} E_0 e^{-j\beta_0 z}$$

Questa espressione differisce dalla solita rappresentazione dell'onda piana per il fatto che $\mathbf{p}$ non è costante. Essa mostra che all'interno della lastra il campo è polarizzato linearmente in direzione variabile, perché $\mathbf{p}$ è reale e dipende da z. Si vede immediatamente che $\mathbf{p}$ forma con l'asse x l'angolo Dz. Pertanto, sull'interfaccia d'uscita dalla lastra la direzione di polarizzazione risulta ruotata rispetto alla direzione originaria dell'angolo

$$\theta = D\, d$$

Introducendo le (6.4) si ottiene:

$$D = \frac{\omega}{2c}\left(\sqrt{\varepsilon_\perp + g} - \sqrt{\varepsilon_\perp - g}\right) \tag{8.3}$$

Si osserva che D dipende da $\mathbf{B}_0$, in particolare attraverso g. Si osserva inoltre che D si annulla quando $g = 0$, cioè quando il campo magnetostatico è nullo. Pertanto, immaginando di espandere la funzione $D = D(B_0)$ in serie di potenze intorno a $B_0 = 0$ e di trascurare tutti i termini della serie tranne il primo, si ottiene un'espressione del tipo

$$D \approx V\, B_0$$

dove $V = (dD/dB_0)_{B_0=0}$. Sostituendo nell'espressione di θ si trova la (8.1). Trascurare tutte le potenze di B_0 nello sviluppo in serie è lecito se B_0 è sufficientemente piccolo. In pratica, nei dielettrici l'approssimazione è ottima anche per i più alti valori di B_0 che si raggiungono comunemente. Si noti che D cresce con ω, cosicché, alle frequenze ottiche, la rotazione di Faraday può essere apprezzabile anche con piccoli valori di g.[1]

Un altro effetto magnetoottico è il cosiddetto effetto Cotton-Mouton. Questo effetto dà luogo a variazioni di polarizzazione analoghe a quelle dell'effetto Kerr, anche se le sue origini sono totalmente diverse. L'effetto Cotton-Mouton si manifesta quando la propagazione avviene in direzione perpendicolare al campo magnetostatico. Un'onda piana polarizzata linearmente a 45° rispetto al campo magnetostatico eccita dentro il materiale due onde, una con il campo magnetico polarizzato linearmente nella direzione di $\mathbf{B}_0$, l'altra nella direzione perpendicolare. Le onde si propagano con velocità diversa, cosicché la polarizzazione cambia periodicamente da lineare a circolare e viceversa, come mostrato nella Figura 4.2. La polarizzazione circolare si ottiene alle distanze per cui lo sfasamento fra le due onde (che sono in fase nella sezione $z = 0$) è pari a un multiplo dispari di $\pi/2$. Tali distanze sono

$$(2m-1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{|\beta_2-\beta_1|} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots)$$

dove β_1 e β_2 sono dati dalle (6.6).

1 Nel magnetoplasma la rotazione di Faraday si presenta a frequenze più alte di ω_1, perchè solo in questo campo di frequenze si propagano sia l'onda ciclotronica che quella anticiclotronica. Tuttavia se la frequenza è troppo alta, la rotazione di Faraday diviene trascurabile, come tutti gli altri effetti del plasma. Nel caso del magnetoplasma l'espressione esatta di D può essere ottenuta introducendo le (7.1) nella (8.3).

11
Campi aperiodici

Lo studio dei campi aperiodici ha notevole importanza per la progettazione dei moderni sistemi digitali ad alta velocità e dei sistemi di telecomunicazione ad alta frequenza, che generano campi non esattamente monocromatici. Inoltre esso interessa nei problemi di Compatibilità Elettromagnetica, che riguardano la prevenzione delle interferenze fra apparati elettronici e la protezione dai disturbi.

Questo capitolo contiene alcuni elementi introduttivi allo studio dei campi aperiodici nei mezzi lineari, stazionari, spazialmente non-dispersivi e isotropi. Nel primo paragrafo viene discusso un metodo generale di analisi basato sulla possibilità di rappresentare il campo e le sorgenti come sovrapposizione di infiniti contributi infinitesimi oscillanti a tutte le frequenze; questo metodo permette di ricondurre l'analisi dei campi aperiodici a quella dei campi monocromatici. Esso è applicato allo studio delle onde aperiodiche nello spazio libero (Paragrafo 2), nelle linee di trasmissione (Paragrafi 3-4) e nelle guide d'onda (Paragrafi 4-5). Nell'ultimo paragrafo viene considerata la propagazione dei segnali quasi-sinusoidali e viene introdotto il concetto di "velocità di gruppo".

11.1 Studio dei campi aperiodici nel dominio della frequenza

In tutte le situazioni reali le sorgenti agiscono per intervalli di tempo finiti ed emettono energie finite. Ne consegue che il campo, considerato in una generica posizione, è nullo prima di un certo istante e si azzera rapidamente dopo un certo altro istante. È quindi lecito assumere che i campi e le densità di carica e di corrente siano funzioni a quadrati sommabile rispetto al tempo e che, quindi, esse possano essere rappresentate mediante i seguenti integrali di Fourier (vedi Appendice F):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\ \omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad \mathbf{D}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\ \omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\ \omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\ \omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\ \omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad \rho(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\rho}(\mathbf{r},\ \omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

Le quantità $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\ \omega)$, ..., $\tilde{\rho}(\mathbf{r},\ \omega)$ sono le trasformate di Fourier (o "spettri") di $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)$, ..., $\rho(\mathbf{r},\ t)$. Ad esempio si ha:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\ \omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

Nel seguito $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, ..., ρ verranno detti "campi nel dominio del tempo" e i loro spettri "campi nel dominio della frequenza". Poiché i campi nel dominio del tempo sono funzioni reali gli spettri godono della proprietà:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},-\omega)=\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r},\ \omega) \qquad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},-\omega)=\tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r},\ \omega) \qquad \text{ecc.}$$

Grazie a questa proprietà gli integrali di Fourier possono essere riscritti considerando come dominio d'integrazione il solo semiasse positivo delle frequenze; ad esempio, come il lettore può facilmente verificare, si può scrivere:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\ \omega)\,e^{j\omega t}]\,d\omega \tag{1.1}$$

Questa rappresentazione evidenzia il fatto che i campi aperiodici possono essere visti come un sovrapposizione di campi sinusoidali oscillanti a tutte le frequenze, rappresentati da fasori infinitesimi del tipo

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\ \omega)\,d\omega$$

Considerando le trasformate delle equazioni di Maxwell nel dominio del tempo si verifica immediatamente che gli spettri sono collegati dalle equazioni:

$$\nabla\times\tilde{\mathbf{H}}=j\omega\,\tilde{\mathbf{D}}+\tilde{\mathbf{J}}$$

$$\nabla\times\tilde{\mathbf{E}}=-j\omega\,\tilde{\mathbf{B}}$$

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{D}}=\tilde{\rho}$$

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{B}}=0$$

Queste equazioni sono formalmente identiche alle equazioni di Maxwell per i fasori di un campo monocromatico. La stessa analogia viene osservata trasformando le condizioni sulle superfici di discontinuità e le equazioni costitutive del tipo (2.5) (2.6) del Capitolo 1; pertanto, seguendo un procedimento identico a quello descritto nel Paragrafo 5 dello stesso capitolo, si trova che nei mezzi lineari, stazionari, spazialmente non dispersivi gli spettri del campo elettrico, del campo magnetico e della densità della corrente impressa soddisfano relazioni formalmente identiche a quelle dei campi monocromatici. Ad esempio, se il mezzo è isotropo, si ha:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\,\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}_0 \qquad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\,\tilde{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}^+ - \tilde{\mathbf{H}}^-) = \tilde{\mathbf{J}}_s \qquad \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}^+ - \tilde{\mathbf{E}}^-) = 0$$

dove $\mathbf{J}_0$ e $\mathbf{J}_s$ sono gli spettri delle densità delle correnti impresse.[1] Le permeabilità sono definite da relazioni del tipo (5.6), Capitolo 1.

Grazie all'analogia formale fra le equazioni valide per gli spettri e per i campi monocromatici, lo studio dei campi aperiodici nei mezzi *lineari, stazionari,* spazialmente non dispersivi[2] può essere ricondotto a quello dei campi monocromatici, studiando i campi nel dominio della frequenza invece che nel dominio del tempo. Il procedimento generale è il seguente: dalle correnti impresse e dai campi tangenziali al contorno - che sono assegnati nel dominio del tempo - vengono dedotte le corrispondenti quantità nel dominio della frequenza, calcolando le trasformate di Fourier; queste quantità vengono utilizzate come dati per determinare il campo nel dominio della frequenza, mediante procedimenti identici a quelli usati in regime sinusoidale; infine viene determinato il campo nel dominio del tempo, calcolando le trasformate inverse elencate all'inizio di questo paragrafo.

11.2 Campi aperiodici nello spazio libero

Tutti i risultati già noti per i campi monocromatici possono essere utilizzati per studiare i campi nel dominio della frequenza. Ad esempio gli spettri del campo elettrico e del campo magnetico generati da una sorgente elettrica agente in un mezzo isotropo, omogeneo e illimitato, possono essere ricavati dalle formule

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla\tilde{\Phi} - j\omega\tilde{\mathbf{A}} \tag{2.1a}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu\tilde{\mathbf{H}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} \tag{2.1b}$$

dove $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r},\, \omega)$ e $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\mathbf{r},\, \omega)$ sono i potenziali di Lorentz nel dominio della frequenza. Come per i potenziali di un campo monocromatico si ha:

---

1 Se si considerano sorgenti magnetiche si hanno equazioni duali.

2 L'assenza della dispersività spaziale è inessenziale; essa viene presupposta al solo scopo di considerare gli stessi mezzi nei quali, in questo testo, sono stati trattati i campi monocromatici.

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{v^2} \tilde{\mathbf{A}} = -\mu \tilde{\mathbf{J}}_0 \tag{2.2}$$

$$\tilde{\Phi} = -\frac{v^2}{j\omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \tag{2.3}$$

dove $v = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ è la velocità di fase alla frequenza ω. Da queste equazioni si deduce

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} + \frac{\omega^2}{v^2} \tilde{\Phi} = -\frac{v^2}{j\omega} \nabla \cdot (\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{v^2} \tilde{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0}{j\omega}$$

ovvero, introducendo lo spettro della densità della carica impressa $\tilde{\rho}_0$:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} + \frac{\omega^2}{v^2} \tilde{\Phi} = -\frac{\tilde{\rho}_0}{\varepsilon} \tag{2.4}$$

Come discusso nell'Appendice G e nel Capitolo 7, le soluzioni delle equazioni (2.4) e (2.2) sono:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \tilde{\rho}_0(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{-j(\omega/v)R}}{R} dV' \tag{2.5a}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \tilde{\mathbf{J}}_0(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{-j(\omega/v)R}}{R} dV' \tag{2.5b}$$

(i simboli sono quelli della Figura 2.1, Capitolo 7). Considerando le trasformate inverse delle (2.1) e usando la (F.7) si ottiene:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.6a}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.6b}$$

dove φ e $\mathbf{A}$ sono i potenziali nel dominio del tempo:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{2.7a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{2.7b}$$

Le (2.5), (2.6), (2.7) permettono, in linea di principio, di calcolare i campi. Se il mezzo è dispersivo il calcolo è reso difficile dalla presenza della funzione $v = v(\omega)$ nelle (2.5).

Se il mezzo non è dispersivo (esempio il vuoto) il calcolo delle antitrasformate è semplice e i potenziali **A** e ω possono essere espressi direttamente in funzione delle sorgenti nel dominio del tempo. Poiché in questo caso la velocità v è costante, si ha (vedi Equazione F.5):

$$\tilde{\rho}_0(\mathbf{r}', \omega)\, e^{-j(\omega/v)R} = \mathcal{F}[\rho_0(\mathbf{r}', t - R/v)]$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_0(\mathbf{r}', \omega)\, e^{-j(\omega/v)R} = \mathcal{F}[\mathbf{J}_0(\mathbf{r}', t - R/v)]$$

Pertanto, sostituendo nelle (2.5) risulta:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{1}{R}\,\rho_0(\mathbf{r}', t - R/v)\,dV'\right]$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}\left[\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{1}{R}\,\mathbf{J}_0(\mathbf{r}', t - R/v)\,dV'\right]$$

Si ha quindi:

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{1}{R}\,\rho_0(\mathbf{r}', t - R/v)\,dV' \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{1}{R}\,\mathbf{J}_0(\mathbf{r}', t - R/v)\,dV' \tag{2.8b}$$

Queste espressioni sono note come "formule dei potenziali ritardati". Esse indicano che l'elemento di sorgente collocato nel punto **r'** fa sentire il suo effetto nel punto di osservazione **r** con il ritardo R/v. Il ritardo è uguale al tempo necessario a percorrere alla velocità v la distanza fra il punto d'osservazione e il punto sorgente.

■ È interessante osservare che nel caso di un mezzo non dispersivo i potenziali φ e **A** soddisfano le seguenti equazioni, ottenute considerando le trasformate inverse delle (2.2) e (2.4):

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{J}_0 \qquad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \tag{2.9}$$

Le equazioni di questa forma sono note come "equazioni delle onde". La loro soluzione nello spazio libero è data dalle formule dei potenziali ritardati. ■

Le sorgenti che si incontrano nella realtà hanno ampiezze spettrali sensibili solo entro bande limitate di frequenza. Facendo riferimento alle lunghezze d'onda λ_{max} e λ_{min} agli estremi della banda, è possibile definire la zona di radiazione, quella di Fresnel ecc. così da considerare le approssimazioni a grande distanza viste nel Capitolo 7. Per le sorgenti di cui sono già note le espressioni del campo a grande distanza nel caso monocromatico, i campi nel dominio del tempo possono essere determinati direttamente considerando le trasformate inverse di queste espressioni. Ad esempio, la zona di radiazione di un dipolo hertziano di lunghezza $d << \lambda_{min}$ inizia a distanze dell'ordine di $10\lambda_{max}$. In questa zona il campo generato dal dipolo è rappresentato nel dominio spettrale da relazioni analoghe alle (6.5) del Capitolo 7. Si può quindi scrivere direttamente

$$\tilde{E}_\theta(\mathbf{r}, \theta, \omega) = \frac{\eta}{v}(j\omega \tilde{I}) e^{-j\omega r/v} \frac{d}{4\pi r} \sin\theta \qquad \tilde{H}_\theta(\mathbf{r}, \theta, \omega) = \tilde{E}_\theta(\mathbf{r}, \theta, \omega)/\eta$$

dove $\tilde{I} = \tilde{I}(\omega)$ rappresenta lo spettro della corrente $I = I(t)$ che attraversa il dipolo e $j\omega\tilde{I}$ quello della sua derivata:

$$I'(t) = \frac{dI(t)}{dt}$$

Se il mezzo non è dispersivo, considerando le trasformate inverse di $\tilde{E}_\theta$ e $\tilde{H}_\theta$ si ottiene:

$$\mathcal{E}_\theta(\mathbf{r}, \theta, t) = \frac{\eta}{v} I'(t - r/v) \frac{d}{4\pi r} \sin\theta \qquad \mathcal{H}_\theta(\mathbf{r}, \theta, t) = \mathcal{E}_\theta(\mathbf{r}, \theta, t)/\eta$$

Si nota che, in questo esempio, il campo nella zona di radiazione ha lo stesso andamento temporale della derivata della corrente, a parte il ritardo r/v (vedi Figura 2.1).

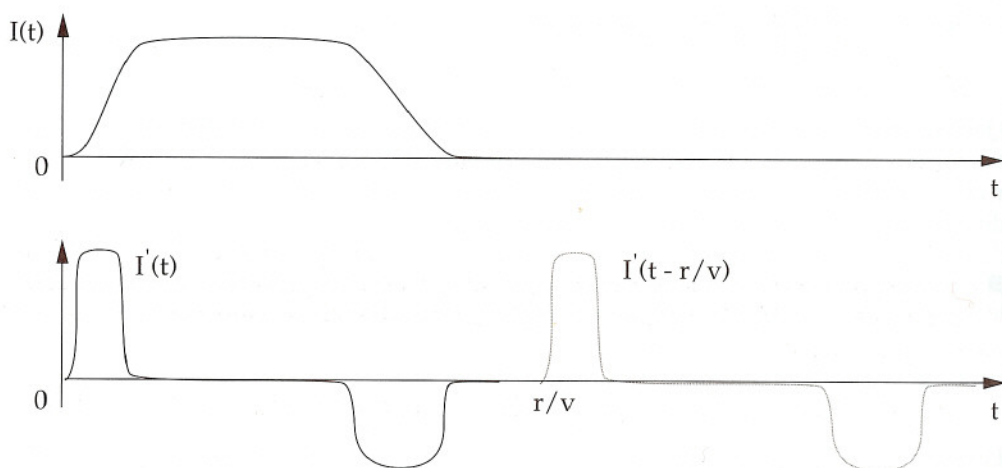



Figura 2.1

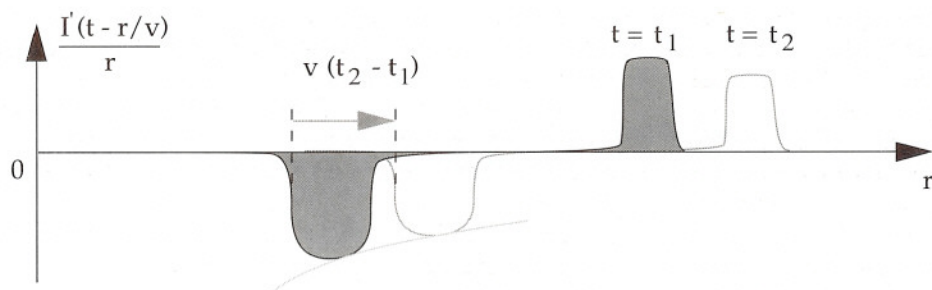



Figura 2.2

Sempre nello stesso esempio, il campo in una data direzione dipende da r e da t attraverso la funzione:

$$\frac{I'(t - r/v)}{r}$$

La Figura 2.2 rappresenta l'andamento spaziale di questa funzione, considerata in istanti successivi, t_1 e t_2. Esso è quello di un'onda aperiodica che si allontana dal dipolo con la velocità v.

11.3 Propagazione di segnali aperiodici nelle linee di trasmissione

Si consideri una linea di trasmissione alimentata da una sorgente che genera un campo aperiodico il cui spettro è confinato nella regione delle basse frequenze, in una banda in cui si propaga il solo modo TEM (o quasi-TEM). Si ha:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, \omega) = [\tilde{V}_0^+(\omega)\, e^{-\gamma(\omega)z} + \tilde{V}_0^-(\omega)\, e^{\gamma(\omega)z}]\mathbf{e}^0(x, y)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{Z^0}[\tilde{V}_0^+(\omega)\, e^{-\gamma(\omega)z} - \tilde{V}_0^-(\omega)\, e^{\gamma(\omega)z}]\mathbf{h}^0(x, y)$$

dove $\mathbf{e}^0$ e $\mathbf{h}^0$ sono i vettori modali, Z^0 è l'impedenza caratteristica della linea, $\gamma(\omega)$ è la costante di propagazione alla frequenza ω e, infine, $\tilde{V}_0^+(\omega)$, $\tilde{V}_0^-(\omega)$ sono coefficienti per ora non meglio specificati. Sostituendo negli integrali di Fourier introdotti all'inizio del Paragrafo 1 si ottiene:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = V(z, t)\mathbf{e}^0(x, y) \qquad \mathbf{H}(x, y, z, t) = I(z, t)\mathbf{h}^0(x, y) \tag{3.1}$$

dove:

$$V(z, t) = V^+(z, t) + V^-(z, t) \tag{3.2a}$$

$$I(z, t) = \frac{V^+(z, t) - V^-(z, t)}{Z^0} \tag{3.2b}$$

$$V^+(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}_0^+(\omega)\, e^{-\gamma(\omega) z}\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{3.3a}$$

$$V^-(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}_0^-(\omega)\, e^{\gamma(\omega) z}\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{3.3b}$$

$V(z,t)$ e $I(z,t)$ rappresentano la tensione e la corrente nella sezione z e all'istante t. Le funzioni $V^+(z,t)$ e $V^-(z,t)$ rappresentano onde di tensione che si propagano nei due versi dell'asse z. Le funzioni $V^+(z,t)/Z^0$ e $-V^-(z,t)/Z^0$ rappresentano le corrispondenti onde di corrente.

Indicando semplicemente con V_0^+ e V_0^- i valori di V^+ e di V^- nella sezione $z = 0$, per le (3.3) risulta evidentemente:

$$V_0^+(t) = \mathcal{F}^{-1}\,\tilde{V}_0^+(\omega) \qquad V_0^-(t) = \mathcal{F}^{-1}\,\tilde{V}_0^-(\omega) \tag{3.4}$$

Pertanto si ha

$$\tilde{V}_0^+(\omega) = \mathcal{F}\,V_0^+(t) \qquad \tilde{V}_0^-(\omega) = \mathcal{F}\,V_0^-(t) \tag{3.5}$$

Dunque $\tilde{V}_0^+$ e $\tilde{V}_0^-$ rappresentano gli spettri di V_0^+ e di V_0^-, rispettivamente.

In molte applicazioni l'attenuazione della linea e la dispersività del dielettrico possono essere trascurate (linea ideale); in questo caso si ha

$$\gamma(\omega) = j\omega/v \qquad (v = c/\sqrt{\varepsilon_r} = \text{cost.})$$

e per le (3.3) e (F.5) risulta:

$$\tilde{V}_0^+(\omega)\, e^{-\gamma(\omega) z} = \tilde{V}_0^+(\omega)\, e^{-j\omega z/v} = \mathcal{F}\,V_0^+(t - z/v)$$

$$\tilde{V}_0^-(\omega)\, e^{\gamma(\omega) z} = \tilde{V}_0^-(\omega)\, e^{j\omega z/v} = \mathcal{F}\,V_0^-(t + z/v)$$

Pertanto, dalle (3.3) si deduce:

$$V^+(z, t) = V_0^+(t - z/v) \qquad V^-(z, t) = V_0^-(t + z/v)$$

Dunque, in una linea ideale la tensione e la corrente hanno la forma:

$$V(z, t) = V_0^+(t - z/v) + V_0^-(t + z/v) \tag{3.6a}$$

$$I(z, t) = \frac{V_0^+(t - z/v) - V_0^-(t + z/v)}{Z^0} \tag{3.6b}$$

In particolare, se la linea è adattata al carico in tutta la banda d'interesse, si ha $\tilde{V}_0^-(\omega) = 0$ e quindi risulta $V^-(z, t) = 0$. Pertanto si ha:

$$V(z, t) = V^+(z, t) \qquad I(z, t) = V^+(z, t) / Z^0$$

La Figura 3.1 mostra possibili andamenti delle funzioni $V_0^+(t - z/v)$ e $V_0^-(t + z/v)$ considerate lungo la linea in due istanti successivi t_1 e t_2. Si nota che nei due istanti tali andamenti differiscono solo per la traslazione $v(t_2 - t_1)$ nel verso positivo o negativo di z; pertanto le due funzioni rappresentano onde di tensione che si propagano in versi opposti con la velocità v. Nel propagarsi ciascuna onda mantiene immutata la sua forma; ciò dipende dal fatto che le onde elementari che la compongono si propagano con la stessa velocità e senza attenuazione; grazie a questo fatto esse traslano solidalmente e l'onda risultante trasla con la loro stessa velocità senza deformarsi.

La dispersività del dielettrico determina una differenza fra le velocità di propagazione delle onde elementari, che si combinano in maniera mutevole; in questo caso si ha il fenomeno della "dispersione", che si manifesta come deformazione dell'onda. Generalmente la dispersione tende ad allungare le onde e a smussarne le variazioni più brusche. Anche l'attenuazione determina la deformazione delle onde; poiché l'attenuazione cresce con ω, le onde elementari di frequenza più elevata hanno peso decrescente al crescere della distanza dal generatore; quindi, anche per effetto dell'attenuazione, la forma delle onde tende ad addolcirsi durante la propagazione. Questi effetti possono divenire apprezzabili nelle lunghe linee che trasmettono segnali a larga banda. Come si vedrà successivamente, l'effetto della dispersione è molto più sentito nelle guide d'onda.

11.4 Studio della riflessione

La linea ideale indicata nella Figura 4.1 è alimentata da un generatore che fornisce la tensione a vuoto U = U(t). Le impedenze R_g e R_L del generatore e del carico sono resistive e indipendenti dalla frequenza in tutta la banda occupata dallo spettro di U. Il tempo che le onde impiegano per propagarsi dal generatore al carico è :

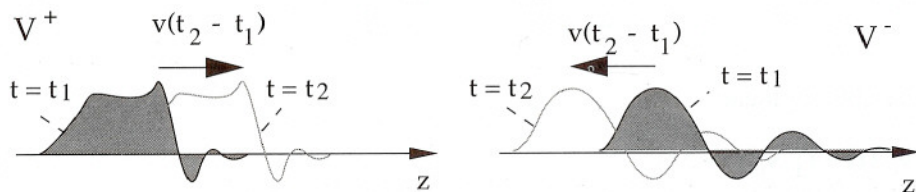



Figura 3.1

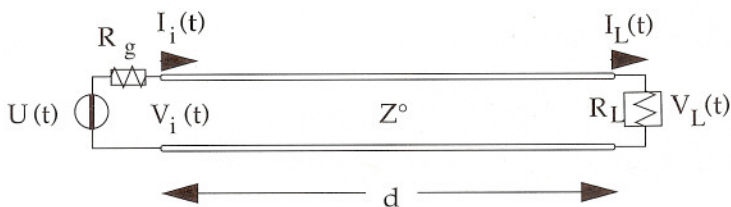



Figura 4.1

$$\tau = d/v$$

dove d è la lunghezza della linea.
In base alle (3.6) le tensioni e le correnti all'ingresso e all'uscita della linea sono date da

$$V_i(t) = V_0^+(t) + V_0^-(t) \qquad I_i(t) = \frac{V_0^+(t) - V_0^-(t)}{Z^0} \tag{4.1}$$

$$V_L(t) = V_0^+(t-\tau) + V_0^-(t+\tau) \qquad I_L(t) = \frac{V_0^+(t-\tau) - V_0^-(t+\tau)}{Z^0} \tag{4.2}$$

Sostituendo nelle relazioni circuitali

$$U(t) = R_g I_i(t) + V_i(t) \qquad V_L(t) = R_L I_L(t)$$

si ottiene:

$$V_0^+(t) - \Gamma_g V_0^-(t) = KU(t) \tag{4.3a}$$

$$V_0^-(t+\tau) = \Gamma_L V_0^+(t-\tau) \tag{4.3b}$$

dove:

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z^0}{R_g + Z^0} \qquad \Gamma_L = \frac{R_L - Z^0}{R_L + Z^0} \qquad K = \frac{Z^0}{R_g + Z^0} \tag{4.4}$$

Dalla (4.3*b*) si ottiene:

$$V_0^-(t) = \Gamma_L V_0^+(t-2\tau) \tag{4.5}$$

Quindi sostituendo nella (4.3*a*) si trova:

$$V_0^+(t) = KU(t) + \Gamma_g \Gamma_L V_0^+(t - 2\tau) \tag{4.6}$$

Anticipando i tempi di $2n\tau$ (n intero positivo) si ha pure:

$$V_0^+(t - 2n\tau) = KU(t - 2n\tau) + \Gamma_g \Gamma_L V_0^+(t - 2[n+1]\tau)$$

Utilizzando ripetutamente questa formula per trasformare il secondo membro della (4.6) e osservando che per tempi sufficientemente remoti tutte le tensioni sono nulle si ottiene facilmente:

$$V_0^+(t) = K\left[U(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma_g \Gamma_L)^n U(t - 2n\tau)\right] \tag{4.7}$$

Inoltre, per la (4.5) si ha:

$$V_0^-(t) = \Gamma_L K\left[U(t - 2\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma_g \Gamma_L)^n U(t - 2[n+1]\tau)\right] \tag{4.8}$$

Utilizzando le (3.6), le due precedenti espressioni permettono di ricavare la tensione e la corrente in una sezione e in un istante qualsiasi. In particolare, considerando le (4.1) e (4.2), si ottengono le seguenti espressioni delle tensioni all'ingresso e all'uscita della linea:

$$V_i(t) = K\Big[U(t) + \Gamma_L(1 + \Gamma_g)U(t - 2\tau) + \Gamma_L(1 + \Gamma_g)\sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma_g \Gamma_L)^n U(t - 2[n+1]\tau)\Big] \tag{4.9a}$$

$$V_L(t) = K(1 + \Gamma_L)\left[U(t - \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma_g \Gamma_L)^n U(t - [2n+1]\tau)\right] \tag{4.9b}$$

I seguenti esempi servono a meglio comprendere il significato di queste formule.

ESEMPIO 1: LINEA ADATTATA Se $R_L = Z^0$ si ha $\Gamma_L = 0$ e risulta:

$$V_0^+(t) = KU(t) \qquad V_0^-(t) = 0$$

$$V_i(t) = KU(t) \qquad V_L(t) = KU(t - \tau)$$

Non si ha onda riflessa e - a parte il ritardo τ - la tensione in uscita è identica a quella d'ingresso (Figura 4.2).

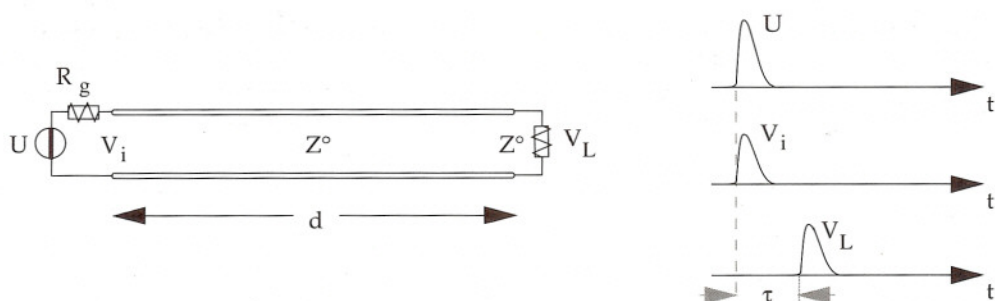



Figura 4.2

ESEMPIO 2: LINEA IN CORTOCIRCUITO, GENERATORE ADATTATO In questo caso si ha

$$R_L = 0 \qquad R_g = Z^0 \qquad \Gamma_L = -1 \qquad \Gamma_g = 0 \qquad K = 1/2$$

Pertanto:

$$V_0^+(t) = \frac{1}{2} U(t) \qquad V_0^-(t) = -\frac{1}{2} U(t-2\tau)$$

$$V_i(t) = \frac{1}{2}[U(t) - U(t-2\tau)] \qquad V_L(t) = 0$$

La Figura 4.3 mostra l'andamento della tensione all'ingresso della linea nel caso in cui U è un impulso rettangolare di durata $T > 2\tau$. La tensione risulta pari alla metà di U dall'istante

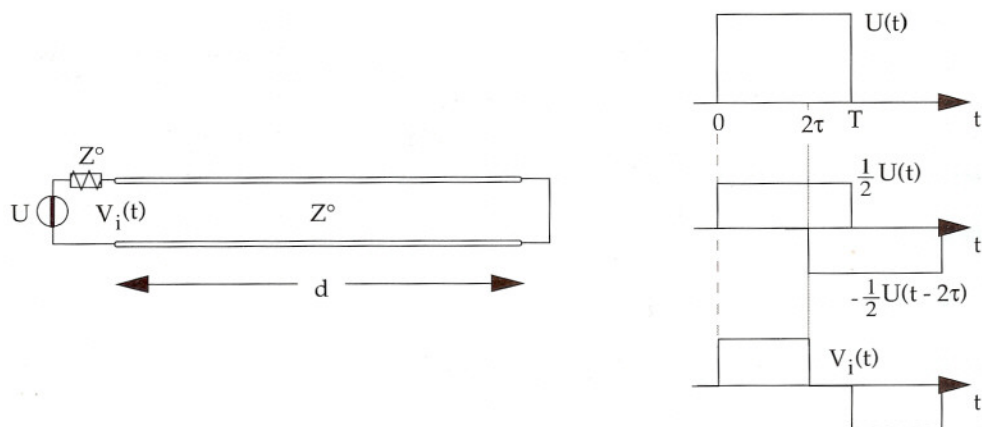



Figura 4.3

di inizio dell'impulso fino all'istante in cui si ha il ritorno dell'impulso riflesso. Questo è opposto a quello incidente e lo cancella. Nell'istante in cui U si annulla, il contributo dell'onda incidente cessa di esistere e rimane solo quello dell'onda riflessa, che è negativo. V_i si annulla dopo l'intervallo di tempo 2τ a partire da questo istante.

ESEMPIO 3: LINEA DISADATTATA ALL'INGRESSO E ALL'USCITA Conviene considerare un caso particolare, ad esempio:

$$R_g = \frac{1}{3}Z^0 \qquad R_L = 3Z^0 \qquad K = \frac{3}{4} \qquad \Gamma_g = -\frac{1}{2} \qquad \Gamma_L = \frac{1}{2}$$

In questo caso risulta:

$$V_L(t) = \frac{9}{8}\left[U(t-\tau) - \frac{1}{4}U[t-3\tau] + \frac{1}{16}U(t-5\tau) - \frac{1}{64}U(t-7\tau) + \ldots\right]$$

La Figura 4.4 mostra l'andamento della tensione in uscita quando U è un impulso rettangolare di durata minore di 2τ. Il primo impulso è quello che arriva al carico attraverso l'onda incidente prodotta dal generatore; tale onda viene riflessa dal carico, si propaga verso il generatore e viene da questo riflessa nuovamente verso il carico, dando luogo al secondo impulso; si ha ancora una riflessione sul carico e una successiva riflessione verso il generatore, che si manifesta nel terzo impulso, e così via. I successivi impulsi sono distanziati del tempo 2τ che le onde impiegano per propagarsi indietro e avanti lungo la linea. Si nota che a causa delle riflessioni multiple il segnale trasmesso al carico differisce notevolmente da quello prodotto dal generatore.

In generale la differenza fra gli andamenti di U e di V_L è tanto maggiore quanto maggiore è il disadattamento e quanto più rapidi sono i segnali. Per questa ragione i disadattamenti sono da evitare in tutti i sistemi operanti con segnali veloci.[1]

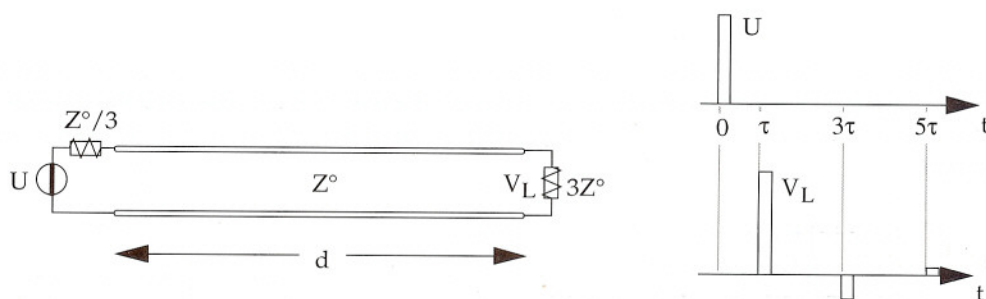



Figura 4.4

1 La differenza è trascurabile quando U varia pochissimo nel tempo 2τ.

11.5 Onde aperiodiche in una guida

Lo studio della propagazione delle onde aperiodiche nelle guide è più complicato che nelle linee a causa della dispersione e dell'esistenza della frequenza di taglio. In base alla (1.1) il campo elettrico trasversale può essere rappresentato come segue:

$$\mathbf{E}_T(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}_T(x, y, z, \omega) e^{j\omega t}] d\omega$$

Se la guida è adattata il campo nel dominio della frequenza è rappresentato dalla serie modale:

$$\tilde{\mathbf{E}}_T = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{V}_i^+(\omega) e^{-\gamma_i(\omega) z} \mathbf{e}_i(x, y)$$

dove γ_i ed $\mathbf{e}_i$ sono la costante di propagazione e il vettore modale elettrico per il modo i-esimo e le funzioni $\tilde{V}_i^+(\omega)$ non sono per ora meglio precisate. Pertanto, si ha:

$$\mathbf{E}_T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^+(z, t) \mathbf{e}_i(x, y) \tag{5.1}$$

dove:

$$V_i^+(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{Re}[\tilde{V}_i^+(\omega) e^{j\omega t - \gamma_i(\omega) z}] d\omega \tag{5.2}$$

La (5.1) mostra che, anche nel caso delle onde aperiodiche, il campo elettrico trasversale può essere rappresentato come sovrapposizione di onde modali, il cui comportamento dipende dalle onde di tensione $V_i^+(z, t)$. Grazie all'ortonormalità dei vettori modali, dalla (5.1) si deduce:

$$V_i^+(0, t) = \int_S \mathbf{E}_T(x, y, 0, t) \cdot \mathbf{e}_i(x, y) \, dx \, dy$$

dove l'integrale è esteso alla sezione trasversale della guida. Pertanto, se è noto il campo elettrico trasversale nella sezione d'ingresso ($z = 0$) è possibile determinare tutte le tensioni modali nella stessa sezione. D'altro canto, per la (5.2) si ha:

$$V_i^+(0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{Re}[\tilde{V}_i^+(\omega) e^{j\omega t}] d\omega \tag{5.3}$$

e quindi le funzioni $\tilde{V}_i^+(\omega)$ possono essere determinate come trasformate delle tensioni modali nella sezione d'ingresso:

$$\tilde{V}_i^+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V_i^+(0, t) e^{j\omega t} dt \tag{5.4}$$

Se la banda occupata dalle sorgenti si estende fino alla pulsazione ω_{max} le funzioni $\tilde{V}_i^+(\omega)$ sono nulle per $\omega > \omega_{max}$. D'altro canto, se si indica con ω_i la pulsazione di taglio del modo i-esimo la (5.2) può essere riscritta considerando separatamente l'intervallo di frequenze in cui le onde elementari sono attenuate e il rimanente intervallo, in cui le onde si propagano:

$$V_i^+(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_i} e^{-\alpha_i(\omega) z} \operatorname{Re}[\tilde{V}_i^+(\omega) e^{j\omega t}] d\omega +$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\omega_i}^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{V}_i^+(\omega) e^{j[\omega t - \beta_i(\omega) z]}] d\omega$$

Se ω_i è maggiore di ω_{max} il secondo integrale è nullo e la tensione modale è costituita dai soli contributi evanescenti; pertanto essa decresce rapidamente al crescere di z e l'ampiezza del modo risulta trascurabile a distanza sufficiente dall'ingresso della guida. Dunque gli unici modi che danno luogo alla trasmissione lungo la guida sono quelli per cui risulta $\omega_i < \omega_{max.}$ Per questi modi, a distanza sufficientemente grande dall'ingresso si ha:

$$V_i^+(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\omega_i}^{\omega_{max}} \operatorname{Re}[\tilde{V}_i^+(\omega) e^{j[\omega t - \beta_i(\omega) z]}] d\omega \tag{5.5}$$

La velocità di fase delle onde elementari che figurano nella precedente espressione è data da

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_i(\omega)}$$

e dipende dalla frequenza (vedi Figura 3.1, Capitolo 3). Si ha quindi l'effetto di dispersione discusso nel Paragrafo 3. A causa di questo effetto - anche nel caso di propagazione unimodale - l'andamento temporale del campo in sezioni diverse è differente.

11.6 Propagazione di segnali quasi sinusoidali, velocità di gruppo

In molti casi d'interesse pratico interessa considerare segnali "quasi-sinusoidali" del tipo

$$f(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \tag{6.1}$$

dove a(t) e $\Phi(t)$ variano molto poco nell'intervallo di tempo $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Un esempio di funzione quasi-sinusoidale è indicato in Figura 6.1 dove, per ragioni grafiche, T_0 non è così piccolo come dovrebbe. L'interesse per i segnali quasi-sinusoidali deriva dal fatto che essi costituiscono la norma nelle telecomunicazioni e nel radar. Nelle telecomunicazioni le informazioni (suoni, immagini, dati) vengono trasmesse "modulando" l'ampiezza o la fase, ossia facendo variare opportunamente a(t) o $\Phi(t)$. La frequenza $\omega_0/2\pi$ viene detta "frequenza portante".

Lo studio dei campi quasi-sinusoidali può essere svolto in maniera abbastanza semplice anche in presenza di dispersione, grazie a certe approssimazioni rese possibili dalla peculiarità degli spettri dei segnali quasi-sinusoidali. Ponendo

$$A(t) = a(t)\, e^{j\Phi(t)}$$

la (6.1) può essere riscritta come segue:

$$f(t) = \mathrm{Re}[A(t) e^{j\omega_0 t}] = \frac{A(t) e^{j\omega_0 t} + A^*(t) e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Il suo spettro è dato da:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[A(t) e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[A^*(t)\, e^{-j\omega_0 t}]$$

Quindi, indicando con $\tilde{A}(\omega)$ lo spettro di A(t), per la (F.6) si ha:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{A}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \tilde{A}^*(\omega - \omega_0) \tag{6.2}$$

L'ipotesi di lenta variabilità di A(t) implica che $\tilde{A}(\omega)$ ha ampiezza sensibile solo in una banda di frequenze $[-\Omega, \Omega]$ molto più stretta di ω_0; pertanto lo spettro di f(t) è costituito da due stretti picchi centrati intorno a ω_0 e $-\omega_0$, come mostrato in Figura 6.2.

Per le successive considerazione è pure utile osservare che, essendo $\tilde{A}(\omega)$ trascurabile all'esterno della banda $[-\Omega, \Omega]$, si ha:

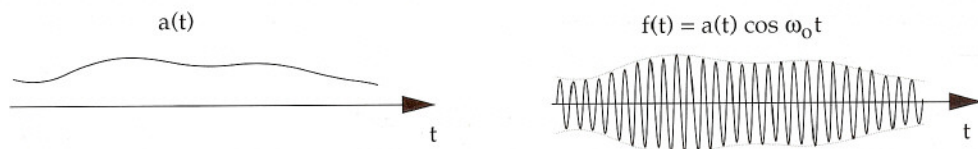



Figura 6.1

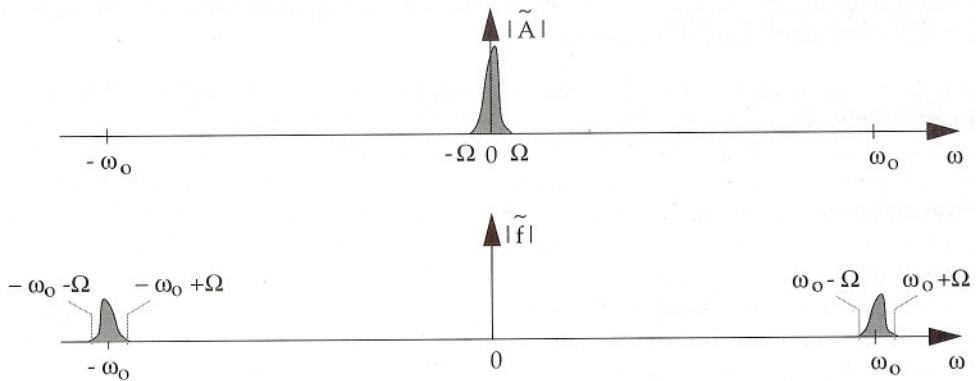



Figura 6.2

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \tilde{A}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{6.3}$$

Per ragioni di concretezza la propagazione dei campi quasi-sinusoidali verrà studiata facendo riferimento al caso particolare della guida d'onda adattata, ma i concetti che verranno esposti possono essere facilmente estesi ad altre situazioni in cui si verifica il fenomeno della dispersione. Si suppone che nell'intorno della frequenza portante la guida permetta la propagazione del solo modo dominante, e che quindi lo studio della propagazione sia riconducibile a quello della sola tensione modale relativa a questo modo. Omettendo tutti gli indici, la tensione modale in questione verrà indicata semplicemente con V(z, t). Sia:

$$V(0,\ t) = a(t)\cos[\omega_0 t - \Phi(t)] = \mathrm{Re}[A(t) e^{j\omega_0 t}] \tag{6.4}$$

la tensione modale nella sezione d'ingresso, che per ipotesi è quasi-sinusoidale. Per la (5.4) e la (6.2) si ha:

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{1}{2}\tilde{A}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\tilde{A}^*(\omega - \omega_0)$$

Pertanto, sostituendo nella (5.5) si ha:

$$V(z,\ t) \approx \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega} \tilde{A}(\omega - \omega_0) e^{j[\omega t - \beta(\omega) z]} d\omega\right] \tag{6.5}$$

A causa della piccolezza della banda compresa fra $\omega_0 - \Omega$ e $\omega_0 + \Omega$, nel calcolo dell'integrale è lecito introdurre l'approssimazione:

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = \frac{\omega_0}{v_f} + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} \tag{6.6}$$

dove si è posto:

$$v_f = \frac{\omega_0}{\beta_0} \qquad v_g = \left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_{\omega_0} \tag{6.7}$$

L'approssimazione equivale a confondere la curva di dispersione (vedi Figura 6.3) con la tangente nel punto (β_0, ω_0). La quantità v_g prende il nome di "velocità di gruppo" ed è proporzionale all'angolo ξ; v_f rappresenta la velocità di fase alla frequenza portante ed è proporzionale all'angolo χ.
Utilizzando la (6.6) si ha:

$$e^{j(\omega t - \beta(\omega) z)} \approx e^{j\omega_0 (t - z/v_f)} e^{j(\omega - \omega_0)(t - z/v_g)}$$

Pertanto, sostituendo nella (6.5) risulta:

$$V(z, t) \approx \mathrm{Re}\left[e^{j\omega_0 (t - z/v_f)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0 - \Omega}^{\omega_0 + \Omega} \tilde{A}(\omega - \omega_0) e^{j(\omega - \omega_0)(t - z/v_g)} d\omega \right]$$

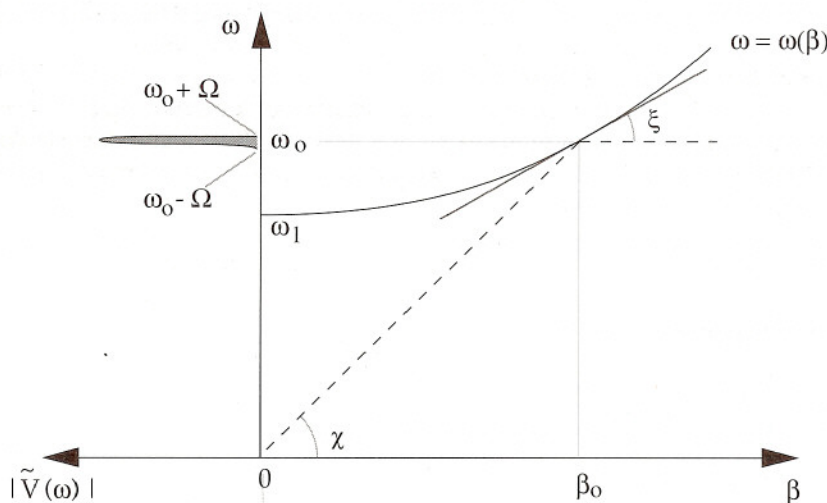



Figura 6.3

ovvero, ponendo $\omega' = \omega - \omega_0$:

$$V(z, t) \approx \mathrm{Re}\left[e^{j\omega_0 (t - z/v_f)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \tilde{A}(\omega') e^{j\omega' (t - z/v_g)} d\omega' \right] \tag{6.8}$$

Per la (6.3) si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \tilde{A}(\omega') e^{j\omega' (t - z/v_g)} d\omega' = A(t - z / v_g) = a(t - z / v_g) e^{j\Phi (t - z/v_g)}$$

Pertanto, sostituendo nella (6.8) si ottiene:

$$V(z, t) \approx a(t - z / v_g) \cos[\omega_0 (t - z / v_f) + \Phi(t - z / v_g)] \tag{6.9}$$

Se le velocità di fase e di gruppo avessero lo stesso valore v (come accade nella linea ideale) la tensione dipenderebbe dall'unica variabile $t - z/v$ e si propagherebbe alla velocità v senza mutare forma. A causa della diversità esistente fra le due velocità questo non avviene. Si nota però che le funzioni

$$a(t - z/v_g) \qquad \Phi(t - z/v_g)$$

rappresentano onde che si propagano nel verso positivo di z con la velocità di gruppo, senza mutare forma. Dunque le ampiezze e le fasi, osservate in due sezioni diverse, hanno lo stesso andamento temporale e differiscono solo per un ritardo pari al tempo necessario a percorrere la distanza fra le due sezioni alla velocità v_g. In definitiva, nonostante la dispersione, le informazioni contenute in un segnale modulato in ampiezza e/o in fase si trasmettono fedelmente - almeno in prima approssimazione - ma ad una velocità diversa rispetto a quella con cui si propagherebbe un'onda monocromatica alla frequenza portante.

Un'altra interessante conclusione riguarda la propagazione di un "treno d'onde" di lunghezza limitata. Il treno d'onde viene creato quando a(t) differisce da zero solo in un intervallo di tempo limitato, ad esempio nell'intervallo $[0, \tau]$.[1] In questo caso la funzione $a(t - z/v_g)$, osservata lungo l'asse z in in un generico istante t, differisce da zero solo per i valori di z che soddisfano la condizione

$$0 \le t - z/v_g \le \tau$$

cioè entro l'intervallo

$$v_g(t - \tau) < z < v_g t$$

1 Poiché l'andamento temporale del campo è quasi-sinusoidale deve aversi $\tau >> T_0$.

La lunghezza dell'intervallo è $v_g\tau$ e, al variare di t, l'intervallo stesso si sposta con la velocità v_g (Figura 6.4). Quindi, come mostrato nel secondo diagramma in figura, la tensione modale (e il campo) differisce da zero solo in una regione di lunghezza fissa $v_g\tau$, che si sposta con la velocità di gruppo. Dunque, l'energia elettromagnetica localizzata nel treno d'onde si sposta con la velocità di gruppo; però l'energia - come la massa - non può spostarsi a velocità maggiore di quella della luce; pertanto la velocità di gruppo è soggetta alla limitazione fondamentale:

$$v_g \leq c \tag{6.10}$$

Nessuna limitazione esiste invece per la velocità di fase. In base all'espressione (3.7) del Capitolo 3 il lettore può facilmente verificare che nel caso della guida d'onda vale la relazione:

$$v_g = \frac{v^2}{v_f} \tag{6.11}$$

Questa espressione è in accordo con la (6.10), dato che nelle guide si ha $v_f > v$, $v \leq c$.

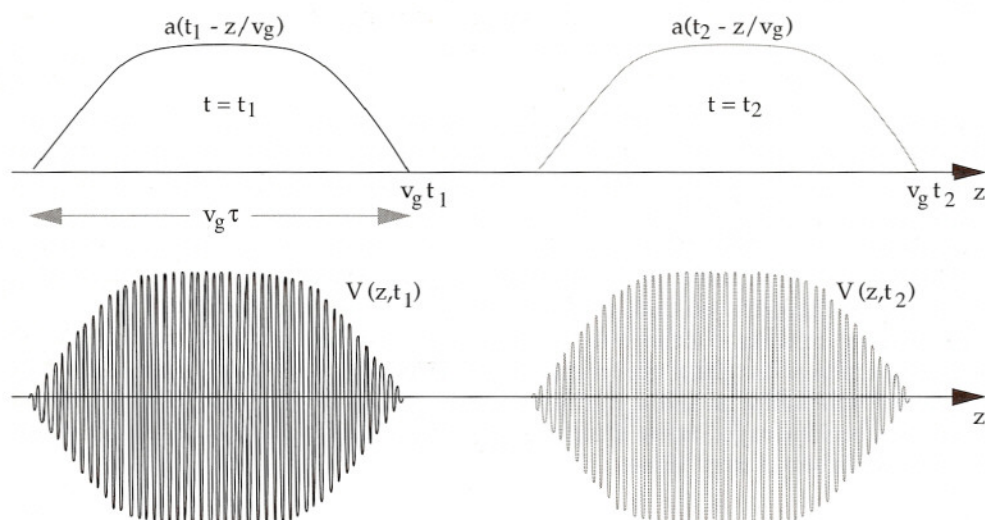



Figura 6.4

A

Formulario di analisi vettoriale

Simboli

I vettori sono indicati in grassetto, gli scalari in carattere normale.

$\mathbf{r}$	vettore di posizione di un punto
$F = F(\mathbf{r})$	campo scalare
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$	campo vettoriale
A	modulo di **A**
A_α	componente di **A** nella direzione orientata α
$\mathbf{u}_\alpha$	versore della direzione orientata α
$\cdot$	prodotto scalare
$\times$	prodotto vettoriale
∇	operatore "nabla" (o "del")
∇^2	operatore di Laplace
∇F	gradiente di F
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	divergenza di **A**
$\nabla \times \mathbf{A}$	rotore di **A**
$\nabla^2 F$, $\nabla^2 \mathbf{A}$	laplaciano di F e di **A**
$\frac{\partial F}{\partial \alpha}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha}$	derivata direzionale di F e di **A** nella direzione della retta orientata α
$c_{\alpha\beta}$	coseno dell'angolo fra le rette orientate α e β
V	regione dello spazio tridimensionale
S_V	contorno di V
S	superficie
L	linea
$\mathbf{n}$	versore normale ad una superficie orientata
$\mathbf{dL}$	spostamento infinitesimo lungo una linea orientata L
$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot \mathbf{dL}$	integrale di linea di **A** lungo L , orientata dall'estremo P all'estremo Q
$\oint_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{dL}$	circuitazione di **A** lungo la linea chiusa e orientata L

$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ flusso di **A** attraverso la superficie orientata S

Condizioni di parallelismo, perpendicolarità, complanarità fra vettori

Se **A**, **B**, **C** sono vettori non nulli si ha:

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ (**A** e **B** sono paralleli) (A.1)

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ (**A** e **B** sono perpendicolari) (A.2)

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$ (**A**, **B** e **C** sono complanari) (A.3)

$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0$ (**A** è perpendicolare alla superficie orientata S di normale **n**) (A.4)

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$ (**A** è tangente alla superfice orientata S di normale **n**) (A.5)

Identità algebriche di uso comune

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \tag{A.6}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{A.7}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2} = A \tag{A.8}$$

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha = 1 \tag{A.9}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\alpha = A_\alpha \tag{A.10}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{A.11}$$

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) \tag{A.12}$$

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) \tag{A.13}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{A.14}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{A.15}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} \tag{A.16}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{A.17}$$

$\mathbf{u}_\alpha \times (\mathbf{A} \times \mathbf{u}_\alpha) = \mathbf{A} - A_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ (componente di **A** trasversale alla direzione α) (A.18)

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{A.19}$$

Identità differenziali di uso comune

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla F = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \tag{A.20}$$

$$(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \tag{A.21}$$

$$\nabla (F + G) = \nabla F + \nabla G \tag{A.22}$$
$$\nabla (FG) = F \nabla G + G \nabla F \tag{A.23}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \tag{A.24}$$
$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{A.25}$$
$$\nabla \cdot (F\mathbf{A}) = F \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla F \tag{A.26}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \tag{A.27}$$
$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \tag{A.28}$$
$$\nabla \times (F\,\mathbf{A}) = F \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla F \tag{A.29}$$
$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\, \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\, \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{A.30}$$
$$\nabla \times \nabla F = 0 \tag{A.31}$$
$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \tag{A.32}$$
$$\nabla \cdot \nabla F = \nabla^2 F \tag{A.33}$$
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{A.34}$$

Rappresentazione dei vettori in coordinate cartesiane

In un riferimento cartesiano i vettori sono rappresentati mediante le componenti secondo gli assi x, y, z (Figura A.1*a*). Si ha:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{u}_x + A_y\mathbf{u}_y + A_z\mathbf{u}_z \tag{A.35}$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \tag{A.36}$$
$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1 \tag{A.37}$$
$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = 0 \tag{A.38}$$
$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z,\ \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x,\ \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \tag{A.39}$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\,\mathbf{u}_x + (A_y + B_y)\,\mathbf{u}_y + (A_z + B_z)\,\mathbf{u}_z \tag{A.40}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{A.41}$$
$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{A.42}$$
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\mathbf{u}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,\mathbf{u}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\mathbf{u}_z \tag{A.43}$$

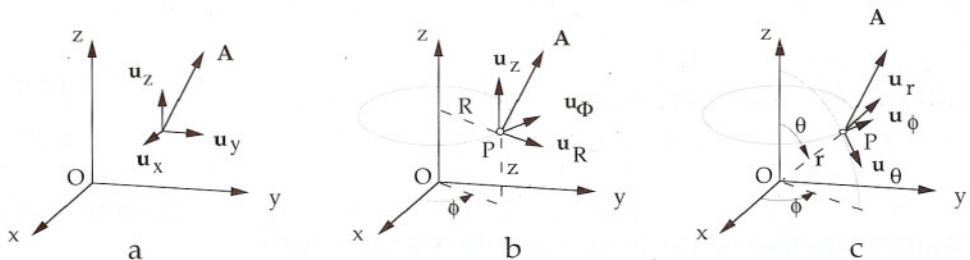



Figura A.1

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.44}$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla = B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = c_{x\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + c_{y\alpha} \frac{\partial}{\partial y} + c_{z\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.46}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A.47}$$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{u}_z \tag{A.48}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.49}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z \tag{A.50}$$

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \mathbf{u}_x \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) +$$

$$\mathbf{u}_y \left(B_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{u}_z \left(B_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \tag{A.51}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = c_{x\alpha} \frac{\partial F}{\partial x} + c_{y\alpha} \frac{\partial F}{\partial y} + c_{z\alpha} \frac{\partial F}{\partial z} \tag{A.52}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} = \mathbf{u}_x \left(c_{x\alpha} \frac{\partial A_x}{\partial x} + c_{y\alpha} \frac{\partial A_x}{\partial y} + c_{z\alpha} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \mathbf{u}_y \left(c_{x\alpha} \frac{\partial A_y}{\partial x} + c_{y\alpha} \frac{\partial A_y}{\partial y} + c_{z\alpha} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) +$$

$$\mathbf{u}_z \left(c_{x\alpha} \frac{\partial A_z}{\partial x} + c_{y\alpha} \frac{\partial A_z}{\partial y} + c_{z\alpha} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \tag{A.53}$$

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \tag{A.54}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{u}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{u}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{u}_z \nabla^2 A_z \tag{A.55}$$

Rappresentazione dei vettori in coordinate cilindriche

In un sistema di coordinate cilindriche i vettori sono rappresentati mediante le loro

componenti nelle direzioni dei versori fondamentali $\mathbf{u}_R$, $\mathbf{u}_\Phi$, $\mathbf{u}_z$ (Figura A.1*b*). Le direzioni di $\mathbf{u}_R$ e di $\mathbf{u}_\Phi$ dipendono dalla posizione del punto di applicazione (P) del vettore. Si ha:

$$\mathbf{A} = A_R\mathbf{u}_R + A_\Phi\mathbf{u}_\Phi + A_z\mathbf{u}_z \quad (A.56)$$

$$\mathbf{r} = R\,\mathbf{u}_R + z\,\mathbf{u}_z \quad (A.57)$$

$$\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_\Phi \cdot \mathbf{u}_\Phi = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1 \quad (A.58)$$

$$\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_\Phi = \mathbf{u}_\Phi \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_R = 0 \quad (A.59)$$

$$\mathbf{u}_R \times \mathbf{u}_\Phi = \mathbf{u}_z,\ \mathbf{u}_\Phi \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_R,\ \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_\Phi \quad (A.60)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_R + B_R)\,\mathbf{u}_R + (A_\Phi + B_\Phi)\,\mathbf{u}_\Phi + (A_z + B_z)\,\mathbf{u}_z \quad (A.61)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_RB_R + A_\Phi B_\Phi + A_zB_z \quad (A.62)$$

$$A = (A_R^2 + A_\Phi^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (A.63)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_\Phi B_z - A_zB_\Phi)\,\mathbf{u}_R + (A_zB_R - A_RB_z)\,\mathbf{u}_\Phi + (A_RB_\Phi - A_\Phi B_R)\,\mathbf{u}_z \quad (A.64)$$

In coordinate cilindriche i campi scalari e vettoriali sono rappresentati da funzioni di R, ϕ, z. Il gradiente, la divergenza, il rotore e il laplaciano possono essere calcolati direttamente derivando rispetto a R, ϕ, z, mediante le formule seguenti:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial R}\mathbf{u}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial \phi}\mathbf{u}_\Phi + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad (A.65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial (RA_R)}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\Phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (A.66)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\Phi}{\partial z}\right)\mathbf{u}_R + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right)\mathbf{u}_\Phi +$$

$$+\left(\frac{1}{R}\frac{\partial (RA_\Phi)}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right)\mathbf{u}_z \quad (A.67)$$

$$\nabla^2 F = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial F}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (A.68)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_R - \frac{A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_\Phi}{\partial \phi}\right)\mathbf{u}_R +$$

$$+\left(\nabla^2 A_\Phi - \frac{A_\Phi}{R^2} - \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right)\mathbf{u}_\Phi + \nabla^2 A_z\,\mathbf{u}_z \quad (A.69)$$

Rappresentazione dei vettori in coordinate sferiche

In un sistema di coordinate sferiche un vettore è rappresentato mediante le sue componenti nelle direzioni dei versori fondamentali $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_\phi$ (Figura A.1*c*). Le direzioni dei versori fondamentali dipendono dalla posizione del punto di applicazione (P) del vettore. Si ha:

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{u}_r + A_\theta\mathbf{u}_\theta + A_\phi\mathbf{u}_\phi \tag{A.70}$$

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \tag{A.71}$$

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\phi \cdot \mathbf{u}_\phi = 1 \tag{A.72}$$

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_\phi \cdot \mathbf{u}_r = 0 \tag{A.73}$$

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\phi,\ \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_r,\ \mathbf{u}_\phi \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \tag{A.74}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_r + B_r)\,\mathbf{u}_r + (A_\theta + B_\theta)\,\mathbf{u}_\theta + (A_\phi + B_\phi)\,\mathbf{u}_\phi \tag{A.75}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_rB_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi \tag{A.76}$$

$$A = (A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2)^{1/2} \tag{A.77}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta)\,\mathbf{u}_r + (A_\phi B_r - A_r B_\phi)\,\mathbf{u}_\theta + (A_r B_\theta - A_\theta B_r)\,\mathbf{u}_\phi \tag{A.78}$$

In coordinate sferiche i campi sono rappresentati da funzioni di r, θ, ϕ. Il calcolo del gradiente, della divergenza, del rotore e del laplaciano può essere direttamente eseguito derivando rispetto a r, θ, ϕ, mediante le formule seguenti:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi \tag{A.79}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \tag{A.80}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\mathbf{u}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r\,A_\phi)}{\partial r}\right)\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{u}_\phi \tag{A.81}$$

$$\nabla^2 F = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \tag{A.82}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left[\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \mathrm{cotg}\,\theta\, A_\theta + \csc\theta\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\mathbf{u}_r +$$

$$+\left[\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta\, A_\theta - 2\,\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + 2\,\mathrm{cotg}\,\theta\csc\theta\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right)\right]\mathbf{u}_\theta +$$

$$+\left[\nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta\, A_\phi - 2\csc\theta\,\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - 2\,\mathrm{cotg}\,\theta\csc\theta\,\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\right]\mathbf{u}_\phi \tag{A.83}$$

Trasformazioni di coordinate

a - rotazione degli assi cartesiani. Siano (A_x, A_y, A_z) e (A_X, A_Y, A_Z) le componenti cartesiane di **A** in due terne, x, y, z e X, Y, Z, diversamente orientate. Le componenti in una terna sono deducibili da quelle nell'altra utilizzando le seguenti leggi di trasformazione:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} \\ c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} \\ c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix} \tag{A.84}$$

$$\begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{Xx} & c_{Xy} & c_{Xz} \\ c_{Yx} & c_{Yy} & c_{Yz} \\ c_{Zx} & c_{Zy} & c_{Zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{A.85}$$

Le due matrici (di rotazione) sono l'una la trasposta dell'altra. Indicando con [c] l'una o l'altra matrice e con $[c]_T$ la sua trasposta risulta:

$$[c]\,[c]_T = [1] \qquad \text{(ortogonalità della matrice della rotazione)} \tag{A.86}$$

b - trasformazione fra coordinate cartesiane e coordinate cilindriche. Sia **A** un vettore applicato al punto P e siano (x, y, z) e (R, ϕ, z) le coordinate cartesiane e cilindriche di P. Le seguenti leggi di trasformazione collegano le componenti cartesiane e cilindriche di **A**:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{A.87}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{A.88}$$

Le seguenti relazioni collegano i versori fondamentali nel punto P:

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_x \cos\phi + \mathbf{u}_y \sin\phi \qquad \mathbf{u}_\Phi = -\mathbf{u}_x \sin\phi + \mathbf{u}_y \cos\phi \tag{A.89}$$

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_R \cos\phi - \mathbf{u}_\Phi \sin\phi \qquad \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_R \sin\phi + \mathbf{u}_\Phi \cos\phi \tag{A.90}$$

c - trasformazione fra coordinate cartesiane e coordinate sferiche. Sia **A** un vettore applicato al punto P e siano (x, y, z) e (r, θ, ϕ) le coordinate cartesiane e sferiche di P. Le seguenti leggi di trasformazione collegano le componenti cartesiane e sferiche di **A**:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{A.91}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{A.92}$$

Le seguenti relazioni collegano i versori fondamentali nel punto P:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \sin\theta \cos\phi + \mathbf{u}_y \sin\theta \sin\phi + \mathbf{u}_z \cos\theta \tag{A.93}$$
$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_x \cos\theta \cos\phi + \mathbf{u}_y \cos\theta \sin\phi - \mathbf{u}_z \sin\theta \tag{A.94}$$
$$\mathbf{u}_\phi = -\mathbf{u}_x \sin\phi + \mathbf{u}_y \cos\phi \tag{A.95}$$

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_r \sin\theta \cos\phi + \mathbf{u}_\theta \cos\theta \cos\phi - \mathbf{u}_\phi \sin\phi \tag{A.96}$$
$$\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_r \sin\theta \sin\phi + \mathbf{u}_\theta \cos\theta \sin\phi + \mathbf{u}_\phi \cos\phi \tag{A.97}$$
$$\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \cos\theta - \mathbf{u}_\theta \sin\theta \tag{A.98}$$

Identità integrali

Le seguenti formule permettono di trasformare integrali di volume in integrali sulla superficie di contorno. La normale **n** è orientata verso l'esterno del volume V. Il contorno S_V può eventualmente essere costituito dall'unione di più parti separate. Si suppone che in V (contorno incluso) F e **A** siano continui e differenziabili un numero di volte sufficiente a dare significato alle formule.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_{S_v} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS_v \qquad \text{(teorema della divergenza o di Gauss)} \tag{A.99}$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \int_{S_v} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS_v \qquad \text{(formula del rotore)} \tag{A.100}$$

$$\int_V \nabla F\, dV = \int_{S_v} F\, \mathbf{n}\, dS_v \qquad \text{(formula del gradiente)} \tag{A.101}$$

$$\int_V (G\nabla^2 F + \nabla F \cdot \nabla G)\,dV = \int_{S_v} G\frac{\partial F}{\partial n}\,dS_v \qquad \text{(prima formula di Green)} \qquad (A.102)$$

$$\int_V (G\nabla^2 F - F\nabla^2 G)\,dV =$$

$$= \int_{S_v} \left(G\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_v \qquad \text{(seconda formula di Green)} \qquad (A.103)$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B})\,dV = \int_{S_v} (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}\,dS \qquad (A.104)$$

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B})\,dV = \int_{S_v} (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\,dS \qquad (A.105)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{A})\,dV = \int_{S_v} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\,dS \qquad (A.106)$$

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{B})\,dV = \int_{S_v} (\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}\,dS \qquad (A.107)$$

Le seguenti identità riguardano integrali di linea e circuitazioni. Nella formula di Stokes (A.108) S rappresenta una superficie orientata e C indica il suo contorno, orientato nel verso positivo (Figura A.2). C può essere costituito dall'unione di più parti separate, come nel caso di Figura A.2*b*. Si suppone che F ed **A** siano continui e differenziabili su L o S.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dC} \qquad \text{(formula di Stokes)} \qquad (A.108)$$

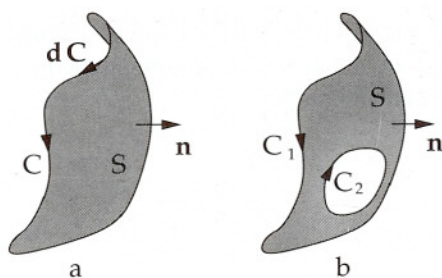



Figura A.2

$$\int_P^Q \nabla F \cdot \mathbf{dL} = F_Q - F_P \qquad (A.109)$$

In particolare, se L è una linea chiusa, si ha:

$$\oint_L \nabla F \cdot \mathbf{dL} = 0 \qquad (A.110)$$

Operatori tensoriali

La trasformazione lineare più generale che trasforma un vettore $\mathbf{V} = \mathbf{u}_x V_x + \mathbf{u}_y V_y + \mathbf{u}_z V_z$ in un altro vettore $\mathbf{W} = \mathbf{u}_x W_x + \mathbf{u}_y W_y + \mathbf{u}_z W_z$ è del tipo:

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \qquad (A.111)$$

Si scrive sinteticamente:

$$\mathbf{W} = \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{V} \qquad (A.112)$$

dove $\underline{\mathbf{T}}$ (equivalente alla matrice) rappresenta un "tensore" del secondo ordine. Gli elementi della matrice vengono detti componenti cartesiane del tensore. La corrispondenza fra **V** e **W** è biunivoca se la matrice non è singolare. Il tensore equivalente alla matrice inversa viene indicato con $\underline{\mathbf{T}}^{-1}$. Si ha:

$$\mathbf{V} = \underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \mathbf{W} \qquad (\underline{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{1}}) \qquad (A.113)$$

dove $\underline{\mathbf{1}}$ rappresenta il tensore identità (matrice identità). Il tensore trasposto, corrisponde alla matrice trasposta, il prodotto dei tensori al prodotto delle matrici, e così via. L'algebra dei tensori è identica a quella delle matrici.

Utilizzando le (A.87) e (A.88) si ottiene

$$\begin{bmatrix} W_R \\ W_\phi \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ V_\phi \\ V_z \end{bmatrix} \qquad (A.114)$$

Il prodotto delle tre matrici rappresenta il tensore $\underline{\mathbf{T}}$ in coordinate cilindriche. Analogamente, utilizzando le (A.91), (A.92) si deduce la rappresentazione del tensore in coordinate sferiche.

Ruotando gli assi le componenti dei tensori si trasformano. Passando dalla terna x, y, z alla terna X, Y, Z, usando le (A.84) e (A.85) si trova:

$$\begin{bmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{Xx} & c_{Xy} & c_{Xz} \\ c_{Yx} & c_{Yy} & c_{Yz} \\ c_{Zx} & c_{Zy} & c_{Zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} \\ c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} \\ c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$\begin{bmatrix} T_{XX} & T_{XY} & T_{XZ} \\ T_{YX} & T_{YY} & T_{YZ} \\ T_{ZX} & T_{ZY} & T_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_{Xx} & c_{Xy} & c_{Xz} \\ c_{Yx} & c_{Yy} & c_{Yz} \\ c_{Zx} & c_{Zy} & c_{Zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} \\ c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} \\ c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.115)}$$

Un tensore è *simmetrico* se la matrice che lo rappresenta è simmetrica. Nel caso di un tensore simmetrico esiste una rotazione che annulla tutte le componenti fuori diagonale. Le componenti sulla diagonale sono gli autovalori della matrice, la matrice della rotazione è la matrice degli autovettori. Gli assi rispetto ai quali il tensore ha come uniche componenti non nulle quelle sulla diagonale prendono il nome di "assi principali" del tensore.

La trasformazione (A.111) può anche essere scritta come segue:

$$\mathbf{W} = T_{xx}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{V} + T_{xy}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{V} + T_{xz}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{V} + T_{yx}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{V} + T_{yy}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{V} + T_{yz}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{V} + T_{zx}\,\mathbf{u}_z\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{V} + T_{zy}\,\mathbf{u}_z\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{V} + T_{zz}\,\mathbf{u}_z\,\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{V} =$$

$$(T_{xx}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x + T_{xy}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y + T_{xz}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_z + T_{yx}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_x + T_{yy}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_y + T_{yz}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_z + T_{zx}\,\mathbf{u}_z\mathbf{u}_x + T_{zy}\,\mathbf{u}_z\mathbf{u}_y + T_{zz}\,\mathbf{u}_z\,\mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{V}$$

Pertanto l'operatore $\underline{\mathbf{T}}$ può essere rappresentato mediante la seguente notazione:

$$\underline{\mathbf{T}} = T_{xx}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x + T_{xy}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y + T_{xz}\,\mathbf{u}_x\mathbf{u}_z + T_{yx}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_x + T_{yy}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_y + T_{yz}\,\mathbf{u}_y\,\mathbf{u}_z + T_{zx}\,\mathbf{u}_z\mathbf{u}_x + T_{zy}\,\mathbf{u}_z\mathbf{u}_y + T_{zz}\,\mathbf{u}_z\,\mathbf{u}_z \qquad \text{(A.116)}$$

Una particolare operazione lineare che trasforma un vettore $\mathbf{V}$ in un altro vettore $\mathbf{W}$ è la seguente

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}$$

dove $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono due vettori assegnati. L'espressione $\mathbf{AB}$ rappresenta un particolare operatore tensoriale, che prende il nome di "diade". Espressioni contenenti diadi vengono dette "diadiche". La (A.116) rappresenta $\underline{\mathbf{T}}$ mediante una diadica in cui appaiono le diadi $\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta$. Si noti che in generale $\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$.

Possono anche essere definiti operatori differenziali di tipo diadico. Ad esempio:

$$\begin{aligned}\nabla\nabla = {} & \mathbf{u}_x \frac{\partial\partial}{\partial x \partial x} \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_x \frac{\partial\partial}{\partial x \partial y} \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_x \frac{\partial\partial}{\partial x \partial z} \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_y \frac{\partial\partial}{\partial y \partial x} \mathbf{u}_x + \\ & + \mathbf{u}_y \frac{\partial\partial}{\partial y \partial y} \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_y \frac{\partial\partial}{\partial y \partial z} \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_z \frac{\partial\partial}{\partial z \partial x} \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z \frac{\partial\partial}{\partial z \partial y} \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z \frac{\partial\partial}{\partial z \partial z} \mathbf{u}_z \end{aligned} \qquad \text{(A.117)}$$

Applicando un simile operatore ad un campo vettoriale si ottiene un altro campo vettoriale, precisamente: $\nabla\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$.

B

Conduzione nel plasma freddo

In generale il termine "plasma" indica un mezzo conduttore in cui la conduzione è dovuta a uno o più insiemi di portatori, detti "componenti" del plasma. In condizioni di equilibrio le cariche elettroniche ed ioniche si neutralizzano, così che - in assenza di perturbazioni elettromagnetiche - si ha ovunque $\rho = 0$. I semiconduttori, le soluzioni elettrolitiche e i gas ionizzati sono esempi di plasmi a due o più componenti (elettroni/lacune, elettroni/ioni di uno o più tipi). I metalli sono plasmi a un solo componente. In questo corso il termine "plasma" verrà però usato solo nella sua accezione corrente, per indicare i plasmi allo stato gassoso, cioè i gas totalmente o parzialmente ionizzati. Essi sono importanti in astrofisica, nelle telecomunicazioni e nella fusione controllata.

Nello studio che segue si suppone che il plasma sia costituito da elettroni liberi e da ioni positivi monovalenti, il cui numero complessivo è indipendente dal tempo (plasma stazionario). L'ipotesi di stazionarietà presuppone l'esistenza di un agente ionizzante (radiazione ionizzante, agitazione termica) costante nel tempo, che compensa la ricombinazione fra gli elettroni e gli ioni. La neutralità della carica in condizioni di equilibrio richiede che le densità elettronica e ionica siano uguali. La seguente tabella fornisce gli ordini di grandezza tipici della densità in equilibrio (N_0) e della temperatura degli elettroni in vari tipi di plasma. È appena il caso di ricordare che la temperatura è una misura dell'energia cinetica media nel moto di agitazione termica delle particelle.

Ai fini di questo corso è sufficiente trattare la conduzione nei plasmi gassosi in forma semplificata, facendo riferimento a un modello fluidodinamico in cui il movimento dei componenti del plasma viene trattato classicamente, assimilando ciascun componente ad un fluido continuo. In molti casi, come ad esempio nello studio della propagazione delle onde elettromagnetiche nella ionosfera, il modello fluidodinamico fornisce risultati eccellenti.

Tipo di plasma	N_0 (m^{-3})	T (°K)
Gas interstellare	10^6	10^2
Ionosfera	$10^8 - 10^{12}$	10^3
Corona solare	10^{13}	10^6
Atmosfera solare	10^{18}	10^4
Plasma per fusione	$10^{18} - 10^{24}$	10^6

Siccome i fluidi considerati sono dotati di carica, il loro moto dipende non solo dalle forze di pressione e d'attrito ma anche (e soprattutto) dall'effetto delle forze elettromagnetiche. Poiché le forze di pressione dipendono dal gradiente del campo di pressione, si comprende che, a rigore, lo studio delle onde elettromagnetiche nel plasma dovrebbe accompagnarsi allo studio delle onde di pressione (onde acustiche). Però, se la temperatura è sufficientemente bassa, le forze di pressione sono trascurabili e la presenza delle onde acustiche può essere ignorata. Quando quest'approssimazione è accettabile il plasma viene detto "freddo".

Per semplificare la successiva trattazione si considererà solo il caso di un plasma freddo in cui il campo elettrico ha un andamento temporale di tipo oscillante. Invece nessuna ipotesi limitativa viene fatta sull'induzione magnetica che - in aggiunta alla parte oscillante - può anche presentare una componente continua $\mathbf{B}_0$. Pertanto si assumerà che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ siano del tipo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \qquad \mathbf{B} = \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \tag{B.1}$$

dove $\mathbf{E}$ e $\mathbf{b}$ sono vettori oscillanti. Questa è la situazione che si presenta nella maggior parte dei problemi che riguardano la propagazione delle onde elettromagnetiche. $\mathbf{E}$ e $\mathbf{b}$ sono i campi dell'onda, che si propaga in una zona in cui è applicato un campo magnetostatico. Quest'ultimo campo è spesso presente, o per ragioni di confinamento del plasma (esempio macchine per fusione), ovvero per ragioni naturali (esempio il campo magnetico terrestre[1] nella ionosfera). Il campo magnetostatico è indipendente dalla presenza del plasma e si suppone noto.

Le forze elettromagnetiche dovute al campo oscillante determinano un moto oscillatorio degli elettroni e degli ioni. Però, se si suppone che le oscillazioni del campo siano rapide, le oscillazioni degli ioni sono molto meno ampie di quelle degli elettroni (la loro massa è almeno 1800 volte maggiore) e si può assumere che la corrente sia dovuta solo al moto degli elettroni. Dunque, nell'ipotesi di rapida variabilità del campo oscillante, il plasma può essere considerato ad un solo componente: il fluido elettronico. Siccome il moto degli ioni è trascurabile, la densità ionica non viene influenzata dalla presenza dell'onda elettromagnetica e rimane sostanzialmente uguale al valore di equilibrio (N_0). Invece la densità degli elettroni (N_e) può variare, essendo possibili piccole oscillazioni intorno al valore di equilibrio. Si ha:

$$N_e = N_0 + n \tag{B.2}$$

dove $n = n(\mathbf{r}, t)$ rappresenta la densità degli elettroni in eccesso rispetto agli ioni. L'ipotesi di plasma a un solo componente è in genere perfettamente accettabile anche per frequenze piuttosto basse (esempio 1 MHz).

Infine nello studio che segue si farà l'ipotesi che le forze d'attrito agenti sul fluido elettronico siano di tipo viscoso, cioè che esse siano proporzionali alla velocità del fluido. Le forze d'attrito sono effetto delle collisioni subite dagli elettroni.

1 L'induzione magnetica terrestre varia da luogo a luogo. La sua intensità è dell'ordine di $0.5 \cdot 10^{-4}$ Wb/m^2 (= 0.5 gauss).

Sia $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ la velocità di deriva degli elettroni. Essendo trascurabile il moto degli ioni, la densità di corrente può essere espressa mediante la ben nota relazione

$$\mathbf{J} = -q_e N_e \mathbf{U} \tag{B.3}$$

dove $q_e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C è il valore assoluto della carica dell'elettrone. Si consideri un elemento infinitesimo di fluido elettronico, che all'istante t occupa il volume ΔV (Figura B.1) e sia $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ la posizione del suo baricentro. La carica Δq e la massa Δm degli elettroni considerati sono

$$\Delta q = -q_e N_e \Delta V \qquad \Delta m = m_e N_e \Delta V$$

dove $m_e = 0.911 \cdot 10^{-30}$ kg è la massa dell'elettrone. Avendo trascurato le forze di pressione, le uniche forze agenti sull'elemento considerato sono quella elettromagnetica e quella d'attrito, date rispettivamente da:

$$\Delta \mathbf{F}_e = \Delta q (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) = -q_e N_e (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \Delta V \qquad \textit{(forza di Lorentz)} \tag{B.4}$$

$$\Delta \mathbf{F}_a = -k N_e \mathbf{U} \Delta V$$

Il coefficiente d'attrito k è positivo e dipende dalla natura del plasma e dalla temperatura. Per la legge di Newton si ha:

$$\Delta m \frac{d}{dt} \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t) = \Delta \mathbf{F}_e + \Delta \mathbf{F}_a$$

ovvero:

$$m_e \frac{d}{dt} \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t) = -\mathbf{q_e} \big(\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t)\big) - k\, \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t) \tag{B.5}$$

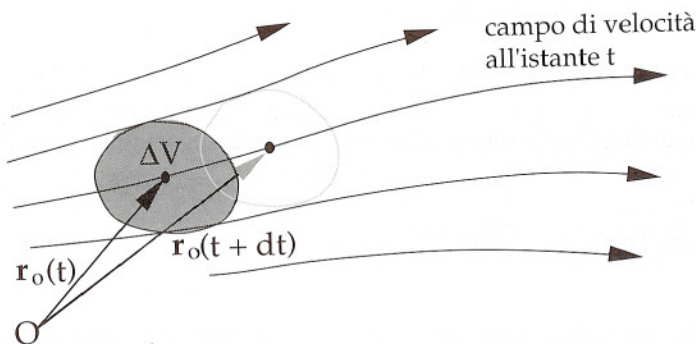



Figura B.1

Si noti che $\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t)$ è funzione del solo tempo, poiché la posizione del baricentro è funzione di t. Introducendo esplicitamente le coordinate (x_0, y_0, z_0) del baricentro (componenti di $\mathbf{r}_0$), e le componenti cartesiane della velocità $(\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y, \mathcal{U}_z)$, poiché le coordinate del baricentro sono funzioni di t si ha:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial x_0}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_0} + \frac{\partial y_0}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_0} + \frac{\partial z_0}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z_0} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\mathcal{U}_x \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathcal{U}_y \frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{U}_z \frac{\partial}{\partial z_0}\right)\mathbf{U} = \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$$

Sostituendo nella (B.5) e introducendo la seconda delle (B.1) si ottiene infine la seguente relazione che vale in tutto lo spazio occupato dal plasma poichè l'elemento di volume ΔV era generico:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U} = -\frac{q_e}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{U}\times\mathbf{b} + \mathbf{U}\times\mathbf{B}_0) - \frac{k}{m_e}\mathbf{U} \tag{B.6}$$

La (B.6) è un'equazione non-lineare, perché in essa appaiono prodotti dei campi incogniti $\mathbf{E}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{U}$. La non-linearità può essere trascurata se si suppone che l'ampiezza di questi campi sia tanto piccola da poter considerare i loro prodotti alla stessa stregua di quantità infinitesime del secondo ordine. Infatti, trascurando i prodotti, la (B.6) si riduce all'equazione lineare

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{q_e}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{U}\times\mathbf{B}_0) - \frac{k}{m_e}\mathbf{U} \tag{B.7}$$

Se il campo elettromagnetico oscillante e il campo di velocità che da esso dipende sono quantità "piccole", anche n (perturbazione della densità elettronica) è una quantità "piccola". Pertanto, dalle (B.2) e (B.3) si ottiene:

$$\mathbf{J} = -q_e(N_0 + n)\,\mathbf{U} \approx -q_e N_0 \mathbf{U} \tag{B.8}$$

Infine, eliminando $\mathbf{U}$ fra le due ultime relazioni si ricava la seguente equazione differenziale lineare

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nu\mathbf{J} + \omega_c\,\mathbf{J}\times\mathbf{u}_b = \varepsilon_0\,\omega_p^2\,\mathbf{E} \tag{B.9}$$

dove $\mathbf{u}_b = \mathbf{B}_o/B_o$ è un versore orientato come il campo magnetostatico e inoltre:

$$\omega_c = \frac{q_e B_0}{m_e} \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{q_e^2 N_0}{m_e \varepsilon_0}} \qquad \nu = k/m_e$$

La (B.9) è l'equazione costitutiva che descrive la conduzione del plasma freddo sotto l'azione di un'onda elettromagnetica di piccola intensità. Introducendo i valori delle costanti fisiche nelle espressioni di ω_c e di ω_p si ottiene:

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8.97\sqrt{N_0} \qquad [\text{Hz}] \qquad (\textit{frequenza di plasma}) \qquad (N_0 \text{ in } m^{-3})$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 2.80 \cdot 10^{10} B_0 \quad [\text{Hz}] \qquad (\textit{frequenza ciclotronica}) \qquad (B_0 \text{ in Wb/m}^2)$$

In assenza del campo magnetostatico il plasma si comporta come un mezzo isotropo; in questo caso infatti la pulsazione ciclotronica è nulla, il termine contenente $\mathbf{u}_b$ sparisce e l'equazione (B.9) assume una forma del tipo (2.5*c*, Capitolo 1), precisamente:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nu \mathbf{J} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E} \qquad (\textit{plasma isotropo}) \tag{B.10}$$

In presenza del campo magnetostatico il plasma si comporta invece come un mezzo anisotropo (*magnetoplasma*). La ragione fisica consiste nel fatto che il campo magnetostatico influenza in modo diverso le correnti fluenti in direzioni diverse (l'effetto è massimo quando la corrente è perpendicolare a $\mathbf{B}_0$, nullo quando è parallela). In effetti, la presenza di $\mathbf{u}_b$ nella (B.9) indica che la conduzione nel magnetoplasma dipende dalla direzione, anche se - a prima vista - la (B.9) ha una forma diversa da quella generale assunta per i mezzi anisotropi (Equazione 2.6, Capitolo 1). In effetti il termine contenente il prodotto vettoriale può essere scritto in maniera diversa introducendo un opportuno tensore. Se si indicano con α, β, γ gli angoli che $\mathbf{B}_0$ forma con gli assi x, y, z (Figura B.2), considerando le componenti cartesiane di $\mathbf{J} \times \mathbf{u}_b$ si verifica facilmente che è possibile scrivere

$$\nu \mathbf{J} + \omega_c \mathbf{J} \times \mathbf{u}_b = \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{J}$$

dove

$$\underline{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \nu & \omega_c \cos\gamma & -\omega_c \cos\beta \\ -\omega_c \cos\gamma & \nu & \omega_c \cos\alpha \\ \omega_c \cos\beta & -\omega_c \cos\alpha & \nu \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

Pertanto la (B.9) può essere scritta come segue:

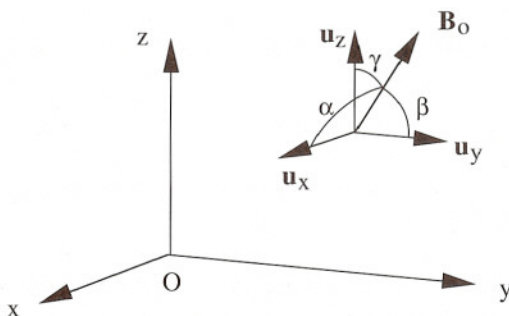



Figura B.2

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{J} = \varepsilon_0 \, \omega_p^2 \, \mathbf{E} \qquad (\textit{magnetoplasma}) \qquad \text{(B.12)}$$

Questa espressione è del tipo considerato nel Capitolo 1 per i mezzi anisotropi.

Se la probabilità che un elettrone subisca una collisione in un tempo pari al periodo delle oscillazioni è molto bassa, l'attrito può essere trascurato ponendo $\nu = 0$. In questo caso si dice che il plasma è *senza collisioni*. L'ipotesi di plasma senza collisioni è accettabile se il plasma è sufficientemente rarefatto, se la temperatura degli elettroni è bassa e se il periodo delle oscillazioni è abbastanza breve. Nello studio della propagazione ionosferica l'ipotesi di plasma senza collisioni è accettabile, almeno in prima approssimazione.

Come è noto dalla Fisica, la frequenza ciclotronica è la frequenza di rivoluzione nel moto ciclotronico di un elettrone che si muove nel campo magnetostatico $\mathbf{B}_0$. Per comprendere il significato fisico della frequenza di plasma si consideri un plasma freddo, isotropo di densità elettronica e temperatura uniformi. Prendendo la divergenza di entrambi i membri della (B.10), si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{J} + \nu \nabla \cdot \mathbf{J} = \varepsilon_0 \, \omega_p^2 \, \nabla \cdot \mathbf{E}$$

Poiché il plasma è gassoso, la polarizzazione può essere trascurata a causa della bassa densità di molecole e si può assumere $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Pertanto, usando l'equazione di continuità e l'equazione $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, si ottiene che la densità di carica soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \, \rho = 0$$

Poiché usualmente si ha $\nu << \omega_p$, la soluzione generale di questa equazione è del tipo

$$\rho(\mathbf{r},\, t) = R_1(\mathbf{r})e^{-\frac{1}{2}\nu t}\cos\Omega_p t + R_2(\mathbf{r})e^{-\frac{1}{2}\nu t}\sin\Omega_p t \qquad (\Omega_p = \sqrt{\omega_p^2 - \nu^2/4})$$

dove R_1 e R_2 dipendono dalle condizioni iniziali. La densità di elettroni in eccesso varia con la stessa legge, dato che:

$$\rho = -\, q_e\,(N_e - N_0) = -\, q_e\, n$$

Quindi, se all'istante iniziale la densità di elettroni differisce da N_0, essa invariabilmente tende a N_0 con oscillazioni smorzate di pulsazione Ω_p e costante di tempo $2/\nu$. A causa della piccolezza di ν la frequenza delle oscillazioni coincide in pratica con la frequenza di plasma. Dunque, se per una ragione qualsiasi la distribuzione degli elettroni viene spostata rispetto a quella di equilibrio, l'equilibrio viene ripristinato con un transitorio oscillante. Le oscillazioni sono dovute alle forze di attrazione che gli ioni esercitano sugli elettroni, all'inerzia degli elettroni e all'esiguità delle forze d'attrito.

C

Spettro delle onde elettromagnetiche

In base al valore di λ_0 lo spettro viene suddiviso in bande come indicato nella seguente tabella.

Si noti che i più piccoli valori di λ_0 per i quali è valida la teoria macroscopica dell'elettromagnetismo devono superare di molto le distanze tipiche che separano gli atomi o le molecole. A lunghezze d'onda dell'ordine delle distanze fra i corpuscoli microscopici non è più possibile rappresentare i materiali mediante modelli continui, prescindendo dalla loro costituzione microscopica. Inoltre, quanto più la lunghezza d'onda è piccola, tanto più diventano evidenti gli effetti della quantizzazione dell'energia elettromagnetica (fotoni). In questo caso l'elettromagnetismo classico deve essere sostituito da quello quantistico.

Banda	λ_0	f	*Denominazione usuale*
Onde miriametriche	100 – 10 km	3 – 30 kHz	V.L.F. (very low frequency)
Onde chilometriche	10 – 1 km	30 – 300 kHz	onde lunghe
Onde ettometriche	1000 – 100 m	0.3 – 3 MHz	onde medie
Onde decametriche	100 – 10 m	3 – 30 MHz	onde corte
Onde metriche	10 – 1 m	30 – 300 MHz	V.H.F. (very high frequency)
Onde decimetriche	10 – 1 dm	0.3 – 3 GHz	U.H.F. (ultra high frequency)
Onde centimetriche	10 – 1 cm	3 – 30 GHz	microonde
Onde millimetriche	10 – 1 mm	30 – 300 GHz	–
Onde submillimetriche	1 – 0.1 mm	300 – 3000 GHz	–
Onde micrometriche	100 – 1 μm	$3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{14}$ Hz	infrarosso
Onde luminose	1 – 0.1 μm	$3 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{15}$ Hz	visibile
Raggi ultravioletti	1000 – 10 Å	$3 \cdot 10^{15} - 3 \cdot 10^{17}$ Hz	ultravioletto
Raggi X	10 – 0.1 Å	$3 \cdot 10^{17} - 3 \cdot 10^{19}$ Hz	–
Raggi γ	< 0.1 Å	$> 3 \cdot 10^{19}$ Hz	–

D

Proprietà delle autofunzioni e degli autovalori dell'operatore di Laplace

La teoria delle guide d'onda, delle linee di trasmissione e delle cavità risonanti richiede l'uso di alcuni concetti matematici normalmente trattati nei corsi di "Metodi Matematici per la Fisica e l'Ingegneria". Essi vengono riassunti brevemente qui di seguito.[1]

Lo spazio L^2

Sia Ω una regione N-dimensionale finita (una superficie S nel caso bidimensionale, un volume V nel caso tridimensionale) racchiusa dal contorno C_Ω. Sia $\underline{\Omega}$ l'unione di Ω e di C_Ω. Si indica con $L^2(\underline{\Omega})$ l'insieme delle funzioni $u = u(x_1, x_2, .., x_N)$, a valori complessi, definite in $\underline{\Omega}$, tali che[2]

$$\int_\Omega |u|^2 \, d\Omega < \infty$$

L'insieme L^2 costituisce un particolare spazio di Hilbert in cui il "prodotto scalare" fra due elementi u, v è definito da:

$$<u, v> = \int_\Omega u\, v^* \, d\Omega$$

La norma di un elemento $u \in L^2$ è definita da:

$$\|u\| = <u, u>^{1/2}$$

1 Per una trattazione abbastanza approfondita e finalizzata allo studio delle onde elettromagnetiche si può consultare: D.S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, Oxford Engineering Science Series, Clarendon Press, Oxford 1979 , Sec. 3.4.

2 Gli integrali sono intesi nel senso di Lebesgue. La notazione $< \infty$ sta ad indicare l'esistenza dell'integrale.

La “distanza” fra due elementi $u, v \in L^2$ è definita da $\|u - v\|$. Se la distanza è nulla u e v differiscono al più in un insieme di misura nulla di Ω (ad esempio su un numero finito di linee nel caso bidimensionale, su un numero finito di superfici nel caso tridimensionale, ecc.). Nella teoria dei campi una simile differenza è irrilevante; infatti tutte le quantità osservabili sono dedotte dai campi mediante opportuni integrali e, d'altronde, gli integrali di funzioni che differiscono in insiemi di misura nulla sono uguali. Per questa ragione se la distanza fra u e v è nulla si scrive $u = v$.

Le proprietà dello spazio L^2 sono analoghe a quelle dello spazio euclideo: ogni elemento di L^2 equivale al vettore di posizione di un punto nello spazio euclideo; la sua norma corrisponde al modulo del vettore di posizione; la distanza fra due elementi equivale alla distanza fra i due punti; due elementi u, v sono “ortogonali” se

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Se si considera una qualsiasi elemento non nullo di L^2 e lo si divide per la sua norma si ottiene

$$\tilde{u} = u/\|u\|$$

$\tilde{u}$ ha norma unitaria ed equivale a un versore. Il procedimento di divisione per la norma viene detto “normalizzazione”. Tutti gli elementi non nulli di L^2 sono normalizzabili.

Un insieme di infiniti elementi $w_1, w_2, \ldots \in L^2$, linearmente indipendenti, viene detto “completo in L^2” se per qualsiasi $u \in L^2$ esiste un insieme di coefficienti $a_1, a_2, \ldots$ tale che

$$\|u - \sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_i\, w_i\| = 0$$

Si scrive

$$u = \sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_i\, w_i$$

ignorando il fatto che la serie può non convergere ad u in una regione di misura nulla (convergenza “in media”). Un insieme completo viene anche detto “base” di L^2.

Sono particolarmente utili le basi “ortonormali”, cioè quelle che godono della proprietà:[1]

$$\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$$

In questo caso risulta:

1 δ_{ij} è il simbolo di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$).

$$<u, w_j> = \sum_1^{\infty}{}_i a_i <w_i, w_j> = \sum_1^{\infty}{}_i a_i \delta_{ij} = a_j$$

Pertanto se $\{w_i\}$ è una base ortonormale si ha:

$$u = \sum_1^{\infty}{}_i <u, w_i> w_i \qquad \forall u \in L^2$$

Le basi ortonormali sono analoghe ai versori fondamentali di un sistema di riferimento ortogonale nello spazio euclideo. Per questa ragione i coefficienti $a_i = <u, w_i>$ vengono detti "componenti" di u secondo gli elementi della base. L'insieme delle componenti di u (spettro di u) identifica completamente la funzione (a meno dei valori in un insieme di misura nulla). Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione definita in un intervallo unidimensionale, in un rettangolo, in un parallelepipedo ecc. è un esempio familiare di sviluppo secondo una base ortonormale.

Spesso, nello studio dei campi, le funzioni incognite vengano determinate sotto forma di serie, trovandone le componenti secondo una base ortonormale prefissata. È possibile individuare infinite basi ortonormali, a ciascuna delle quali corrisponde una rappresentazione diversa della stessa funzione. Nel passare da una base all'altra le componenti cambiano, analogamente a quanto avviene per le componenti di un vettore quando si ruotano gli assi.

La definizione dello spazio L^2 può essere estesa alle funzioni vettoriali **u** a valori complessi definite in $\underline{\Omega}$, tali che

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega < \infty$$

In questo caso il prodotto scalare fra due elementi **u** e **v** è definito dall'espressione

$$<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega$$

Tutte le precedenti definizioni si applicano anche nel caso degli spazi L^2 costituiti da funzioni vettoriali.

Autofunzioni scalari e autovalori dell'operatore di Laplace

AUTOFUNZIONI SOTTO LA CONDIZIONE DI DIRICHELET Si consideri l'operatore di Laplace N-dimensionale

$$\nabla^2_{\mathbf{N}} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{\mathbf{N}}^2}$$

il cui dominio D' è il sottospazio di L^2 costituito dalle funzioni ψ dotate delle seguenti caratteristiche:[1]
- ψ e le sue derivate sono continue in $\underline{\Omega}$;
- le derivate seconde di ψ sono continue in Ω;
- $\nabla_N^2 \psi \in L^2$;
- $\psi = 0$ su C_Ω *(condizione di Dirichelet omogenea)*

Prendono il nome di "autofunzioni" dell'operatore sopra definito le soluzioni non nulle dell'equazione differenziale:

$$\nabla_N^2 \psi + \Lambda' \psi = 0 \qquad \text{in } \Omega \qquad (\psi \in D') \tag{D.1}$$

dove Λ' indica una opportuna costante (autovalore).[2] Si dimostra quanto segue:

- Esiste un'infinità numerabile di autofunzioni *reali* linearmente indipendenti e normalizzate $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$. Ad esse corrisponde un'infinità numerabile di autovalori *reali positivi*, ordinabili in una successione non decrescente illimitata $\{\Lambda'_1, \Lambda'_2, ...\}$. La condizione di normalizzazione

$$<\psi_i, \psi_i> = 1 \tag{D.2}$$

  definisce completamente le autofunzioni, a meno del segno, che può essere scelto arbitrariamente.
- Possono esistere autofunzioni distinte che hanno lo stesso autovalore (autofunzioni degeneri). Il numero di autofunzioni corrispondenti ad uno stesso autovalore (ordine di molteplicità dell'autovalore) è finito. Ogni combinazione lineare delle M autofunzioni corrispondenti ad un autovalore di molteplicità M costituisce una nuova autofunzione. Pertanto le autofunzioni degeneri non sono determinate univocamente. Esiste però la possibilità di combinare le autofunzioni degeneri di una M-upla qualsiasi in modo da trasformarle in una nuova M-upla i cui elementi risultano normalizzati e mutuamente ortogonali. D'ora in poi si supporrà che le autofunzioni degeneri siano scelte in modo da godere di questa proprietà.
- Le autofunzioni costituiscono una base ortonormale di L^2. Pertanto si ha:

$$< \psi_i, \psi_j >= \delta_{ij}$$

$$u = \sum_1^\infty {}_i\, a_i \psi_i \qquad a_i =< u, \psi_i > \qquad \forall\, u \in L^2 \tag{D.3}$$

- Se u è continua, differenziabile almeno due volte e nulla sul contorno si ha pure:

---

1 Si ricorda che la definizione del dominio è parte integrante della definizione di un operatore.

2 In generale le autofunzioni (o autovettori) di un operatore lineare T che trasforma gli elementi di uno spazio in altri elementi dello stesso spazio, sono quelle particolari funzioni che vengono trasformate in se stesse, a parte una dilatazione o contrazione.

$$\nabla_N^2 u = -\sum_1^{\infty}{}_i \Lambda'_i a_i \psi_i \tag{D.4}$$

■ Facendo per semplicità riferimento al caso tridimensionale, è istruttivo verificare quanto segue: a) l'ortogonalità di due autofunzioni ψ_i e ψ_j (con $\Lambda'_i \neq \Lambda'_j$) viene dimostrata utilizzando la (D.1) e la seconda identità di Green (Equazione A.103); b) il fatto che gli autovalori sono reali positivi viene dimostrato applicando la prima identità di Green (Equazione A.102) al prodotto $\psi\nabla^2\psi$; c) la (D.4) viene ottenuta esprimendo $\nabla^2 u$ mediante lo sviluppo in autofunzioni, trasformando le componenti mediante la seconda identità di Green, osservando che gli integrali al contorno sono nulli e utilizzando la (D.1). ■

AUTOFUNZIONI SOTTO LA CONDIZIONE DI NEUMANN Altre autofunzioni di notevole interesse sono quelle dell'operatore di Laplace agente nello spazio D" costituito dalle funzioni φ che soddisfano la condizione al contorno

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{su } C_\Omega \qquad (\textit{condizione di Neumann omogenea})$$

e che, per il resto, soddisfano tutte le altre condizioni prima elencate per le funzioni ψ. Le autofunzioni di questo nuovo operatore sono le soluzioni non nulle dell'equazione differenziale:

$$\nabla_N^2 \varphi + \Lambda''\varphi = 0 \qquad \text{in } \Omega \qquad (\varphi \in D'') \tag{D.5}$$

Le proprietà delle autofunzioni $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ e degli autovalori $\{\Lambda''_1, \Lambda''_2, ...\}$ sono identiche a quelle elencate per il problema (D.1) con una sola variante: l'autovalore Λ''_1 è nullo e la corrispondente autofunzione è costante. Anche queste autofunzioni costituiscono una base ortonormale; pertanto si ha:

$$<\varphi_i, \varphi_j> = \delta_{ij}$$

$$u = \sum_1^{\infty}{}_i b_i \varphi_i \qquad b_i = <u, \varphi_i> \qquad \forall\, u \in L^2 \tag{D.6}$$

Inoltre, se u è una funzione continua, differenziabile almeno due volte e se soddisfa la condizione di Neumann si ha:

$$\nabla_N^2 u = -\sum_2^{\infty}{}_i \Lambda''_i b_i \varphi_i \tag{D.7}$$

Si richiama l'attenzione sul fatto che la (D.6) vale per qualunque elemento di L^2, mentre la (D.7) vale solo per gli elementi di D". Si nota inoltre che nello sviluppo (D.7) manca la prima autofunzione, perché il suo autovalore è nullo.

■ Le dimostrazioni dell'ortogonalità delle autofunzioni φ, del fatto che gli autovalori Λ'' sono reali non negativi e della (D.7) sono analoghe a quelle delineate per la autofunzioni ψ. ■

DIFFERENZIABILITÀ DEGLI SVILUPPI IN AUTOFUNZIONI Si indica con $\nabla_N u$ il vettore N-dimensionale che ha per componenti le derivate parziali di u rispetto alle coordinate x_1, x_2, ..., x_N. Valgono i seguenti teoremi:

Teorema I: Se u è una funzione continua definita in $\underline{\Omega}$, se essa è nulla sul contorno e se inoltre

$$\int_\Omega |\nabla_\mathbf{N} u|^2 \, d\Omega < \infty$$

allora, lo sviluppo (D.3) è differenziabile termine a termine:

$$\nabla_\mathbf{N} u = \sum_1^\infty {}_i \, a_i \nabla_\mathbf{N} \psi_i \tag{D.8}$$

Teorema II: Se u è una funzione continua definita in Ω e se

$$\int_\Omega |\nabla_\mathbf{N} u|^2 \, d\Omega < \infty$$

allora lo sviluppo (D.6) è differenziabile termine a termine:

$$\nabla_\mathbf{N} u = \sum_2^\infty {}_i \, b_i \nabla_\mathbf{N} \varphi_i \tag{D.9}$$

Si noti l'assenza della prima autofunzione, che ha il gradiente nullo.

Teorema III: Se u è una funzione definita in Ω e dipendente dal parametro ξ, se è possibile definire $\partial^n u/\partial \xi^n$, e se inoltre

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^n u}{\partial \xi^n} \right|^2 d\Omega < \infty$$

allora gli sviluppi (D.3) e (D.6) sono differenziabili termine a termine rispetto a ξ. Si ha:

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi^n} = \sum_1^\infty {}_i \, \frac{\partial^n a_i}{\partial \xi^n} \psi_i \qquad \frac{\partial^n u}{\partial \xi^n} = \sum_1^\infty {}_i \, \frac{\partial^n b_i}{\partial \xi^n} \varphi_i \tag{D.10}$$

Autofunzioni vettoriali dell'operatore di Laplace

Sia V un volume delimitato dalla superficie S_V. Si considerino i seguenti problemi agli autovalori:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{U} + \Gamma' \mathbf{U} = 0 & \text{in V} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \mathbf{n} \times \mathbf{U} = 0 & \text{su } S_V \end{cases} \tag{D.11}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{V} + \Gamma'' \mathbf{V} = 0 & \text{in V} \\ \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0 & \text{su } S_V \end{cases} \tag{D.12}$$

Dove **U** e **V** sono vettori definiti in V (autofunzioni) e Γ' e Γ'' sono opportuni coefficienti (autovalori).
Si dimostra quanto segue:

- I problemi (D.11) e (D.12) ammettono ciascuno un'infinità numerabile di autofunzioni *reali*, definite a meno del segno, tali che

  $$\int_V \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \, dV = 1 \qquad \int_V \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, dV = 1$$

  Gli autovalori sono *reali non negativi* e possono essere ordinati in due successioni illimitate non decrescenti $\{\Gamma'_1, \Gamma'_2, ...\}$ e $\{\Gamma''_1, \Gamma''_2, ...\}$. Le autofunzioni corrispondenti risultano ordinate nei due insiemi $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ...\}$ e $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, ...\}$.
- Gli eventuali autovalori ripetuti (autovalori degeneri) sono presenti in numero finito.
- Ciascuno degli insiemi $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ...\}$ e $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, ...\}$ è una base ortonormale per lo spazio L^2 costituto da funzioni vettoriali definite in V. Dunque valgono le condizioni di ortonormalità

  $$\int_V \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j \, dV = \delta_{ij} \qquad \int_V \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j = \delta_{ij} \tag{D.13}$$

  ed è possibile rappresentare qualsiasi $\mathbf{u} \in L^2$ con i seguenti sviluppi in autofunzioni:

  $$\mathbf{u} = \sum_1^{\infty}{}_i \, a_i \mathbf{U}_i \qquad a_i = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_i \, dV \tag{D.14a}$$

  $$\mathbf{u} = \sum_1^{\infty}{}_i \, b_i \mathbf{V}_i \qquad b_i = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_i \, dV \tag{D.14b}$$

- Ciascuno degli insiemi $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ...\}$ e $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, ...\}$ è costituito dall'unione dei seguenti insiemi, l'ultimo dei quali può essere vuoto:

autofunzioni solenoidali $(\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \nabla \times \mathbf{U} \neq 0; \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \nabla \times \mathbf{V} \neq 0)$;

autofunzioni irrotazionali $(\nabla \cdot \mathbf{U} \neq 0, \nabla \times \mathbf{U} = 0; \nabla \cdot \mathbf{V} \neq 0, \nabla \times \mathbf{V} = 0)$;

autofunzioni armoniche $(\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \nabla \times \mathbf{U} = 0; \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \nabla \times \mathbf{V} = 0)$.

AUTOFUNZIONI SOLENOIDALI D'ora in poi queste autofunzioni sono indicate come segue:

$\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ...\}$ per il problema (D.11) $\qquad$ $\{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, ...\}$ per il problema (D.12).

I loro autovalori sono positivi e sono uguali nei due problemi. Essi costituiscono una successione illimitata non decrescente, d'ora in poi indicata con $\{k_1^2, k_2^2, ...\}$. Le autofunzioni di uguale indice soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_i &= k_i \mathbf{E}_i \\ & \qquad (k_i > 0) \\ \nabla \times \mathbf{E}_i &= k_i \mathbf{H}_i \end{aligned} \tag{D.15}$$

Con la condizione $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i = 0$ le equazioni (D.15) definiscono un problema agli autovalori equivalente ai problemi (D.11) e (D.12) per quanto riguarda la determinazione delle sole autofunzioni solenoidali.

■ Ad esempio, eliminando $\mathbf{H}_i$ fra le due equazioni, si ottiene $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i - k_i^2 \mathbf{E}_i = 0$. D'altro canto la prima delle (D.15) definisce $\mathbf{E}_i$ come un vettore solenoidale, dato che $k_i\mathbf{E}_i$ è uguale a un rotore. Pertanto, in base all'identità (A.34), la precedente equazione equivale a $\nabla^2\mathbf{E}_i + k_i^2 \mathbf{E}_i = 0$, con la condizione $\nabla \cdot \mathbf{E}_i = 0$ in tutto il volume V. ■

AUTOFUNZIONI IRROTAZIONALI Queste autofunzioni sono collegate alle autofunzioni scalari e agli autovalori dell'operatore di Laplace con le condizioni di Neumann e di Dirichelet (vedi paragrafo precedente). Le autofunzioni irrotazionali sono:

$$\left\{ -\frac{\nabla \psi_1}{\Lambda'^{1/2}_1}, -\frac{\nabla \psi_2}{\Lambda'^{1/2}_2}, \dots \right\} \qquad \text{per il problema (D.11)}$$

$$\left\{ -\frac{\nabla \varphi_2}{\Lambda''^{1/2}_2}, -\frac{\nabla \varphi_3}{\Lambda'^{1/2}_3}, \dots \right\} \qquad \text{per il problema (D.12)}$$

I loro autovalori sono quelli stessi delle autofunzioni scalari, cioé Λ'_i e Λ''_i.

■ Ad esempio, prendendo il gradiente della (D.1) si ottiene: $\nabla^2(\nabla\psi_i) + \Lambda'_i(\nabla\psi_i) = 0$. Poiché inoltre ψ_i e $\nabla^2\psi_i = \nabla \cdot (\nabla\psi_i)$ sono nulli su S_v, sono rispettate le condizioni al contorno $\mathbf{n} \times \nabla\psi_i = 0$, $\nabla \cdot (\nabla\psi_i) = 0$. Quindi $-\nabla\psi_i$ è un'autofunzione irrotazionale del problema (D.11). La divisione per $\Lambda_i'^{1/2}$ serve a normalizzare l'autofunzione. ■

AUTOFUNZIONI ARMONICHE Un campo con rotore e divergenza nulli (campo armonico) ha il laplaciano nullo (vedi Equazione A.34). Pertanto le autofunzioni armoniche hanno autovalore nullo. Queste autofunzioni non esistono se il volume V è semplicemente connesso e delimitato da una sola superficie.

Se il volume è delimitato da M + 1 superfici separate (esempio volume delimitato da due sfere concentriche, M = 1), il problema (D.11) ammette M soluzioni armoniche, d'ora in poi indicate con $\{\mathbf{E}_1^0, \mathbf{E}_2^0, ..., \mathbf{E}_M^0\}$. Queste autofunzioni soddisfano equazioni identiche a quelle che governano il campo elettrostatico che si avrebbe se le varie parti di S_v fossero superfici conduttrici, portate a potenziali diversi. Pertanto l'andamento delle autofunzioni in questione è analogo a quello del campo elettrostatico.

Se il volume è molteplicemente connesso, con grado di molteplicità N + 1 (esempio volume toroidale, N = 1), il problema (D.12) ammette N soluzioni armoniche, d'ora in poi indicate con $\{\mathbf{H}_1^0, \mathbf{H}_2^0, ..., \mathbf{H}_N^0\}$. Queste autofunzioni soddisfano equazioni identiche a quelle che governano il campo magnetostatico generato da lamine di corrente continua circolanti sul contorno. Pertanto l'andamento delle autofunzioni in questione è analogo a quello del campo magnetostatico.

Distinguendo le autofunzioni dei vari tipi, gli sviluppi (D.14) assumono la forma:

$$\mathbf{u} = \sum_1^{\infty}{}_i A_i \mathbf{E}_i + \sum_1^{M}{}_i A_i^0 \mathbf{E}_i^0 - \sum_1^{\infty}{}_i F_i \nabla\psi_i \qquad (D.16a)$$

$$\mathbf{u} = \sum_1^{\infty}{}_i B_i \mathbf{H}_i + \sum_1^{N}{}_i B_i^0 \mathbf{H}_i^0 - \sum_1^{\infty}{}_i G_i \nabla\varphi_i \qquad (D.16b)$$

dove:

$$A_i = \int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{E}_i\, dV \qquad A_i^0 = \int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{E}_i^0\, dV \qquad F_i = -\frac{1}{\Lambda'_i}\int_V \mathbf{u}\cdot\nabla\psi_i\, dV \qquad (D.17a)$$

$$B_i = \int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{H}_i\, dV \qquad B_i^0 = \int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{H}_i^0\, dV \qquad G_i = -\frac{1}{\Lambda''_i}\int_V \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_i\, dV \qquad (D.17b)$$

Se **u** è una funzione continua in $\underline{V}$ le espressioni dei coefficienti possono essere trasformate utilizzando le (A.26), (A.27), (D.15) e il teorema della divergenza. Come il lettore può facilmente verificare si ha:

$$A_i = \frac{1}{k_i}\left(\int_V \mathbf{H}_i\cdot\nabla\times\mathbf{u}\, dV - \int_{S_v} \mathbf{H}_i\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{u}\, dS_v\right) \qquad F_i = \frac{1}{\Lambda'_i}\int_V \psi_i\,\nabla\cdot\mathbf{u}\, dV \qquad (D.18a)$$

$$B_i = \frac{1}{k_i}\int_V \mathbf{E}_i \cdot \nabla \times \mathbf{u}\, dV \qquad G_i = \frac{1}{\Lambda''_i}\left(\int_V \varphi_i \nabla \cdot \mathbf{u}\, dV - \int_{S_v} \varphi_i\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\, dS_v\right) \tag{D.18b}$$

Nel caso di un volume semplicemente connesso delimitato da una sola superficie i precedenti coefficenti identificano completamente il campo **u**.

E
Funzioni di Bessel

In questa appendice sono elencate alcune proprietà delle funzioni di Bessel. Per un'elencazione molto più ampia si veda: Abramowitz-Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., N.Y. 1965.

FUNZIONI DI BESSEL DEL PRIMO E DEL SECONDO TIPO Le funzioni di Bessel, indicate in generale con $Z_\nu = Z_\nu(z)$, sono definite sul piano complesso $z = x + jy$. Esse sono le soluzioni dell'equazione di Bessel

$$z\frac{d}{dz}\left(z\frac{dZ_\nu}{dz}\right) + (z^2 - \nu^2)Z_\nu = 0 \qquad \text{(E.1)}$$

dove ν è una costante (generalmente complessa) detta "ordine" dell'equazione e delle funzioni. Nello studio delle onde interessa il caso in cui ν è reale, in particolare intero. In questo ultimo caso l'ordine viene indicato con il simbolo *n*.

Se l'ordine *non* è intero la soluzione generale della (E.1) può essere posta nella forma

$$Z_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z) \qquad \text{(A, B costanti arbitrarie)} \qquad \text{(E.2)}$$

dove $J_\nu(z)$ e $J_{-\nu}(z)$ sono due soluzioni indipendenti (*funzioni di Bessel del primo tipo*) date da:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_0^\infty {}_m \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \qquad \text{(E.3}a\text{)}$$

$$|\arg z| < \pi$$

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_0^\infty {}_m \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \qquad \text{(E.3}b\text{)}$$

In queste espressioni la funzione Γ indica il cosiddetto "fattoriale generalizzato". Quando ν è intero si ha:

$$\Gamma(m+n+1)=(m+n)!$$

e risulta $J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)$. In questo caso la soluzione generale della (E.1) non è più la (E.2), perchè J_n e J_{-n} non sono più indipendenti. Un'altra soluzione particolare dell'equazione di Bessel è evidentemente:

$$N_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$ (*funzione di Bessel del secondo tipo*)

Pertanto si può anche scrivere:

$$Z_\nu(z) = CJ_\nu(z) + DN_\nu(z) \tag{E.4}$$

Quando l'ordine è intero l'espressione che definisce N_ν diviene indeterminata, e quindi N_n deve essere definita mediante il seguente limite:

$$N_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

La funzione così ottenuta è indipendente da J_n, così che la (E.4) rappresenta la soluzione generale dell'equazione di Bessel, anche quando l'ordine è intero.
Le funzioni $J_n(z)$ sono analitiche in tutto il piano z. Le altre funzioni di Bessel sono analitiche in tutto il piano z, escluso il semiasse $x \le 0$ (l'origine è un punto di diramazione).

Le funzioni di Bessel J_0 e N_0 sono rappresentate dalle seguenti serie di potenze:

$$J_0(z)=\sum_0^\infty {}_m \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \tag{E.5}$$

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{z}{2}\right)J_0(z)+\frac{2}{\pi}\sum_0^\infty {}_m \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\phi(m) \tag{E.6}$$

dove

$\phi(m) = 1 + 1/2 + ... + 1/m$ $\qquad\gamma = 0.5772...$ $\qquad$ (costante di Eulero)

Se l'ordine è un intero diverso da zero si ha:

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_0^\infty {}_m \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \tag{E.7}$$

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{z}{2}\right)J_n(z) - \frac{1}{\pi}\sum_0^{n-1}{}_m \frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} +$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_0^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}[\phi(m)+\phi(m+n)] \tag{E.8}$$

L'andamento di alcune funzioni di Bessel sull'asse reale positivo è rappresentato nelle Figure E.1 e E.2. I valori numerici possono essere ottenuti mediante comuni routine di calcolo numerico, o possono essere reperiti su tabelle.

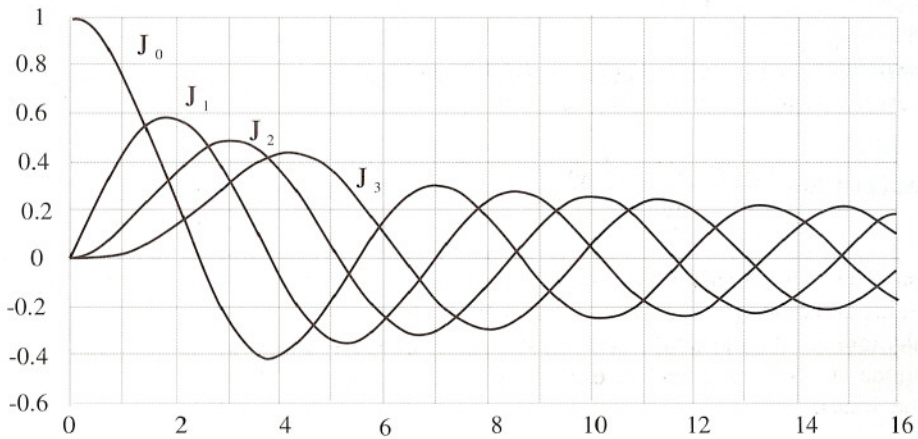



Figura E.1

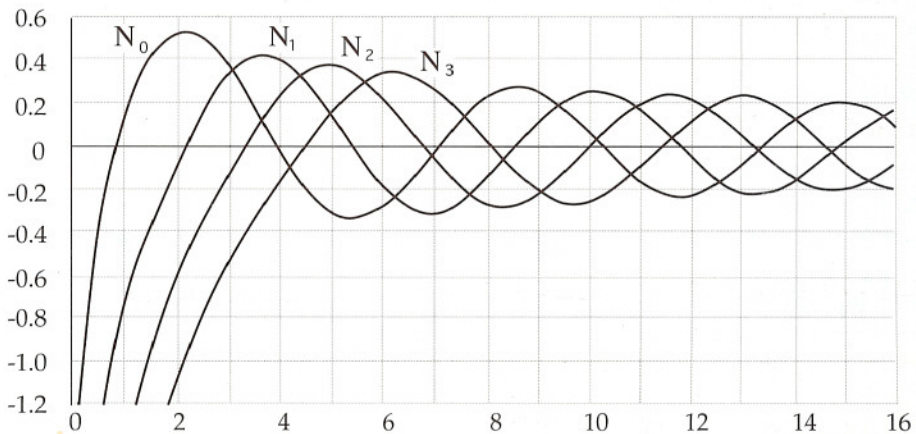



Figura E.2

Altre soluzioni particolari della (E.1) sono le funzioni di Hankel (o funzioni di Bessel del terzo tipo), definite come segue:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + jN_\nu(z) \qquad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - jN_\nu(z) \tag{E.9}$$

È evidente che la soluzione generale (E.4) può trasformata nella seguente espressione:

$$Z_\nu(z) = M\,H_\nu^{(1)}(z) + N\,H_\nu^{(2)}(z) \qquad (M,\ N \text{ costanti arbitrarie})$$

La Figura E.3 mostra l'andamento delle funzioni di Hankel di ordine 0 e 1, per valori reali positivi dell'argomento.

APPROSSIMAZIONI PER PICCOLI VALORI DELL'ARGOMENTO Dalle precedenti definizioni si deduce facilmente che, per piccoli valori di $|z|$, si ha:

$$J_0(z) \approx 1 \qquad N_0(z) \approx \frac{2}{\pi}\ln z \tag{E.10}$$

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \qquad N_\nu(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu \qquad (\nu > 0) \tag{E.11}$$

APPROSSIMAZIONI PER GRANDI VALORI DELL'ARGOMENTO Per valori molto grandi di $|z|$ si ha:

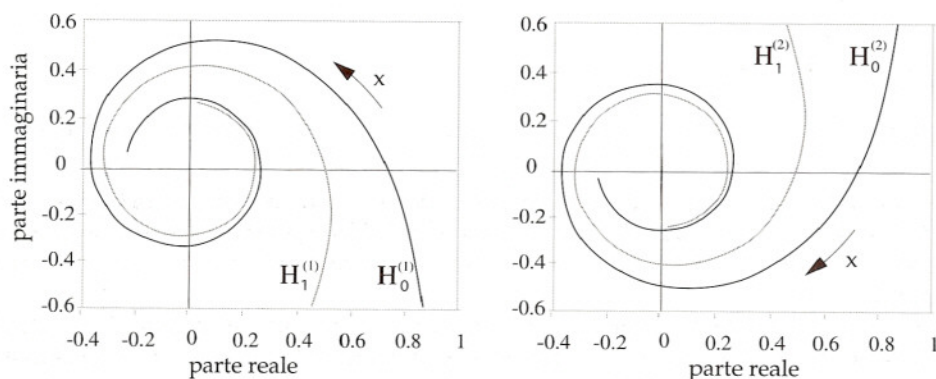



Figura E.3

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \qquad N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \tag{E.12}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{j(z-\pi/4-\nu\pi/2)} \qquad H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-j(z-\pi/4-\nu\pi/2)} \tag{E.13}$$

Al crescere di x lungo l'asse reale positivo le funzioni $J_n(x)$ e $N_n(x)$ tendono a comportarsi come sinusoidi smorzate, la cui ampiezza decresce come $x^{-1/2}$; il modulo delle funzioni di Hankel decresce con la stessa legge e l'argomento varia proporzionalmente a x.

FORMULE DI RICORRENZA Detta Z_ν una funzione di Bessel qualsiasi, vale la seguente relazione:

$$Z_\nu(z) = \frac{2(\nu-1)}{z} Z_{\nu-1} - Z_{\nu-2} \tag{E.14}$$

Questa formula permette di dedurre per ricorrenza le funzioni di ordine intero maggiore di 1 partendo dalle funzioni Z_0 e Z_1.

Indicando con un apice la derivata si ha:

$$Z'_\nu(z) = Z_{\nu-1} - \frac{\nu}{z} Z_\nu \tag{E.15}$$

$$Z'_\nu(z) = -Z_{\nu+1} + \frac{\nu}{z} Z_\nu \tag{E.16}$$

$$Z'_\nu(z) = \frac{Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1}}{2} \tag{E.17}$$

In particolare risulta:

$$Z'_0 = -Z_1 \tag{E.18}$$

ZERI DELLE FUNZIONI $J_n(z)$ e $J'_n(z)$ Quando l'ordine è reale le funzioni del primo e del secondo tipo e le loro derivate prime hanno un numero infinito di zeri reali, ciascuno dei quali è semplice, con la possibile esclusione dell'eventuale zero sull'origine (che può essere multiplo).

Gli zeri positivi delle funzioni $J_n(z)$ e $J'_n(z)$ costituiscono due successioni, i cui termini sono indicati con x_{np} e x'_{np} per le due funzioni rispettivamente (p = 1, 2, ...). I valori di alcuni zeri sono riportati nelle Tabelle E.1 e E.2

Tabella E.1 Alcuni valori degli zeri x_{np} di J_n

p \ n	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.372	
4	11.792	13.324	14.796			

Tabella E.2 Alcuni valori degli zeri x'_{np} di J'_n

p \ n	0	1	2	3	4	5
1	3.832	1.841	3.054	4.201	5.317	6.416
2	7.016	5.331	6.706	8.015	9.282	10.520
3	10.173	8.536	9.969	11.346	12.682	13.987
4	13.324	11.706	13.170			

INTEGRALI DI LOMMEL Indicate con h e k due costanti diverse si ha:

$$\int_0^z t\,J_\nu(ht)J_\nu(kt)\,dt = \frac{z}{h^2-k^2}\{h\,J_\nu(kz)J_{\nu+1}(hz) - k\,J_\nu(hz)J_{\nu+1}(kz)\} =$$

$$\frac{z}{h^2-k^2}\{k\,J_{\nu-1}(kz)J_\nu(hz) - h\,J_{\nu-1}(hz)J_\nu(kz)\} \qquad (\nu > -1) \qquad \text{(E.19)}$$

$$\int_0^z t\,J_\nu^2(ht)\,dt = \frac{z^2}{2}\left\{J'^2_\nu(hz) + \left(1-\frac{\nu^2}{h^2z^2}\right)J_\nu^2(hz)\right\} \qquad (\nu > -1) \qquad \text{(E.20)}$$

I precedenti integrali sono noti come integrali di Lommel.

RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI $J_n(z)$ Esistono diverse rappresentazioni integrali delle funzioni di Bessel, fra le quali la seguente:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta = \frac{j^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jz\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta \qquad \text{(E.21)}$$

FUNZIONI DI BESSEL MODIFICATE Vengono così indicate le soluzioni dell'equazione di Bessel modificata:

$$z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\tilde{Z}}{dz}\right)-(z^2+\nu^2)\tilde{Z}=0 \tag{E.22}$$

Nello studio dei campi è particolarmente interessante il caso in cui z è reale non negativo. In questo caso la soluzione generale della (E.22) è data da:

$$\tilde{Z}(x)=AI_\nu(x)+BK_\nu(x) \tag{E.23}$$

dove:

$$I_\nu(x)=j^{-\nu}J_\nu(jx) \qquad K_\nu(x)=(-j)^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(2)}(-jx) \qquad (x\ge 0) \tag{E.24}$$

L'andamento di I_0, I_1, K_0, K_1 è rappresentato nella Figura E.4.

Per valori grandi di x si ha:

$$I_\nu(x)\approx\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad K_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x} \tag{E.25}$$

Le formule di ricorrenza per le funzioni modificate possono essere facilmente dedotte dalle (E.14-18).

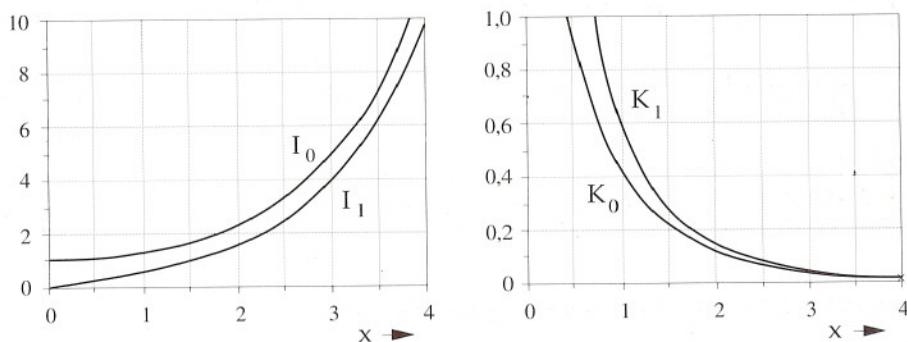



Figura E.4

F
Integrale di Fourier

In questa appendice vengono riassunte alcune delle principali proprietà della trasformata di Fourier per le funzioni appartenenti allo spazio $L^2(R^N)$.[1] Per la sua importanza applicativa, la teoria della trasformata di Fourier per questa classe di funzioni è trattata in tutti i testi di Metodi Matematici per la Fisica e l'Ingegneria (esempio Morse-Feshback, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953).

Teorema di Plancherel Sia f = f(x) una funzione (a valori generalmente complessi) appartenente allo spazio $L^2(R)$. Sia inoltre:

$$\tilde{f}(\xi,\ a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x) e^{-j\xi x}\, dx \qquad (\xi,\ a \in R)$$

Allora, se $a \to \infty$, $\tilde{f}(\xi, a)$ converge in media a una certa funzione $\tilde{f}(\xi) \in L^2(R)$ e, inoltre, la funzione

$$f(x,\ a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \tilde{f}(\xi) e^{j\xi x}\, d\xi$$

converge in media a f(x).

1 Lo spazio $L^2(R^N)$ è costituito dalle funzioni $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ per le quali esiste l'integrale

$$\int_{R^N} |f|^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N$$

Si noti che l'esistenza dell'integrale implica che, all'infinito, f debba tendere a zero con sufficiente rapidità. La teoria dell'integrale di Fourier può essere trattata in maniera più generale nello spazio delle distribuzioni. Tuttavia, la limitazione allo spazio L^2 non è pregiudizievole per le applicazioni considerate in questo corso.

Definizione La funzione $\tilde{f}(\xi)$ prende il nome di "trasformata di Fourier" di f e si usa scrivere

$$\tilde{f}(\xi) = \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} \, dx \tag{F.1}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{j\xi x} \, d\xi \tag{F.2}$$

La (F.2) rappresenta f mediante un integrale, detto "integrale di Fourier". L'operazione $\mathcal{F}^{-1}$ fornisce f come "trasformata inversa" (o antitrasformata) di $\tilde{f}$. La trasformata determina in modo univoco la funzione corrispondente. Essa viene spesso detta "spettro" della funzione, e la variabile ξ viene detta "variabile spettrale".

L'integrale di Fourier rappresenta f come sovrapposizione di infiniti contributi elementari del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} \, d\xi \, e^{j\xi x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\tilde{f}| d\xi [\cos(\xi x + \angle\tilde{f}) + j \sin(\xi x + \angle\tilde{f})]$$

Al crescere di $|\xi|$ tali contributi oscillano sempre più rapidamente. Le loro ampiezze e fasi variano secondo la conformazione dello spettro. Se lo spettro ha ampiezza sensibile solo in prossimità dell'origine, i soli contributi sensibili sono quelli che oscillano più lentamente. Per questa ragione le variazioni di f sono tanto più lente quanto più il suo spettro è concentrato intorno all'origine (e viceversa).

Alcune proprietà elementari Le proprietà elencate di seguito risultano immediatamente dalla definizione. Si suppone che tutte le funzioni di cui si considerano le trasformate appartengano allo spazio $L^2(R)$.

$$\mathcal{F}[f + g] = \tilde{f} + \tilde{g} \tag{F.3}$$

$$\mathcal{F}[kf] = k\tilde{f} \qquad (k = \text{costante complessa}) \tag{F.4}$$

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \tilde{f} e^{-jx_0\xi} \qquad (x_0 = \text{costante reale}) \tag{F.5}$$

$$\mathcal{F}[f e^{j\xi_0 x}] = \tilde{f}(\xi - \xi_0) \qquad (\xi_0 = \text{costante reale}) \tag{F.6}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (j\xi)^n \tilde{f} \tag{F.7}$$

$$\mathcal{F}[x^n f] = j^n \frac{d^n \tilde{f}}{d\xi^n} \tag{F.8}$$

$$\tilde{f}(-\xi) = \tilde{f}^*(\xi) \qquad (\text{se e solo se f è reale}) \tag{F.9}$$

Formula di Parseval Date le funzioni f(x), g(x) $\in L^2$ (R) vale la formula di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ g^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi)\ \tilde{g}^*(\xi)d\xi \qquad \text{(F.10)}$$

In particolare, ponendo g = f, si trova:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}|^2\, d\xi \qquad (\text{ossia } \|f\|^2 = \|\tilde{f}\|^2) \qquad \text{(F.11)}$$

Teorema della convoluzione Siano f(x), g(x) $\in L^2$ (R). Si definisce "prodotto convolutorio" (o "convoluzione") fra le due funzioni l'integrale:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')dx' \qquad \text{(F.12)}$$

Si ha:

$$\mathcal{F}[h] = \tilde{f}\,\tilde{g} \qquad \text{(F.13)}$$

e quindi:

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}\,\tilde{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi)\tilde{g}(\xi)e^{j\xi x}\, d\xi \qquad \text{(F.14)}$$

Funzioni di più variabili Sia $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ una funzione appartenente allo spazio $L^2 (R^N)$. Ciò significa che:

$$\int_{R^N} |f|^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N < \infty$$

L'esistenza dell'integrale multiplo implica l'esistenza degli integrali fra $-\infty$ e ∞ rispetto a $x_1, x_2, ..., x_N$. Quindi la funzione f è a quadrato sommabile anche rispetto alle singole variabili. Per questa ragione è lecito applicare ripetutamente a f la trasformata di Fourier rispetto a una variabile per volta, ottenendo la trasformata N-dimensionale:

$$\tilde{f}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)e^{-j(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_N x_N)}dx_1\, dx_2 \ldots dx_N \qquad \text{(F.15)}$$

Analogamente, antitrasformando rispetto alle N variabili spettrali $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, si ottiene:

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) e^{j(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + ... + \xi_N x_N)} d\xi_1 \, d\xi_2 ... d\xi_N \tag{F.16}$$

Le proprietà (F.3, F.4) valgono anche nel caso della trasformata N-dimensionale. Le (F.5, F.6, F.7, F.8, F.9) vengono sostituite dalle seguenti relazioni più generali:

$$\mathcal{F}[f(x_1 - x_{01}, ..., x_N - x_{0N})] = \tilde{f} \, e^{-j(x_{01}\xi_1 + ... + x_{0N}\xi_N)} \tag{F.17}$$

$$\mathcal{F}[f \, e^{j(\xi_{01} x_1 + ... + \xi_{0N} x_N)}] = \tilde{f}(\xi_1 - \xi_{01}, ..., \xi_N - \xi_{0N}) \tag{F.18}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^{(m+n+...+p)} f}{\partial x_1^m \, \partial x_2^n ... \partial x_N^p}\right] = (j\xi_1)^m (j\xi_2)^n ... (j\xi_N)^p \tilde{f} \tag{F.19}$$

$$\mathcal{F}[x_1^m x_2^n ... x_N^p f] = j^{(m+n+...+p)} \frac{\partial^{(m+n+...+p)} \tilde{f}}{\partial \xi_1^m \, \partial \xi_2^n ... \partial \xi_N^p} \tag{F.20}$$

$$\tilde{f}(-\xi_1, -\xi_2, ..., -\xi_N) = \tilde{f}^*(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \qquad \text{(se e solo se f è reale)} \tag{F.21}$$

Valgono inoltre la formula di Parseval e il teorema della convoluzione, che assumono la forma:

$$\int_{R^N} f \, g^* \, dx_1 \, dx_2 ... dx_N = \int_{R^N} \tilde{f} \, \tilde{g}^* \, d\xi_1 \, d\xi_2 ... d\xi_N \tag{F.22}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} f(x_1 - x'_1, ..., x_N - x'_N) \, g(x'_1, ..., x'_N) \, dx'_1 ... dx'_N =$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f} \, \tilde{g}] \tag{F.23}$$

La relazione (F.19) trasforma le operazioni di derivazione in operazioni di moltiplicazione per opportune potenze delle variabili spettrali. Questa proprietà risulta particolarmente utile nello studio delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. L'Appendice G riporta un notevole esempio di questa applicazione della trasformata di Fourier.

G

Soluzione dell'equazione di Helmoltz inomogenea nel caso dello spazio libero

Nel caso tridimensionale l'equazione di Helmoltz inomogenea ha la forma

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = - w \tag{G.1}$$

dove $\Phi = \Phi(x, y, z)$ e $w = w(x, y, z)$ sono funzioni a valori complessi e $k = \beta - j\alpha$ è una costante complessa con $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$. La funzione w, detta "densità di sorgente", è nota; Φ è una funzione d'onda incognita. In Acustica e in Elettromagnetismo l'equazione è importante per lo studio delle onde monocromatiche generate da una sorgente di densità w, agente in un mezzo lineare, stazionario, omogeneo e isotropo. La funzione Φ rappresenta una delle quantità che caratterizzano il campo da determinare (ad esempio la pressione, in acustica) o un potenziale. La costante k dipende dalle caratteristiche del mezzo ed è reale solo se il mezzo è senza perdite.

Nel problema che qui interessa il mezzo occupa tutto lo spazio e w differisce da zero solo in una regione limitata V. A causa dell'assenza di contorni al finito e di corpi estranei al mezzo considerato, si dice che la soluzione viene cercata nel caso dello "spazio libero". Essa verrà determinata nel caso di un mezzo dissipativo ($\alpha > 0$); la soluzione per il mezzo senza perdite verrà dedotta come limite per $\alpha \to 0$.

FORMA DELLA SOLUZIONE NEL CASO DI UNA SORGENTE PUNTIFORME Fra le infinite funzioni che soddisfano la (G.1) interessa determinare quella che ha il significato di un'onda generata dalla sorgente. Per tradurre questa condizione in termini matematici conviene innanzi tutto considerare il caso di una sorgente concentrata nell'origine, perché in questo caso la soluzione va ricercata nella classe di funzioni del tipo $\Phi = \Phi(r)$, dove r è la distanza dall'origine; infatti l'effetto della sorgente deve essere simmetrico rispetto ad essa. La densità di sorgente è nulla ovunque, tranne che nell'origine; quindi, per $r \neq 0$, la funzione d'onda deve soddisfare l'equazione di Helmoltz omogenea. Poiché Φ dipende sola da r, tale equazione assume la forma semplicissima (vedi Equazione A.82):

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) + k^2(r\Phi) = 0 \qquad (r \neq 0)$$

Si ha evidentemente:

$$r\Phi = A\,e^{-jkr} + B\,e^{jkr}$$

dove A e B sono costanti. Pertanto la soluzione cercata è del tipo:

$$\Phi = A\frac{e^{-jkr}}{r} + B\frac{e^{jkr}}{r}$$

Le funzioni e^{-jkr}/r ed e^{jkr}/r rappresentano onde sferiche che si propagano radialmente, la prima nel verso centrifugo, l'altra in quello centripeto. Nell'onda centripeta si ha:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{|e^{jkr}|}{r} = \lim_{r\to\infty}\frac{e^{\alpha r}}{r} = \infty$$

Una soluzione di questo tipo corrisponderebbe ad un campo che diverge all'infinito. Tale campo darebbe luogo ad una dissipazione infinita di potenza, ma, d'altro canto, essendo limitato al finito, non potrebbe che trasmettere verso l'infinito una potenza limitata. Pertanto, poiché l'unica sorgente di potenza è quella posta nell'origine, la presenza dell'onda centripeta è fisicamente inaccettabile e bisogna porre B = 0. Dunque la soluzione da considerare è costituita dalla sola onda centrifuga:

$$\Phi = A\frac{e^{-jkr}}{r} \tag{G.2}$$

Se $\alpha > 0$ la soluzione trovata è "a quadrato sommabile". Infatti:

$$\int_{\text{tutto lo spazio}} |\Phi|^2\,dV = 4\pi\int_0^\infty |\Phi|^2\,r^2 dr = 4\pi|A|^2\int_0^\infty e^{-2\alpha r}\,dr = \frac{2\pi|A|^2}{\alpha} < \infty$$

Questa proprietà dipende dal fatto che, all'infinito e in tutte le direzioni, l'ampiezza dell'onda tende a zero con sufficiente rapidità.

RISOLUZIONE MEDIANTE TRASFORMATA DI FOURIER Si consideri il caso in cui w è una funzione continua a tratti, che differisce da zero in un volume finito V. Per la (G.1) Φ deve essere continua e dotata di derivate prime continue. Inoltre, a causa delle considerazioni fatte a proposito della sorgente puntiforme, appare spontaneo assumere che, all'infinito e in tutte le direzioni, la funzione d'onda debba tendere a zero con rapidità sufficiente ad assicurare che la funzione stessa sia a quadrato sommabile (almeno quando l'attenuazione non è nulla). Grazie a questa ipotesi è lecito assumere che la soluzione sia da ricercare nello spazio $L^2(R^3)$, e che quindi essa sia rappresentabile mediante l'integrale di Fourier (vedi Appendice F):

$$\Phi(x,\ y,\ z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(\xi,\ \psi,\ \zeta)\,e^{j(\xi x+\psi y+\zeta z)}\,d\xi\,d\psi\,d\zeta$$

dove $\tilde{\Phi}$ è la trasformata di Fourier di Φ. Poiché anche la densità di sorgente è a quadrato sommabile, anche w è rappresentabile in maniera analoga, considerando la sua trasformata $\tilde{w} = \tilde{w}(\xi, \psi, \zeta)$. Trasformando entrambi i membri dell'equazione (G.1) e ricordando le regole di trasformazione delle derivate di una funzione (vedi Equazione F.19) si ottiene:

$$-(\xi^2 + \psi^2 + \zeta^2)\tilde{\Phi} + k^2 \tilde{\Phi} = -\tilde{w}$$

Pertanto la trasformata della soluzione della (G.1) è:

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{k^2 - \xi^2 - \psi^2 - \zeta^2} \tilde{w}$$

Considerando l'antitrasformata e applicando il teorema della convoluzione (vedi Equazione F.23) si ottiene:

$$\Phi(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} g(x - x', y - y', z - z') w(x', y', z') dx' dy' dz'$$

dove

$$g(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(\xi x + \psi y + \zeta z)}}{k^2 - \xi^2 - \psi^2 - \zeta^2} d\xi \, d\psi \, d\zeta \qquad \text{(G.3)}$$

Poiché w differisce da zero solo nel volume V si ha pure:

$$\Phi(x, y, z) = \int_V g(x - x', y - y', z - z') w(x', y', z') dx' dy' dz' \qquad \text{(G.4)}$$

DETERMINAZIONE DI g IN FORMA CHIUSA Per calcolare l'integrale (G.3) conviene considerare, nello spazio tridimensionale, i vettori (vedi Figura G.1):

$$\mathbf{h} = \xi \mathbf{u}_x + \psi \mathbf{u}_y + \zeta \mathbf{u}_z \qquad \mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$$

Indicando con q l'angolo formato dai due vettori si ha evidentemente:

$$\frac{e^{j(\xi x + \psi y + \zeta z)}}{k^2 - \xi^2 - \psi^2 - \zeta^2} = \frac{e^{j\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}}}{k^2 - h^2} = \frac{e^{jhr\cos\theta}}{k^2 - h^2}$$

Si nota che, quando le variabili spettrali vengono fatte variare da $-\infty$ a ∞, il vettore **r** rimane fisso mentre l'estremo di **h** varia occupando tutte le possibili posizioni. Inoltre la funzione da integrare è simmetrica rispetto alla direzione di **r**, poiché dipende solo da h e da θ. Pertanto l'integrale può essere calcolato utilizzando come variabili d'integrazione h e θ (invece di ξ,

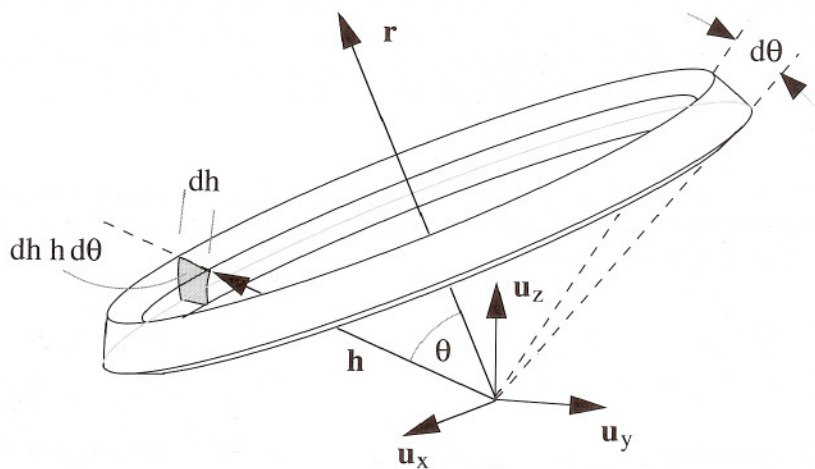



Figura G.1

ψ, ζ) e suddividendo il dominio d'integrazione in elementi toroidali del tipo indicato nella Figura G.1, all'interno dei quali la funzione da integrare è costante. Il volume di questi elementi è dato da:

$$(2\pi\, h \sin\theta)\, dh\, (h\, d\theta)$$

Così il calcolo di g viene ricondotto a quello del seguente integrale doppio:

$$g = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{h^2}{k^2 - h^2} \left(\int_0^{\pi} e^{jhr\cos\theta} \sin\theta\, d\theta \right) dh$$

Calcolando l'integrale in parentesi (che è elementare) si ottiene:

$$g = \frac{2}{(2\pi)^2 r} \int_0^{\infty} \frac{h \sin hr}{h^2 - k^2}\, dh$$

Estendendo il dominio della variabile h ai valori negativi e osservando che la funzione da integrare ha simmetria pari rispetto ad h = 0, si ha pure:

$$g = \frac{2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h \sin hr}{h^2 - k^2}\, dh = \frac{1}{(2\pi)^2\, 2jr} (I_+ - I_-) \tag{G.5}$$

dove

$$I_+ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\,e^{jhr}}{h^2 - k^2}\,dh \qquad I_- = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\,e^{-jhr}}{h^2 - k^2}\,dh$$

I due integrali vengono calcolati con il metodo dei residui, considerando la variabile complessa $H = h + jh'$ e osservando che essi equivalgono ai seguenti integrali, estesi ai contorni C_+ e C_- indicati nella Figura G.2:

$$I_+ = \int_{C_+} \frac{H\,e^{jHr}}{H^2 - k^2}\,dH \qquad I_- = \int_{C_-} \frac{H\,e^{-jHr}}{H^2 - k^2}\,dH$$

(le due esponenziali fanno sì che il contributo dei semicerchi all'infinito sia nullo). Le funzioni da integrare hanno due poli nei punti k e −k. Nel calcolo dell'integrale I_+ l'unico polo interno a C_+ è quello in −k, che ha come residuo $e^{-jkr}/2$; nel calcolo di I_- si deve invece considerare il solo polo in k, che ha pure il residuo $e^{-jkr}/2$. Utilizzando la formula di Cauchy si ottiene:

$$I_+ = 2\pi j\,(e^{-jkr}/2) \qquad I_- = -2\pi j\,(e^{-jkr}/2)$$

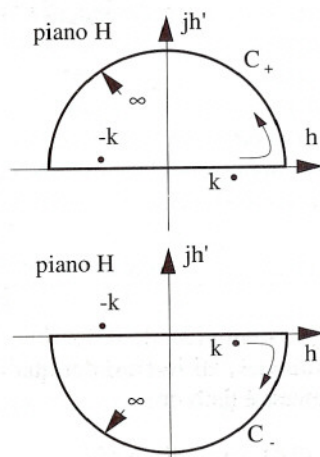
Figura G.2

Quindi, sostituendo nella (G.5) si trova la seguente espressione in forma chiusa:

$$g(x,\ y,\ z) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \tag{G.6}$$

Infine, sostituendo nella (G.4) si ha :

$$\Phi(x,\ y,\ z) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-jkR}}{R}\, w(x',\ y',\ z')\,dx'\,dy'\,dz' \tag{G.7}$$

dove R rappresenta la distanza fra il "punto di osservazione" (x, y, z) e il "punto sorgente" (x', y', z'):

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

L'integrale (G.7) esiste certamente nei punti di osservazione esterni alla sorgente, poiché quando il punto x, y, z è esterno a V, la funzione da integrare è finita per tutti i valori di x', y', z' nel volume d'integrazione. L'esistenza è meno evidente quando si considerano punti

di osservazione interni alla sorgente, perché in questo caso la funzione da integrare diverge nel punto x, y, z, dove si ha $R=0$. In questo caso l'integrale va inteso nel senso dell'integrale improprio

$$\int_V = \lim_{V_0 \to 0} \int_{V-V_0}$$

dove V_0 indica un elemento infinitesimo di volume preso intorno a x,y,z. Si può mostrare che la singolarità di 1/R è integrabile, poiché essa è tanto debole da assicurare l'esistenza del limite e la sua indipendenza dalla forma di V_0. In conclusione la (G.7) rappresenta la soluzione dell'equazione di Helmoltz inomogenea, sia all'esterno che all'interno della sorgente.

Il procedimento seguito è stato basato sull'ipotesi che il mezzo fosse dissipativo. Si osserva però che l'integrale (G.7) continua ad esistere anche in assenza di perdite (k reale). Esso rappresenta la soluzione cercata anche in questo caso limite.

Secondo la (G.7), Φ è ottenuta come sovrapposizione di infinite onde sferiche elementari

$$\frac{w(x',\ y',\ z')\,dx'\,dy'\,dz'}{4\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}$$

irradiantesi verso l'infinito dai singoli elementi di sorgente. Si nota che ciascuno di questi contributi ha la forma (G.2), prevista per il caso della sorgente puntiforme.

■ La funzione

$$g(x-x',\ y-y',\ z-z') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \tag{G.8}$$

rappresenta la soluzione che si avrebbe nel caso di una sorgente concentrata nel volumetto dx'dy'dz', di densità tale da avere w dx'dy'dz' = 1. In effetti, quest'affermazione è matematicamente inaccettabile perché una simile densità, che dovrebbe essere nulla all'esterno del volumetto e infinita all'interno, non può essere rappresentata da una comune funzione. I lettori che conoscono almeno qualche elemento della "Teoria delle distribuzioni" riconosceranno immediatamente che la sorgente in questione dovrebbe essere rappresentata mediante la "delta di Dirac" tridimensionale: $\delta(x-x')\ \delta(y-y')\ \delta(z-z')$. In effetti, nell'ambito della teoria delle distribuzioni, si può affermare che g è soluzione della seguente equazione:

$$\nabla^2 g + k^2 g = -\,\delta(x-x')\ \delta(y-y')\ \delta(z-z')$$

con la condizione di appartenenza alla classe delle cosiddette "distribuzioni temperate", per le quali è possibile la rappresentazione mediante integrale di Fourier. Nella teoria delle equazioni differenziali lineari una funzione come la g, che ha come sorgente una delta di Dirac e che soddisfa le stesse condizioni imposte alla soluzione generale di un'equazione differenziale, viene detta "funzione di Green" o "soluzione fondamentale". La (G.8) è la funzione di Green per l'equazione di Helmoltz in un mezzo tridimensionale illimitato. ■

RAPPRESENTAZIONE DI g MEDIANTE INTEGRALE DI FOURIER IN DUE DIMENSIONI La (G.3) rappresenta $g = e^{-jkr}/4\pi r$ mediante un integrale di Fourier in tre dimensioni. In alcuni

casi è utile rappresentare la stessa funzione mediante il seguente integrale di Fourier bidimensionale:

$$\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} I(\xi,\ \psi,\ z)\, e^{j(\xi x+\psi y)}\, d\xi\, d\psi \tag{G.9}$$

dove $I(\xi, \psi, z)$ è la trasformata di g rispetto alle sole variabili x, y. Confrontando con la (G.3) si vede che

$$I(\xi,\ \psi,\ z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\zeta z}}{k^2-\xi^2-\psi^2-\zeta^2}\, d\zeta \tag{G.10}$$

Anche l'integrale (G.10) può essere calcolato con il "metodo dei residui", considerando la variabile complessa $Z=\zeta+j\zeta'$ e osservando che l'integrale può essere trasformato in un integrale sul percorso chiuso A_+ o A_- (vedi Figura G.3), secondo che si consideri $z > 0$ o $z < 0$ rispettivamente (il contributo dato dai cammini semicircolari all'infinito è nullo nei due casi, grazie alla presenza dell'esponenziale e^{jZz}). Si ha quindi:

$$I(\xi,\ \psi,\ z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{A_+} \dfrac{e^{jZz}}{k^2-\xi^2-\psi^2-Z^2}\, dZ & (z>0) \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{A_-} \dfrac{e^{jZz}}{k^2-\xi^2-\psi^2-Z^2}\, dZ & (z<0) \end{cases}$$

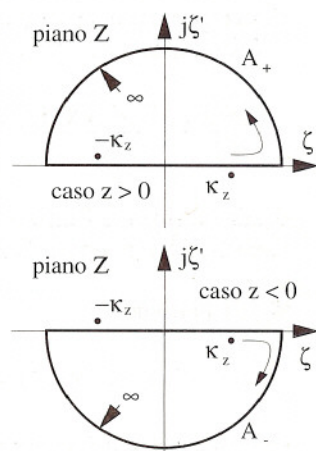



Figura G.3

La funzione da integrare ha come uniche singolarità due poli nei punti

$$\pm\sqrt{k^2-\xi^2-\psi^2} = \pm\sqrt{\beta^2-\alpha^2-j2\alpha\beta-\xi^2-\psi^2}$$

Il radicando ha parte immaginaria negativa e, quindi, il suo argomento è compreso nell'intervallo $]-\pi, 0[$. Pertanto i poli sono collocati all'interno del secondo e del quarto quadrante. Indicando con κ_z il polo nel quarto quadrante, cioè

$$\kappa_z = \sqrt{k^2-\xi^2-\psi^2} \qquad (\mathrm{Re}\ \kappa_z > 0, \mathrm{Im}\ \kappa_z < 0)$$

i residui sono:

$$e^{j\kappa_z z}/2\kappa_z \quad \text{(per il polo in } \kappa_z) \qquad -e^{-j\kappa_z z}/2\kappa_z \quad \text{(per il polo in } -\kappa_z)$$

Osservando che il contorno A_+ comprende il solo polo in $-\kappa_z$ e che il contorno A_- contiene solo l'altro polo, applicando la formula di Cauchy si ottiene

$$I(\xi, \psi, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^2}(-e^{-j\kappa_z z}/2\kappa_z)\,2\pi j & (z > 0) \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2}(-e^{j\kappa_z z}/2\kappa_z)\,2\pi j & (z < 0) \end{cases}$$

ovvero, con una sola espressione valida per qualsiasi valore di z:

$$I(\xi, \psi, z) = \frac{e^{-j\kappa_z |z|}}{4\pi j\kappa_z} \tag{G.11}$$

Sostituendo nella (G.9) si ottiene l'espressione cercata:

$$\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = \frac{1}{8\pi^2}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\kappa_z |z|}}{j\kappa_z} e^{j(\xi x + \psi y)}\, d\xi\, d\psi \tag{G.12}$$

Evidentemente si ha pure:

$$\frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \frac{1}{8\pi^2}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\kappa_z |z-z'|}}{j\kappa_z} e^{j[\xi(x-x')+\psi(y-y')]}\, d\xi\, d\psi \tag{G.13}$$